随机分形引论

胡迪鹤等 著

随机分形是融概率论、经典分析和几何学于一体的新兴数学分支，对研究随机过程和一般随机集的分形理论及其它相关学科有重要意义。



武汉大学学术丛书
WUHAN UNIVERSITY ACADEMIC LIBRARY

武汉大学出版社



随机分形引论

胡迪鹤　刘禄勤
胡晓予　吴　军　著

国家自然科学基金
国家教委专项基金　资助课题

武汉大学出版社
1995

图书在版编目(CIP)数据

随机分形引论/胡迪鹤等著·—武汉:武汉大学出版社,1996.2
ISBN 7-307-02121-8(平)
ISBN 7-307-02125-0(精)

Ⅰ.随…
Ⅱ.胡…
Ⅲ.随机分形—理论
Ⅳ.O 211

武汉大学出版社出版
(430072 武昌 珞珈山)
湖北省崇阳县印刷厂印刷
新华书店湖北发行所发行
1996年2月第1版 1996年2月第1次印刷
开本:850×1168 1/32 印张:14.25 插页:5
字数:366千字 印数:1—1000(内含精装200册)
ISBN 7-307-02121-8/O·155 定价:15.80元(平)
ISBN 7-307-02125-0/O·156 定价:21.80元(精)

前　言

“分形”(Fractal) 一词，源于 Mandelbrot，B. B. 的“Fractals: Form, Chance and Dimension, Freeman, 1977.” 但是，它的基本概念与方法，Hausdorff、Besicovitch、Sierpinski 等人在本世纪初就已提出. 但当时并未引起学术界的充分重视. 直到本世纪 70 年代，由于理论发展及应用的需要，分形学才得到了迅速的发展. 分形学主要研究结构十分复杂、用经典数学手法很难处理、但实际中常见的集合（或图形）的几何性质及分析特征. 随着近代概率论的发展，融概率论、经典分析、几何与分形学于一体的“随机分形”(Random Fractal) 得到了迅速的发展. 随机分形的研究，早在本世纪 40 年代就已开始，尽管当时还没有随机分形这个词. Lévy P. 早在 1940 年左右就开始研究 Brown 运动的样本性质，随后，Besicovitch A. S. 和 Taylor S. J. 也研究类似的问题. 综合他们三人的结果，可知：直线上的 Brown 运动的零集的 Hausdorff 维数为 1/2. 这可能是随机分形的最早的一个漂亮的结果.

目前随机分形的研究，主要集中在下列四个方面：(1) 随机过程样本轨道的分形性质；(2) 几类典型的随机集的分形性质；(3) 分形上的随机过程的构造及其性质；(4) 离散分形理论. 本书也是沿着这四个方面展开讨论的.

关于随机过程样本轨道分形性质的研究，首先是从 Brown 运动开始的，因为它具有正态分布而且轨道连续等，这些良好的概率性质与分析性质，对研究提供了方便条件. 继 Brown 运动之后，人们广泛研究的是一类以 Brown 运动为其特例的 Stable（稳定）过程. 到目前为止，Brown 运动与 Stable 过程样本轨道分形性质（包括维数问题与测度问题）的研究，已近尾声，问题已基本解决.

至于一般的 Lévy 过程、统计自相似过程、马氏过程、各种随机场的分形理论的研究，完美的结果不多，尚有大量问题亟待研究.

关于典型随机集的分形性质的研究，首先是从经典 Cantor 集的随机化与推广开始，因为这类集合结构简单，但实际应用很广. 然后，人们研究更为广泛和复杂的随机集，这就是：统计自相似集、统计自仿射集等等. 经典 Cantor 集的各种随机化与推广的分形性质，包括维数与测度问题，已基本解决. 统计自相似集的分形性质的研究，亦有许多漂亮的结果，但离基本解决问题尚远. 统计自仿射集的分形性质的研究，则只有少数完美的结果.

分形集上的随机过程及其性质的研究，起始得较晚，大约在近十多年才开始研究. 在分形集上构造随机过程的方法，目前大致有两种：一种是直接构造样本函数族、概率空间、坐标随机过程，这种方法构造的多半是递归集（如 Sierpinski 垫）上的 Brown 运动、自回避过程或自相似扩散过程. 这种方法，概率直观性强，但较繁杂. 另一种方法，基本上是分析方法，概率直观性较弱，此法利用 Dirichlet forms、算子半群和其它微分算子，首先在分形集上定义一个算子半群，然后用它来定义其所对应的随机过程.

无论用“势”(Cardinal number)、“纲”(Category)，还是用经典的“维数”(Dimension)，都无法区别可数集 A 的“大小”，因为任何可数无穷集的势都一样；任何可数无穷集都是第 1 纲集；任何可数无穷集的经典维数（如 Hausdorff 维数、Topology 维数、……）都是零. 但是，无论从数学、统计物理或其它应用学科来看，引进某种能区别不同的可数无穷集的“大小”的“指标”是十分必要的和有益的. 基于这种需要，近几年来，“离散分形”理论开始发展起来，并广泛地被利用于离散随机过程（特别是随机徘徊）及统计物理等方面的研究。

本书共十一章，主要论述随机分形的上述四方面的问题. 为使全书能够自成体系，为了它的科学性、系统性和可读性，我们在第一章中用了相当大的篇幅论述拓扑空间中的测度理论及维数

概念. 第二章至第五章，论述随机过程的样本轨道的分形理论，着重讨论 Brown 运动与 Stable 过程. 第六章简介各种随机场的分形理论. 第七章讨论离散分形及其在随机徘徊中的应用. 第八章至第十章讨论几类典型的随机集（主要是随机 Cantor 集、统计自相似集和统计自仿射集）的分形理论. 第十一章简介分形集上的随机过程的构造及其性质.

本书相当一部分内容是我们近年来的研究成果，但是，为了使本书既能作为一本"随机分形"研究者的引导书，又能作为一本概率论专业研究生的教学参考书，我们也收进了其他数学家们的一些研究成果、书中的引理、定理、命题的证明有详有简，有的甚至只录结论不予证明（但指出何处可查证明），这是为了尽量录用一些精采的结果而又不使全书篇幅过长. 一般说来，证明具有典型意义而又不太繁杂的，我们给出详细证明，纯分析的太繁杂的证明一般从略.

本书是在胡迪鹤的主持下，由胡迪鹤、刘禄勤、胡晓予、吴军分头执笔撰写的，第一、七、八、九章由胡迪鹤执笔，第二章、第四章的一部分、第五、六章由刘禄勤执笔，第四章的一部分及第三章由胡晓予执笔，第十章和第十一章由吴军执笔，然后集体讨论定稿而成.

本书得到了国家自然科学基金委及国家教委的专项基金（包括博士点基金）的资助，作者谨致谢意.

由于我们水平有限，缺点错误在所难免，敬请不吝指教，以期改正.

著者

1995 年于武汉

符号表

$\overline{A}$	集合 A 的闭包
A^c	集合 A 的补集
$A \cup B$	集合 A 与 B 的并
$A \cap B$	集合 A 与 B 的交
$A - B$ (A/B)	集合 A 与 B 的差
$\mathbf{E}$	期望算子
$\mathbf{E}^x$	关于 P^x 的期望算子
$f: E \to F$	由 E 到 F 的映射
$\mathscr{L}$	一维 Lebesgue 测度
$\mathscr{L}_d$	d 维 Lebesgue 测度
$\mathbb{N}$	自然数集
$\mathbb{N}_0$	非负整数集
$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{R}_+$	非负实数集
$\varnothing$	空集
$\mathbb{R}^d$	d 维欧氏空间
Var	方差算子
$x \vee y$	x 与 y 的最大者
$x \wedge y$	x 与 y 的最小者
$\mathbb{Z}$	整数集
$\mathbb{Z}_+$	非负整数集
$\mathbb{Z}^d$	d 维整数格子点集
$(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$	概率空间
$\mathscr{F} \vee \mathscr{G}$	含 $\mathscr{F}$ 及 $\mathscr{G}$ 的最小 σ-代数

目 录

前 言 …………………………………………………… (1)
第一章 测度与维数 …………………………………………… (1)
§1 拓扑空间中的测度 …………………………………… (2)
§2 Hausdorff 测度与 Hausdorff 维数 ……………………… (13)
§3 Packing 测度与 Packing 维数 ………………………… (24)
§4 其它维数概念及诸维数之间的关系 …………………… (44)
§5 离散的 Hausdorff 维数与离散的 Packing 维数 ………… (55)

第二章 Brown 运动中的随机分形 ……………………………… (80)
§1 Brown 运动的基本性质 ……………………………… (81)
§2 Brown 运动的像集与图集 …………………………… (83)
§3 Brown 运动的 k 重点集与 k 重时集 …………………… (95)
§4 Brown 运动的水平集与逆像集 ………………………… (99)

第三章 稳定过程的轨道分形理论 …………………………… (104)
§1 稳定律 …………………………………………………… (104)
§2 稳定过程的定义及基本性质 …………………………… (108)
§3 稳定过程的像集的维数和测度 ………………………… (112)
§4 稳定过程的图集的维数及测度函数 …………………… (123)
§5 稳定过程的 k 重点集 …………………………………… (139)
§6 附表 ……………………………………………………… (144)

第四章 Lévy 过程轨道的分形性质 …………………………… (149)
§1 一般从属过程的轨道的分形性质 ……………………… (149)
§2 Lévy 过程的像集 ……………………………………… (159)

§3 Lévy 过程的逆像集的 Hausdorff 维数……………………（172）
§4 相关问题……………………………………………………（177）

第五章 自相似随机过程的随机分形…………………………（180）
§1 自相似马氏过程的定义及基本性质………………………（180）
§2 像集的维数…………………………………………………（182）
§3 图集和水平集的 Hausdorff 维数…………………………（186）
§4 自相似马氏过程的其他相关结果…………………………（190）
§5 一般自相似过程的基本性质………………………………（192）
§6 具有平稳增量的自相似过程的分形性质…………………（195）

第六章 随机场的分形理论简介………………………………（200）
§1 分数 Brown 运动和指数 Gauss 场 ………………………（200）
§2 Brown 单……………………………………………………（210）
§3 Stable 场……………………………………………………（212）
§4 二参数 OU 过程……………………………………………（214）

第七章 随机徘徊中的离散分形………………………………（219）
§1 暂留的随机徘徊的分形集…………………………………（220）
§2 常返的随机徘徊的分形集…………………………………（236）
§3 常返的随机徘徊的局部时…………………………………（243）

第八章 统计自相似集的结构、分布及其 Hausdorff 测度 ……
……………………………………………………………………（252）
§1 统计自相似集的结构………………………………………（252）
§2 随机集与分布的自相似性…………………………………（269）
§3 随机集的 Hausdorff 测度…………………………………（280）
§4 例子…………………………………………………………（295）

第九章 随机 Cantor 集的维数与测度 ………………………（303）
§1 广义 Cantor 集的维数 ……………………………………（303）

§2　随机广义 Cantor 集的维数 …………………………… (314)
§3　随机 Cantor 集的 Hausdorff 测度 ………………………… (317)
§4　随机 Cantor 集的 Packing 测度 …………………………… (332)

第十章　统计自仿射集……………………………………… (338)
§1　统计自仿射集的定义……………………………………… (338)
§2　与统计自仿射集相联系的分枝过程……………………… (342)
§3　统计自仿射集的 Packing 维数 …………………………… (351)
§4　统计自仿射集的 Hausdorff 维数 ………………………… (358)
§5　统计自仿射集的分形准则………………………………… (378)

第十一章　分形集上的随机过程简介……………………… (381)
§1　Sierpinski 垫上的 Brown 运动 …………………………… (381)
§2　分形集上的自回避过程…………………………………… (403)
§3　后记………………………………………………………… (417)

参考文献……………………………………………………… (418)
索引…………………………………………………………… (440)

第一章

测度与维数

本章是全书的基础. 它系统地论述了多种测度与维数的概念，并讨论了存在于多种维数之间的关系以及他们的性质. 主要研究了 Hausdorff 维数、Packing 维数、Kaufman 维数、盒维数(也称 Kolmogorov 熵指数、Minkowski 维数或 Bouligand 维数)、离散的 Hausdorff 维数和离散的 Packing 维数. 由于本章的内容是基础性的，所以论证得比较详细和系统.

以下恒用$\mathbb{N}$ 表自然数集，$\mathbb{N}_0\equiv\{0\}\cup\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，$\mathbb{R}$ 表实数集，$\mathbb{R}_+$表非负实数集. 集合 E 到集合 F 的映射(函数)记为

$$f: E\rightarrow F.$$

$\mathbb{R}^d$表 d 维欧氏空间，$\mathbb{Z}^d$表 d 维整数格子点集($d=1,2,\cdots$). $\varnothing$表空集合，A^c 和 $\overline{A}$ 分别表 A 的补集和闭包.

$(\Omega,\mathscr{F},P)$恒表概率空间(通常是完备的)，$\mathbf{E}^P$ 表关于 P 的期望算子. 在不致混淆的情况下简记 $\boldsymbol{E}^P$ 为 $\mathbf{E}$.

设 $f:E_1\rightarrow E_2$，$A\subset E_1$，$B\subset E_2$，$\mathscr{E}$ 是 E_2 上的一个集合系. 称

$$f(A)\equiv\{f(x):x\in A\},$$
$$\mathrm{Gr}f(A)\equiv\{(x,f(x)):x\in A\},$$
$$f^{-1}(B)\equiv\{x:f(x)\in B\}$$

分别为 f 在 A 上的像集、图集和 f 关于 B 的逆像集. 再记

$$f^{-1}(\mathscr{E})\equiv\{f^{-1}(C):C\in\mathscr{E}\}.$$

§1 拓扑空间中的测度

定义 1.1 设有

$$\tau:\quad \mathscr{E}\to[0,\infty],$$

这里 $\mathscr{E}$ 是集合 E 的一个集合系. 称 τ 是 $\mathscr{E}$ 上的一个预测度:如果 $\varnothing\in\mathscr{E}$ 且 $\tau(\varnothing)=0$. 称 $\mathscr{E}$ 上的预测度 τ 是 $\mathscr{E}$ 上的测度,如果 τ 还满足:

(1) $A_1,A_2\in\mathscr{E},A_1\subset A_2\Rightarrow\tau(A_1)\leqslant\tau(A_2)$;

(2) $\{A_i\}\subset\mathscr{E},\bigcup\limits_i A_i\in\mathscr{E}\Rightarrow\tau(\bigcup\limits_i A_i)\leqslant\sum\limits_i\tau(A_i)$.

若 $\mathscr{E}$ 是 E 的全体子集,则简称 $\mathscr{E}$ 上的预测度(测度)为 E 上的预测度(测度).

此处之测度实为通常的外测度,而通常的测度将是下面定义 1.2 中的可数可加测度. 本书所言的测度,都是定义 1.1 中的测度(外测度).

定义 1.2 设有

$$\tau:\quad \mathscr{E}\to[0,\infty],$$

这里 $\mathscr{E}$ 是集合 E 的一个 σ 代数. 称 τ 是 $\mathscr{E}$ 上的一个可数可加的测度:如果

(1) $\tau(\varnothing)=0$;

(2) $\{A_i\}$ 是 $\mathscr{E}$ 中两两不交的集合列 $\Rightarrow\tau(\bigcup\limits_i A_i)=\sum\limits_i\tau(A_i)$.

显然,可数可加的测度是测度.

定理 1.1 设 $\mathscr{E}$ 是 E 的一个集合系,τ 是 $\mathscr{E}$ 上的一个预测度,对任何 $A\subset E$,定义

$$\mu(A)=\inf_{\substack{C_i\in\mathscr{E}\\ \bigcup_i C_i\supset A}}\sum_i\tau(C_i),\tag{1.1}$$

则 μ 是 E 上的测度. 我们就说 μ 是由预测度 τ 按模式(Ⅰ)产生的测度. (注意:(1.1)右端可能不存在 $C_i\in\mathscr{E}$,$\bigcup\limits_i C_i\supset A$,这时按惯例

定义 $\inf\varnothing$ 为 ∞.)

如果 ν 是 E 上任一测度，η 是 E 上的预测度，且

$$\nu(A)=\eta(A) \qquad (\forall\ A\subset E),$$

则 ν 是由 η 按模式(Ⅰ)产生的测度.

证 先证定理 1.1 的第一部分. 显然(1.1)定义的 μ 是预测度. 下面证明 μ 满足定义 1.1 中(1)和(2).

(1)是显然的，只证(2).

任取 $\{A_i\}\subset\mathscr{E}$，$\bigcup_i A_i\in\mathscr{E}$. 若 $\sum_i \mu(A_i)=\infty$，则(2)显然成立. 故可设 $\sum_i \mu(A_i)<\infty$. 这时每个 $\mu(A_i)$ 均为有穷，所以任给 $\varepsilon>0$，对任一 i，均有

$$\bigcup_j C_j^{(i)}\supset A_i,\ C_j^{(i)}\in\mathscr{E},\ \{C_j^{(i)}\}\subset\mathscr{E},$$

使

$$\sum_j \tau(C_j^{(i)})\leqslant\mu(A_i)+\varepsilon\cdot 2^{-i},$$

从而

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\tau(C_j^{(i)})\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性得知

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)\geqslant\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big).$$

(2)证毕.

再证定理 1.1 的第二部分. 设 λ 是由预测度 η 按模式(Ⅰ)产生的测度，则对任何 $A\subset E$，有

$$\lambda(A)\leqslant\eta(A)=\nu(A).$$

另一方面，任取 $C_i\subset E$，$\bigcup_i C_i\supset A$，总有

$$\sum_i \eta(C_i)=\sum_i \nu(C_i)\geqslant\nu\Big(\bigcup_i C_i\Big)\geqslant\nu(A),$$

所以

$$\lambda(A)\geqslant\nu(A).$$

故 ν 是 η 按模式(Ⅰ)产生的测度. 定理证毕.

推论 1.1 由测度(当然也是预测度)再按模式(Ⅰ)产生的测度还是它自己.

定义 1.3 设 μ 是 E 上的测度. 称 E 中的子集 A 是 μ-可测的, 如果对任何 $B_1\subset A, B_2\subset E-A$, 总有 $\mu(B_1\cup B_2)=\mu(B_1)+\mu(B_2)$.

全体 μ-可测集记为 $\sigma(\mu)$.

定理 1.2 $\sigma(\mu)$ 是 σ 代数, $\mu|_{\sigma(\mu)}$ 是可数可加的测度. 其中 $\mu|_{\sigma(\mu)}$ 表 μ 在 $\sigma(\mu)$ 上的局限.

证 证明甚易, 从略.

定理 1.3 设 μ 是 E 上的测度, $F\subset E$, $\{A_n\}\subset\sigma(\mu)$.

1) $\{A_n\}$ 单增 $\Rightarrow \mu(F\cap(\bigcap_n A_n))=\sup_{n\geqslant 1}\mu(F\cap A_n)$;

2) $\{A_n\}$ 单降且 $\exists\ n_0$ 使 $\mu(F\cap A_{n_0})<\infty \Rightarrow$

$$\mu(F\cap(\bigcap_n A_n))=\inf_{n\geqslant 1}\mu(F\cap A_n).$$

证 证明甚易, 从略.

定义 1.4 称 E 上的测度 μ 是正则的, 如果 $\forall\ B\subset E$, $\exists\ A\supset B, A\in\sigma(\mu)$, 使 $\mu(B)=\mu(A)$.

定理 1.4 设 μ 是 E 上的正则测度. 则

1) $\{A_n\}$ 单增, $A_n\subset E(n\geqslant 1)$ $\Rightarrow$

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sup_{n\geqslant 1}\mu(A_n);$$

2) $M\in\sigma(\mu), \mu(M)<\infty \Rightarrow$

$\forall\ B\subset M, B\in\sigma(\mu)$ 的充要条件是

$$\mu(M)=\mu(B)+\mu(M-B).$$

证 1) 因 μ 是正则的, 所以 $\forall\ n\geqslant 1$, 可取 $B_n\supset A_n, B_n\in\sigma(\mu)$, 使 $\mu(A_n)=\mu(B_n)$. 令 $C_n=\bigcap_{m\geqslant n}B_m$, 则 $A_n\subset C_n\subset B_n(n\geqslant 1)$. 因此

$$\mu(A_n)\leqslant\mu(C_n)\leqslant\mu(B_n)=\mu(A_n)\quad(n\geqslant 1).$$

再注意 $\{C_n\}$ 单增且 $\{C_n\}\subset\sigma(\mu)$ 并应用定理 1.3 1) 得知

$$\sup_{n\geqslant 1}\mu(A_n)=\sup_{n\geqslant 1}\mu(C_n)$$

$$=\mu(\bigcup_{n\geq 1}C_n)\geq\mu(\bigcup_{n\geq 1}A_n),$$

而$\sup\limits_{n\geq 1}\mu(A_n)\leq\mu(\bigcup\limits_{n\geq 1}A_n)$显然成立，1)证毕.

2)设$B\subset M$，$B\in\sigma(\mu)$，则B与$M-B$不交且皆属于$\sigma(\mu)$，故$\mu(M)=\mu(B)+\mu(M-B)$.

$\forall\ B\subset M$，若$\mu(M)=\mu(B)+\mu(M-B)$，令

$$C=M-B,$$

则由μ是正则测度得知：$\exists\ B^*$、$C^*\in\sigma(\mu)$，使

$$B\subset B^*\subset M,\mu(B)=\mu(B^*);$$

$$C\subset C^*\subset M,\mu(C)=\mu(C^*).$$

由B^*、$C^*\in\sigma(\mu)$知

$$\mu(B^*-C^*)+\mu(B^*\cap C^*)+\mu(C^*-B^*)$$
$$=\mu(B^*\cup C^*)\geq\mu(B\cup C)=\mu(M),\tag{1.2}$$

仿之，

$$\mu(B^*-C^*)+2\mu(B^*\cap C^*)+\mu(C^*-B^*)$$
$$=\mu(B^*)+\mu(C^*)=\mu(B)+\mu(C)=\mu(M)<\infty,\tag{1.3}$$

比较(1.2)和(1.3)即得

$$\mu(B^*\cap C^*)=0.\tag{1.4}$$

令$D=B^*-B$，则

$$D=B^*\cap(M-B)=B^*\cap C\subset B^*\cap C^*.\tag{1.5}$$

由(1.4)、(1.5)得$\mu(D)=0$，从而$D\in\sigma(\mu)$. 再注意$B^*\in\sigma(\mu)$、$D=B^*-B$得$B\in\sigma(\mu)$. 定理得证.

定理 1.5 设I是任意指标集，$\forall\ n\in I$，μ_n是E上一个测度.

1) $\forall\ B\subset E$，定义

$$\mu(B)=\sup_{n\in I}\mu_n(B),$$

则μ是E上的一个测度；

2) 存在唯一一个E上的测度γ使：

(a) $\gamma(B)\leq\inf\limits_{n\in I}\mu_n(B)\quad(\forall\ B\subset E)$； (1.6)

(b)对任何一个E上的满足

$$\lambda(B)\leqslant\inf_{n\in I}\mu_n(B)\quad(\forall\ B\subset E)\tag{1.7}$$

的测度 λ,总有

$$\gamma(B)\geqslant\lambda(B)\qquad(\forall\ B\subset E).\tag{1.8}$$

证 1)可由测度的定义直接验证之.

2)的证明如下:令

$$\gamma(B)=\sup_{\lambda\in\Gamma}\lambda(B)\qquad(\forall\ B\subset E).\tag{1.9}$$

其中

$$\Gamma=\{\lambda:\lambda\text{ 是 }E\text{ 上的满足(1.7)的测度}\}.$$

则 γ 即为所求.

定义 1.5 设 μ 是 E 上一个测度,$\mathscr{E}$ 是 E 的一个子集系. 称 μ 是 $\mathscr{E}$-正则的,如果对任何 $B\subset E$,存在 $B^*\in\mathscr{E}$,使 $B\subset B^*$ 且 $\mu(B)=\mu(B^*)$.

证
$$\mathscr{E}_\sigma=\{B:B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n,B_n\in\mathscr{E}\},$$
$$\mathscr{E}_\delta=\{B:B=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n,B_n\in\mathscr{E}\},$$
$$\mathscr{E}_{\sigma,\delta}=(\mathscr{E}_\sigma)_\delta.$$

显然定义 1.5 是定义 1.4 的推广. 定义 1.4 中的正则测度,即定义 1.5 中的 $\sigma(\mu)$-正则测度.

定理 1.6 设 τ 是定义在 E 的子集系 $\mathscr{E}$ 上的预测度,$E\in\mathscr{E}$,μ 是由 τ 按模式(Ⅰ)所产生的测度,则 μ 是 $\mathscr{E}_{\sigma,\delta}$-正则的.

证 $\forall\ B\subset E$,

1) 若 $\mu(B)=\infty$,则有

$$E\in\mathscr{E}\subset\mathscr{E}_{\sigma,\delta},E\supset B,\mu(E)=\mu(B)=\infty.$$

2)若 $\mu(B)<\infty$,取

$$D=\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i^{(j)},$$

其中

$$C_i^{(j)}\in\mathscr{E},\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i^{(j)}\supset B,\sum_{i=1}^{\infty}\tau(C_i^{(j)})<\mu(B)+\frac{1}{j},$$

则有

$$D\supset B, D\in\mathscr{E}_{\sigma,\delta}, \mu(D)=\mu(B).$$

定理证毕.

下面我们研究距离空间(E,ρ)上的测度，其中ρ是E上的一个距离. $\rho(A,B)$表二集合A与B之间的距离：

$$\rho(A,B)\equiv\inf_{x\in A, y\in B}\rho(x,y), \forall\ A,B\in E;$$

$\rho(x,B)$表点x与集合B之间的距离：

$$\rho(x,B)\equiv\rho(\{x\},B).$$

集合A的直径

$$\operatorname{diam}(A)\equiv\sup_{x,y\in A}\rho(x,y),$$

空集$\varnothing$的直径$\operatorname{diam}(\varnothing)$定义为0. 有时简记$\operatorname{diam}(A)$为$\operatorname{diam}A$.

定义 1.6　设(E,ρ)是一距离空间，$\mathscr{E}$是E的一个子集系，τ是定义在$\mathscr{E}$上的一个预测度，令

$$\mu(B)=\sup_{\epsilon>0}\mu_\epsilon(B)\quad(\forall\ B\subset E),\tag{1.10}$$

其中

$$\mu_\epsilon(B)=\inf_{\substack{C_i\in\mathscr{E}, \bigcup C_i\supset B,\\ \operatorname{diam}(C_i)\leqslant\epsilon}}\sum_{i=1}^{\infty}\tau(C_i).\tag{1.11}$$

易证μ_ϵ是E上的测度，从而，由定理1.5知μ亦为E上的测度. 我们就说μ是由预测度τ按模式(Ⅱ)产生的测度.

显然，当ϵ下降时，μ_ϵ上升，故

$$\mu(B)=\sup_{\epsilon>0}\mu_\epsilon(B)=\lim_{\epsilon\to0}\mu_\epsilon(B).\tag{1.12}$$

定义 1.7　设(E,ρ)是一距离空间，$A,B\subset E$. 称A、B是一对隔离集，如果$\rho(A,B)>0$. 称E上的测度μ是一个距离测度，如果对任一对隔离集A,B，都有

$$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B).$$

定理 1.7　距离空间(E,ρ)上的由预测度τ按模式(Ⅱ)产生的测度μ都是距离测度.

证　为证定理，只需证明对任一对隔离集A,B，有

$$\mu(A\cup B)\geqslant\mu(A)+\mu(B). \tag{1.13}$$

不失普遍性，可设

$$\mu(A\cup B)<\infty. \tag{1.14}$$

选取 $\delta>0$ 使 $\rho(A,B)\geqslant\delta$；取 δ_1,δ_2 使

$$0<\delta_i<\mathrm{diam}(E)\ (i=1,2).$$

令 $\eta=\min\{\delta_1,\delta_2,\frac{\delta}{2}\}$.

由 μ 是由 τ 按模式(Ⅱ)产生的测度及(1.14)可知

$$\mu(A\cup B)\geqslant\inf_{\substack{\bigcup C_i\supset A\cup B\\ \mathrm{diam}(C_i)\leqslant\eta}}\sum_i\tau(C_i).$$

因此$\forall\ \varepsilon>0$ 可取$\{C_i\}$使

$$\bigcup_i C_i\supset A\cup B,$$

$$\mathrm{diam}(C_i)\leqslant\eta\quad(i=1,2,\cdots),$$

$$\sum_i\tau(C_i)\leqslant\mu(A\cup B)+\varepsilon. \tag{1.15}$$

谬设存在一个 i 使

$$C_i\cap A\neq\varnothing\neq C_i\cap B, \tag{1.16}$$

则可取 $a_0\in C_i\cap A,b_0\in C_i\cap B$，从而

$$\rho(a_0,b_0)\leqslant\mathrm{diam}(C_i)\leqslant\eta\leqslant\frac{1}{2}\delta$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\rho(A,B)\leqslant\frac{1}{2}\rho(a_0,b_0). \tag{1.17}$$

因此 $\rho(a_0,b_0)=0=\eta$，这与 η 的取法矛盾，所以没有一个 i 会使(1.16)成立. 令

$$A_i=\begin{cases}C_i,\text{若 }C_i\cap A\neq\varnothing,\\ \varnothing,\text{反之},\end{cases}\quad B_i=\begin{cases}C_i,\text{若 }C_i\cap B\neq\varnothing,\\ \varnothing,\text{反之}\end{cases}$$

$$(i=1,2,\cdots).$$

则

$$\mathrm{diam}\ (A_i)\leqslant\eta\leqslant\delta_1,$$

$$\mathrm{diam}(B_i)\leqslant\eta\leqslant\delta_2\quad(i=1,2,\cdots),$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supset B. \tag{1.18}$$

由于没有一个 i 使(1.16)成立，所以，由 A_i、B_i 的定义得知：对同一个 i，A_i，B_i 中至少有一个是空集，所以

$$\tau(A_i)+\tau(B_i)=\max\{\tau(A_i),\tau(B_i)\}$$
$$\leqslant \max\{\tau(C_i),\tau(\varnothing)\}=\tau(C_i)\ (\forall\ i). \tag{1.19}$$

由(1.18)、(1.19)、(1.15)得：

$$\mu_{\delta_1}(A)+\mu_{\delta_2}(B)\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\tau(A_i)+\sum_{i=1}^{\infty}\tau(B_i)$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\tau(C_i)\leqslant \mu(A\cup B)+\varepsilon. \tag{1.20}$$

由 $\varepsilon>0$，$\delta_1>0$，$\delta_2>0$ 可任意接近于 0 得知

$$\mu(A)+\mu(B)\leqslant \mu(A\cup B).$$

定理证毕.

定理 1.8 设 μ 是距离空间 (E,ρ) 上的距离测度，$\mathscr{B}(E)$ 是 E 中的全体 Borel 集，则

$$\mathscr{B}(E)\subset \sigma(\mu).$$

证明可参见[185]p. 33，此处从略.

定理 1.9 设 τ 是定义在距离空间 (E,ρ) 上的一个子集系 $\mathscr{E}$ 上的一个预测度，$\mathscr{G}$、$\mathscr{F}$ 分别表 E 中全体开集与全体闭集，$\mathscr{E}\subset\mathscr{G}$. 令 μ 是由预测度 τ 按模式(Ⅱ)产生的测度，则 μ 是正则的、$\mathscr{G}_\delta$-正则的距离测度，$\mathscr{B}(E)\subset\sigma(\mu)$，且 $\forall\ B\in\sigma(\mu)$，当 $\mu(B)<\infty$ 时，必存在 C，使 $B\supset C$，$C\in\mathscr{F}_\sigma$，$\mu(B)=\mu(C)$.

证明可参见[185]p. 40，此处从略.

下面我们简单介绍一些有关 Lebesgue－Stieltjes 测度的基本结果.

给定 d 维欧氏空间 $\mathbb{R}^d$，其中的点用 $x=(x_1,\cdots,x_d)$，$y=(y_1,\cdots,y_d)$，$a=(a_1,\cdots,a_d)$，$b=(b_1,\cdots,b_d)$，…表之. 记

$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}^d: a_i<x_i\leqslant b_i, i=1,\cdots,d\}$$

为 $\mathbb{R}^d$ 中半开半闭 d 维区间(d 维矩形)，

$$\mathscr{I}_d=\{(a,b]:a,b\in\mathbb{R}^d,a\leqslant b\}$$

为$\mathbb{R}^d$中半开半闭 d 维区间全体，此处$a\leqslant b$ 意即$a_i\leqslant b_i,i=1,\cdots,d$. $a<b,a\geqslant b,a>b$ 的定义仿前，$[a,b),(a,b),[a,b]$的定义亦仿$(a,b]$.

定义 1.8 设$F:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^1$. 称 F 是$(L\text{-}S)_d$ 函数，如果

(1) $F(x_1,\cdots,x_d)$对每一个变量皆右连续；

(2) $\forall\ (a,b]\in\mathscr{I}_d$，均有

$$\begin{aligned}&\mu_F((a,b])\equiv\\&F(b_1,\cdots,b_d)-[F(a_1,b_2,\cdots,b_d)+\cdots+F(b_1,\cdots,b_{d-1},a_d)]\\&+[F(a_1,a_2,b_3,\cdots,b_d)+\cdots+F(b_1,\cdots,b_{d-2},a_{d-1},a_d)]\\&-\cdots+(-1)^dF(a_1,\cdots,a_d)\geqslant 0.\end{aligned}$$

显然，$F(x_1,\cdots,x_d)=x_1\cdots x_d$ 是$(L\text{-}S)_d$ 函数，这个特殊的$(L\text{-}S)_d$函数称为 L_d 函数(d 维 Lebesgue 函数).

定理 1.10 设 F 是$(L\text{-}S)_d$ 函数，$\mathscr{I}_d$ 定义如前，$\mathscr{B}(\mathscr{I}_d)$是由半环 $\mathscr{I}_d$ 所产生的 σ 代数. $\forall\ (a,b]\in\mathscr{I}_d$，定义 $\mu_F((a,b])$如定义1.8 中(2)式所示(注意：$\varnothing\in\mathscr{I}_d$，且(2)中定义 $\mu_F(\varnothing)=0$)，则 μ_F 是 $\mathscr{I}_d$ 上的可数可加测度，从而 μ_F 可唯一扩张到 $\mathscr{B}(\mathscr{I}_d)$上去仍是一个可数可加测度，仍记之为 μ_F.

证明可参见[100]p. 6.

称此 μ_F 为$(L\text{-}S)_d$ 函数 F 所产生的(按模式(Ⅲ))$L\text{-}S$ 可数可加测度. 特别地，当 $F(x_1,\cdots,x_d)\equiv x_1\cdots x_d$ 时，称 μ_F 为由 F 产生的(按模式(Ⅲ))L 可数可加测度.

定理 1.11 设 F 是$(L\text{-}S)_d$ 函数，μ_F 是定义 1.8(2)式中 $\mathscr{I}_d$ 上的可数可加测度(更是预测度)，λ_F 和 γ_F 分别为由 μ_F 按模式(Ⅰ)和(Ⅱ)产生的($\mathbb{R}^d$中一切子集上)测度，则 $\lambda_F\equiv\gamma_F$.

证 显然，$\forall\ B\subset\mathbb{R}^d$，总有 $\lambda_F(B)\leqslant\gamma_F(B)$. 为证本定理，只需证

$$\lambda_F(B)\geqslant\gamma_F(B). \tag{1.21}$$

不失普遍性可设 $\lambda_F(B)<\infty$. 任给 $\varepsilon>0$，由 λ_F 的定义及 $\lambda_F(B)<\infty$

可以取$\{C_i\}\subset\mathscr{I}_d$，使

$$B\subset\bigcup_i C_i,\ \sum_i\mu_F(C_i)<\lambda_F(B)+\varepsilon. \tag{1.22}$$

显然，任给$\delta>0$，任取i，必存在

$$\{C_{i,j},j=1,2,\cdots,K_i\}\subset\mathscr{I}_d,$$

$$C_{i,j}\cap C_{i,k}=\varnothing(j\neq k),\mathrm{diam}(C_{i,j})\leqslant\delta,\bigcup_{j=1}^{K_i}C_{i,j}=C_i.$$

$$\mu_F(C_i)=\sum_{j=1}^{K_i}\mu_F(C_{i,j}).$$

于是由(1.22)知

$$\bigcup_i\bigcup_{j=1}^{K_i}C_{i,j}\supset B,\mathrm{diam}(C_{i,j})\leqslant\delta,$$

$$\sum_i\sum_{j=1}^{K_i}\mu_F(C_{i,j})<\lambda_F(B)+\varepsilon,$$

更有（由$\delta>0,\varepsilon>0$可任意小）

$$\gamma_F(B)\leqslant\lambda_F(B).$$

定义 1.9 设F是$(L\text{-}S)_d$函数. 称定理1.11中的$\lambda_F(\equiv\gamma_F)$是由$F$产生的$(L\text{-}S)_d$测度，特别地，当$F(x_1,\cdots,x_d)=x_1\cdots x_d$时，称$\lambda_F$为$d$维 Lebesgue 测度，记之为$\mathscr{L}_d$. $\mathscr{L}=\mathscr{L}_1$.

定理 1.12 设F是$(L\text{-}S)_d$函数，$\lambda_F(\gamma_F)$是F按模式(Ⅰ)((Ⅱ))产生的测度，μ_F是F按模式(Ⅲ)产生的$\mathscr{B}(\mathscr{I}_d)$上的可数可加测度，则$\forall\ B\in\mathscr{B}(\mathscr{I}_d)$，总有

$$\lambda_F(B)=\gamma_F(B)=\mu_F(B). \tag{1.23}$$

证 注意定理1.11，为证定理1.12，只需证

$$\lambda_F(B)=\mu_F(B),\forall\ B\in\mathscr{B}(\mathscr{I}_d). \tag{1.24}$$

但是由定理1.2知$\sigma(\lambda_F)$是σ代数，$\lambda_F|_{\sigma(\lambda_F)}$是可数可加测度，因此为证(1.24)，只需证

(1) $\lambda_F(B)=\mu_F(B),\forall\ B\in\mathscr{I}_d$; (1.25)

(2) $\mathscr{I}_d\subset\sigma(\lambda_F)$.

先证(1). $\forall\ B\in\mathscr{I}_d,B_n\in\mathscr{I}_d$,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supset B,$$

由于 μ_F 是 $\mathscr{B}(\mathscr{I}_d)$ 上的可数可加测度，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(B_n) \geqslant \mu_F(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \geqslant \mu_F(B).$$

因此，$\lambda_F(B) \geqslant \mu_F(B)$. 而 $\lambda_F(B) \leqslant \mu_F(B)$ 显然成立，所以

$$\lambda_F(B) = \mu_F(B) \quad (\forall\ B \in \mathscr{I}_d).$$

再证(2). $\forall\ A \in \mathscr{I}_d, B_1 \subset A, B_2 \subset A^c$（$A^c$ 表 A 之补集），必有

$$A^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \{A_k, k \geqslant 0\} \subset \mathscr{I}_d,$$

$\{A_k\}$ 两两不交，其中 $A_0 = A$.

$$\forall\ \{C_n, n \geqslant 1\} \subset \mathscr{I}_d, \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \supset B_1 \cup B_2,$$

必有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(C_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(C_n \cap \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mu_F(C_n \cap A_k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(C_n A_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F(C_n A_k) \\ &\geqslant \lambda_F(B_1) + \lambda_F(B_2),\end{aligned}$$

（因为 $C_n A_k \in \mathscr{I}_d, n \geqslant 1, k \geqslant 0, \{C_n A_k, k \geqslant 0\}$ 两两不交，$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n A_0 \supset B_1$，$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} C_n A_k \supset B_2$）. 所以

$$\lambda_F(B_1 \cup B_2) \geqslant \lambda_F(B_1) + \lambda_F(B_2).$$

而 $\lambda_F(B_1 \cup B_2) \leqslant \lambda_F(B_1) + \lambda_F(B_2)$

是显然的，故

$$\lambda_F(B_1 \cup B_2) = \lambda_F(B_1) + \lambda_F(B_2).$$

这就证明了 $A \in \sigma(\lambda_F)$. 定理证毕.

定义 1.10 设 F 是 $(L\text{-}S)_d$ 函数，则称定理 1.12 中的 μ_F（$= \lambda_F|_{\mathscr{B}(\mathscr{I}_d)} = \gamma_F|_{\mathscr{B}(\mathscr{I}_d)}$）为由 F 产生的 $(L\text{-}S)_d$ 可数可加测度. 当

$F(x_1,\cdots,x_d)=x_1\cdots x_d$ 时，由 F 产生的$(L\text{-}S)_d$ 可数可加测度称为 d 维可数可加 Lebesgue 测度.

注意：定义 1.9 中所定义的 d 维 Lebesgue 测度 $\mathscr{L}_d$ 即通常的$\mathbb{R}^d$中的 Lebesgue 外测度（定义在$\mathbb{R}^d$中一切子集上），而定义 1.10 中的 d 维可数可加 Lebesgue 测度即是 $\mathscr{L}_d$ 在$\mathbb{R}^d$中一切 Borel 集合上的局限.

§2 Hausdorff 测度与 Hausdorff 维数

本节中，Φ 恒表满足下列条件的函数 φ 所成的类：

(1) $\varphi:(0,\delta)\to(0,\infty)\qquad(\delta>0)$；

(2) φ 是单增，右连续的，且 $\varphi(0+)=0$.

再记

$$\Phi_0=\{\varphi\in\Phi:\exists\ K \text{ 使 } \varphi(2s)/\varphi(s)\leqslant K,\forall\ 0<s<\frac{\delta}{2}\},$$

即是，Φ_0 是 Φ 中的“限制增长”的子函数类.

本节恒设(E,ρ)是一距离空间，ρ 是 E 上的一个距离，$\mathscr{G}$ 是由 ρ 决定的距离拓扑，$\mathscr{F}$ 表 E 中全体闭集，$\mathscr{G}_\delta$、$\mathscr{F}_\sigma$ 的意义如 §1. Φ 中的函数 φ 皆称为测度函数，并经常补定义 $\varphi(0)=0$.

定义 2.1 任取 $\varphi\in\Phi$，$B\subset E$，定义

$$\varphi\text{-}m(B)=\lim_{\epsilon\downarrow 0}\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(\operatorname{diam}(G_i)):\begin{array}{c}G_i\in\mathscr{G},\\ \operatorname{diam}(G_i)\leqslant\epsilon,\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i\supset B\end{array}\right\},\tag{2.1}$$

称 $\varphi\text{-}m(B)$是集合 B 关于测度函数 φ 的 Hausdorff 测度，特别地称 $s^\alpha\text{-}m(B)$为 B 的 α 维 Hausdorff 测度$(\alpha>0)$. 称 $\mathscr{G}$ 为覆盖基.

注意：$\tau^\varphi(G)\equiv\varphi(\operatorname{diam}G)\ (G\in\mathscr{G})$是 $\mathscr{G}$ 上的预测度，而(2.1)中定义的 $\varphi\text{-}m(B)$正是由预测度 τ^φ 按模式(Ⅰ)产生的测度，所以 $\varphi\text{-}m$

确是一个测度. 利用定理 1.9 可知:

定理 2.1 Hausdorff 测度 $\varphi\text{-}m$ 是正则的、$\mathscr{G}_\delta$ 正则的距离测度,E 中的全体 Borel 集 $\sigma(\mathscr{G})\subset\sigma(\varphi\text{-}m)$,而且对任一个具有有限 Hausdorff 测度的集合 B,$\varphi\text{-}m(B)<\infty$,均有 $C\in\mathscr{F}_\sigma$ 使 $B\supset C$,且 $\varphi\text{-}m(B)=\varphi\text{-}m(C)$.

关于 Hausdorff 测度,具有各种等价定义,下面的定理即回答了此论断.

定理 2.2 任取 $\varphi\in\Phi$,$B\subset E$,对任一 $\varepsilon>0$,令

$$\mu_\varepsilon^\varphi(B)=\inf\left\{\sum_{i=1}^\infty\varphi(\mathrm{diam}G_i):G_i\in\mathscr{G},\mathrm{diam}(G_i)\leqslant\varepsilon,\bigcup_{i=1}^\infty G_i\supset B\right\};$$

$$\gamma_\varepsilon^\varphi(B)=\inf\left\{\sum_{i=1}^\infty\varphi(\mathrm{diam}F_i):F_i\in\mathscr{F},\mathrm{diam}(F_i)\leqslant\varepsilon,\bigcup_{i=1}^\infty F_i\supset B\right\};$$

$$\sigma_\varepsilon^\varphi(B)=\inf\left\{\sum_{i=1}^\infty\varphi(\mathrm{diam}B_i):B_i\subset E,\mathrm{diam}(B_i)\leqslant\varepsilon,\bigcup_{i=1}^\infty B_i\supset B\right\};$$

$$\tau_\varepsilon^\varphi(B)=\inf\left\{\sum_{i=1}^\infty\varphi(\mathrm{diam}B_i):B_i\subset E,\mathrm{diam}(B_i)\leqslant\varepsilon,\bigcup_{i=1}^\infty B_i=B\right\},$$

则对任何 $\beta>\varepsilon$,有

$$\mu_\beta^\varphi(B)\leqslant\gamma_\varepsilon^\varphi(B)=\sigma_\varepsilon^\varphi(B)=\tau_\varepsilon^\varphi(B)\leqslant\mu_\varepsilon^\varphi(B),\tag{2.2}$$

从而

$$\begin{aligned}\varphi\text{-}m(B)&=\lim_{\varepsilon\downarrow0}\mu_\varepsilon^\varphi(B)=\lim_{\varepsilon\downarrow0}\gamma_\varepsilon^\varphi(B)\\&=\lim_{\varepsilon\downarrow0}\sigma_\varepsilon^\varphi(B)=\lim_{\varepsilon\downarrow0}\tau_\varepsilon^\varphi(B).\end{aligned}\tag{2.3}$$

证明请见[185]p. 51.

定义 2.2 设 $\mathscr{E}$ 是 E 的子集系,$B\subset E$. 称 $\{B_i\}$ 是 B 的覆盖:若 $\bigcup_i B_i\supset B$;称 B 的覆盖 $\{B_i\}$ 为 $\mathscr{E}$ 覆盖:若 $B_i\in\mathscr{E}$;称 B 的 $\mathscr{E}$ 覆盖 $\{B_i\}$ 为 $\mathscr{E}_\eta$ 覆盖:若 $\forall\ i$,$\mathrm{diam}(B_i)\leqslant\eta$;称 E 的子集系 $\mathscr{E}$ 是 E 的一个覆盖基:若 $\forall\ \eta>0$,$\forall\ A\subset E$,都存在 A 的一个 $\mathscr{E}_\eta$ 覆盖.

定理 2.2 说明:无论取 $\mathscr{G}$ 或 $\mathscr{F}$,或者 E 的一切子集 $\mathscr{H}$ 作覆盖基,定义出的 Hausdorff 测度皆一样.

定义 2.3 $\forall\ B\subset E$,定义

$$\dim(B)=\inf\{\alpha>0; s^{\alpha}\text{-}m(B)=0\}$$

为 B 的 Hausdorff 维数.

命题 2.1 对任何 $B\subset E$,总有

(1) $\beta>\alpha, s^{\alpha}\text{-}m(B)<\infty\Rightarrow s^{\beta}\text{-}m(B)=0$;

(2) $\alpha>\dim(B)\Rightarrow s^{\alpha}\text{-}m(B)=0$;

(3) $\alpha<\dim(B)\Rightarrow s^{\alpha}\text{-}m(B)=\infty$;

(4) $\alpha=\dim(B)\Rightarrow 0\leqslant s^{\alpha}\text{-}m(B)\leqslant\infty$;

(5) $$\begin{aligned}\dim(B)&=\inf\{\alpha>0: s^{\alpha}\text{-}m(B)=0\}\\&=\inf\{\alpha>0: s^{\alpha}\text{-}m(B)<\infty\}\\&=\sup\{\alpha>0: s^{\alpha}\text{-}m(B)=\infty\}\\&=\sup\{\alpha>0: s^{\alpha}\text{-}m(B)>0\}.\end{aligned}$$

证 由 Hausdorff 测度及 Hausdorff 维数的定义直接验证,即可得本命题.

定义 2.4 若 $0<\varphi\text{-}m(B)<\infty$,则称 φ 是 B 的 Hausdorff 确切测度函数,简称确切测度函数. 若 $0<s^{\alpha}\text{-}m(B)<\infty$,则称 B 是 Hausdorff α 集,简称 α 集. 显然 α 集的确切测度函数是 $\varphi(s)=s^{\alpha}$,α 集 B 的维数 $\dim(B)=\alpha$.

命题 2.2(σ 稳定性) 对任何 $B_n\subset E\ (n=1,2,\cdots)$,总有 $\dim(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)=\sup\limits_{n\geqslant 1}\dim(B_n)$.

证 显然,

$$\dim(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)\geqslant\sup_{n\geqslant 1}\dim(B_n).$$

往证

$$\dim(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)\leqslant\sup_{n\geqslant 1}\dim(B_n).$$

不失普遍性可设

$$\sup_{n\geqslant 1}\dim(B_n)<\infty.$$

$$\forall\ \varepsilon>0,\ 令\ \alpha_n=\dim(B_n),\ \alpha=\sup_{n\geqslant 1}\alpha_n.$$

由命题 2.1(2)得

$$s^{\alpha+\varepsilon}\text{-}m(B_n)=0 \qquad (n\geqslant 1).$$

由 Hausdorff 测度是距离测度得知

$$s^{\alpha+\varepsilon}\text{-}m(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}[s^{\alpha+\varepsilon}\text{-}m(B_n)]=0,$$

从而

$$\dim(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)\leqslant\alpha+\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 可任意小得知命题 2.2 成立.

命题 2.3 设 B 是 E 中任一可数子集,则 $\dim(B)=0$.

证 由于单点集的维数是 0,再用命题 2.2 立即得命题 2.3.

下面我们考虑 $E=\mathbb{R}^d$ 是 d 维欧氏空间,ρ 是通常的欧氏距离.

对任何 $a\in\mathbb{R}^1, x\in\mathbb{R}^d, B\subset\mathbb{R}^d$,令

$$aB=\{y=ax:x\in B\},$$

$$x+B=\{y=x+w:w\in B\}.$$

再令 $\mathscr{B}_d$ 是$\mathbb{R}^d$中全体开球 $B(x,r)$(球心 $x\in\mathbb{R}^d$,$r>0$ 是半径),

$$\Gamma^*=\{C^*(n,k)=\{x\in\mathbb{R}^d:k_i2^{-n}\leqslant x_i<(k_i+1)2^{-n},i=1,\cdots,d\}$$
$$:n\in\mathbb{N},k_i\in\mathbb{Z},i=1,2,\cdots,d\}$$

是$\mathbb{R}^d$中全体 d 维二进制区间,而令

$$C^{**}(n,k)=\left\{x\in\mathbb{R}^d:\frac{k_i}{2}\cdot 2^{-n}\leqslant x_i<\left(\frac{k_i}{2}+1\right)2^{-n},i=1,\cdots,d\right\},$$

$$\Gamma^{**}=\{C^{**}(n,k):n\in\mathbb{N},k=(k_1,\cdots,k_d),k_i\in\mathbb{Z}\}$$

为$\mathbb{R}^d$中全体 d 维半二进制区间.

定义 2.5 设 μ_1 和 μ_2 皆为定义在 $\mathscr{E}$ 上的集函数,若对任何 $B\in\mathscr{E}$,有 $\mu_1(B)\leqslant\lambda\mu_2(B)$(其中 λ 是一正常数),则记之为 $\mu_1\overset{(n)}{\leqslant}\mu_2$. $\mu_1\overset{(n)}{=}\mu_2$ 意即 $\mu_1\overset{(n)}{\leqslant}\mu_2$ 且 $\mu_2\overset{(n)}{\leqslant}\mu_1$.

命题 2.4 设 $\mathscr{B}_d$、Γ^*、Γ^{**} 如前定义. 任取 $\varphi\in\Phi_0$, $B\subset\mathbb{R}^d$,令

$$\varphi\text{-}m_b(B)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(\operatorname{diam}B_i):B_i\in\mathscr{B}_d,$$
$$\operatorname{diam}(B_i)\leqslant\varepsilon,\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\supset B\}, \qquad (2.4)$$

$$\varphi\text{-}m^*(B)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(\operatorname{diam}B_i):B_i\in\Gamma^*,$$

$$\operatorname{diam}(B_i)\leqslant\varepsilon,\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\supset B\},\tag{2.5}$$

$$\varphi\text{-}m^{**}(B)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(\operatorname{diam}B_i):B_i\in\Gamma^{**},$$

$$\operatorname{diam}(B_i)\leqslant\varepsilon,\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\supset B\},\tag{2.6}$$

则

$$\varphi\text{-}m\overset{(\approx)}{=}\varphi\text{-}m_b\overset{(\approx)}{=}\varphi\text{-}m^*\overset{(\approx)}{=}\varphi\text{-}m^{**},\tag{2.7}$$

从而(因为 $\varphi(s)=s^\alpha\in\Phi_0$)

$$\begin{aligned}\dim(B)&=\inf\{\alpha>0:s^\alpha\text{-}m(B)<\infty\}\\&=\inf\{\alpha>0:s^\alpha\text{-}m_b(B)<\infty\}\\&=\inf\{\alpha>0:s^\alpha\text{-}m^*(B)<\infty\}\\&=\inf\{\alpha>0:s^\alpha\text{-}m^{**}(B)<\infty\},\end{aligned}\tag{2.8}$$

即是,在 Hausdorff 维数的定义中,其覆盖基,无论是 $\mathscr{G}$(全体开集)、$\mathscr{F}$(全体闭集)、$\mathscr{H}$(全体子集)、$\mathscr{B}_d$(全体开球)、Γ^*(全体二进制区间)或 Γ^{**}(全体半二进制区间),所定义出来的维数都是一样的.

证 因为对任意非空集合 B_i 满足 $\operatorname{diam}(B_i)\leqslant\varepsilon$,必存在开球 $B(x,\varepsilon)\supset B_i(x\in B_i)$,故注意定理 2.2 及 φ 满足"限制增长"条件可得

$$\varphi\text{-}m(B)\overset{(\approx)}{=}\varphi\text{-}m_b(B).$$

仿之可证 $\varphi\text{-}m(B)\overset{(\approx)}{=}\varphi\text{-}m^*(B)\overset{(\approx)}{=}\varphi\text{-}m^{**}(B)$.

命题 2.5 任取 $B\subset\mathbb{R}^d,x\in\mathbb{R}^d,\lambda>0$,总有

(1) $s^\alpha\text{-}m(x+B)=s^\alpha\text{-}m(B),\dim(x+B)=\dim(B)$;

(2) $s^\alpha\text{-}m(\lambda B)=\lambda^\alpha[s^\alpha\text{-}m(B)]$,

$\dim(\lambda B)=\dim(B)$;

(3) $0\leqslant\dim(B)\leqslant d,\dim(\mathbb{R}^d)=d$;

(4) B 有内点 $\Rightarrow\dim(B)=d$.

证　(1)和(2)显然成立.

(3)　只证 $\dim(\mathbb{R}^d)=d$ 即可. 令 $C^*(n,k)$ 是前面定义的 n 阶(即边长为 2^{-n})二进制区间. 由于$\mathbb{R}^d$中每一个 n 阶二进制区间的直径为 $r_d\cdot 2^{-n}$($r_d>0$ 为常数),而每一个 n 阶二进制区间可表为 2^{dl}个两两不交的 $n+l$ 阶二进制区间之并,所以

$$s^\alpha\text{-}m^*(C^*(n,k))\leqslant\lim_{l\to\infty}2^{dl}\cdot(r_d\cdot 2^{-(n+l)})^\alpha$$
$$<\infty\qquad(\text{当 }\alpha>d).$$

因此 $\dim(C^*(n,k))\leqslant d$.

令 $\Gamma^*(n)$是全部 n 阶的二进制区间. 由于 $C^*(n,k)$可以表为 2^{ld}个两两不交的 $n+l$ 阶的二进制区间之并,记之为

$$C^*(n,k)=\bigcup_{i=1}^{2^{ld}}C_i^{(l+n)},C_i^{(l+n)}\in\Gamma^*(n+l).$$

所以$\forall\ \varepsilon>0$,有

$$s^{d-\varepsilon}\text{-}m^*(C^*(n,k))$$
$$\geqslant\lim_{l\to\infty}\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam}C_i)^{d-\varepsilon}:C_i\in\Gamma^*(n+l),\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i\supset C^*(n,k)\right\}$$
$$\geqslant\lim_{l\to\infty}2^{ld}(r_d2^{-(n+l)})^{d-\varepsilon}=\infty.$$

所以 $\dim(C^*(n,k))\geqslant d$. 总之 $\dim(C^*(n,k))=d$.

再利用命题 2.2,得 $\dim(\mathbb{R}^d)=d$.

(4)　若 B 有内点,则必存在 $C^*(n,k)\subset B$,故 $d=\dim(\mathbb{R}^d)\geqslant\dim(B)\geqslant\dim(C^*(n,k))=d$,因此 $\dim(B)=d$.

下面我们简单介绍一下 $\dim(B)$的计算方法.

注意:由 $\dim(B)=\sup\{\alpha>0:s^\alpha\text{-}m(B)>0\}$得知

$$s^\alpha\text{-}m(B)>0\Rightarrow\dim(B)\geqslant\alpha.$$

所以,若找出了一个 $\alpha>0$,使 $s^\alpha\text{-}m(B)>0$,就找出了 $\dim(B)$的一个下界 α.

仿之,由 $\dim(B)=\inf\{\alpha>0:s^\alpha\text{-}m(B)=0\}$得知

$$s^\alpha\text{-}m(B)=0\Rightarrow\dim(B)\leqslant\alpha.$$

所以,若找出了一个 $\alpha>0$ 使 $s^\alpha\text{-}m(B)=0$,就找出了 $\dim(B)$的一

个上界 α.

总之，找出 $s^\alpha\text{-}m(B)>0$ 的充分必要条件，对估计 $\dim(B)$ 是很有用的. 下面介绍几种方法.

命题 2.6 设 $\varphi\in\Phi_0, c>0, \delta_0>0, B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$，$\mu$ 是 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 上的可数可加的概率测度，且 μ 的支撑含于 B. 若对半径 $\leqslant\delta_0$ 的一切开球 $B(x,r)(r\leqslant\delta_0)$ 均有

$$\mu(B(x,r))\leqslant c\varphi(2r)\quad(r\leqslant\delta_0),\tag{2.9}$$

则 $\varphi\text{-}m(B)>0$（上述 $2\delta_0$ 在 φ 的定义域 $(0,\delta)$ 中).

证 设 $\{B(x_i,r_i),i\geqslant1\}$ 是 B 的任一覆盖，则有

$$\begin{aligned}1=\mu(B)&\leqslant\mu\Big(\bigcup_{i\geqslant1}B(x_i,r_i)\Big)\leqslant\sum_{i\geqslant1}\mu(B(x_i,r_i))\\&\leqslant c\sum_{i\geqslant1}\varphi(2r_i),\end{aligned}$$

所以

$$\varphi\text{-}m(B)>0.$$

定义 2.6 设 μ 是定义在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 上的可数可加的有限测度，$\varphi\in\Phi_0$，称

$$\overline{D}_{\mu,\varphi}(x)\equiv\overline{\lim_{r\downarrow0}}\,\mu(B(x,r))/\varphi(2r),\tag{2.10}$$

$$\underline{D}_{\mu,\varphi}(x)\equiv\underline{\lim_{r\downarrow0}}\,\mu(B(x,r))/\varphi(2r)\tag{2.11}$$

分别为 μ 在 x 处关于 φ 的上、下球密度.

定理 2.3（密度定理） 设 μ、φ、$\overline{D}_{\mu,\varphi}(x)$ 如定义 2.6 中所定义. 则对任何 $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$，均有

$$\begin{aligned}C_1\varphi\text{-}m(B)\inf_{x\in B}\{\overline{D}_{\mu,\varphi}(x)\}&\leqslant\mu(B)\\&\leqslant C_2\varphi\text{-}m(B)\sup_{x\in B}\{\overline{D}_{\mu,\varphi}(x)\}\\&(C_1,C_2\text{ 是正数且不依赖 }B).\end{aligned}\tag{2.12}$$

证明可参见[186].

当定理 2.3 中的 $\varphi(s)=s^\alpha(\alpha>0)$ 时，定理 2.3 的结论还可以加强，即(2.12)中的正的常数 C_1 和 C_2 还更明确.

定理 2.3′（密度定理） 设 $\varphi(s)=s^\alpha$，μ 和 $\overline{D}_{\mu,\varphi}(x)$ 如定义 2.6

中所定义. 则对任何 $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, 当 $0<\inf\limits_{x\in B}D_{\mu,\varphi}(x)=C_2$, $\sup\limits_{x\in B}\overline{D}_{\mu,\varphi}(x)=C_1<\infty$时, 总有

(a) $s^\alpha\text{-}m(B)\geqslant\mu(B)/C_1$;

(b) $s^\alpha\text{-}m(B)\leqslant 2^\alpha\mu(\mathbb{R}^d)/C_2$.

证明可参见[58]命题 4.9.

定理 2.4 设 $\varphi:(0,\delta)\to(0,\infty)$, $\varphi\in\Phi_0$, $F\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, $0<\varphi\text{-}m(F)<\infty$. 则存在一个常数 $b>0$ 及紧子集 $B\subset F$, 满足:

(1) $0<\varphi\text{-}m(B)<\infty$;

(2) $\varphi\text{-}m(B\cap B(x,r))\leqslant b\varphi(2r)$, (2.13)

$(\forall\ x\in\mathbb{R}^d, 0<2r<\delta)$.

证 令 $\mu(A)=\varphi\text{-}m(F\cap A)$ $(\forall\ A\subset\mathbb{R}^d)$,

$$F_1=\{x\in\mathbb{R}^d: \overline{\lim_{r\downarrow 0}}\,\mu(B(x,r))/\varphi(2r)>\frac{C_1}{2}\},$$

其中 C_1 如定理 2.3 所定义. 则由定理 2.3 得

$$\varphi\text{-}m(F_1)\leqslant\frac{\mu(F_1)}{C_1\inf\limits_{x\in F_1}\overline{\lim\limits_{r\downarrow 0}}\dfrac{\mu(B(x,r))}{\varphi(2r)}}\leqslant\frac{\mu(F_1)}{2}\leqslant\frac{1}{2}\varphi\text{-}m(F),$$

所以

$$\varphi\text{-}m(F-F_1)\geqslant\frac{1}{2}\varphi\text{-}m(F)>0,$$

而且

$$\overline{\lim_{r\downarrow 0}}\frac{\mu(B(x,r))}{\varphi(2r)}\leqslant\frac{C_1}{2}\quad(x\in F-F_1). \tag{2.14}$$

$\forall\,\varepsilon>0$, 由 Egoroff 定理得知: 存在紧子集 $B\subset F-F_1$, 及 $r_0\in(0,\frac{\delta}{2})$, 使得

$$\infty>\varphi\text{-}m(B)>0; \tag{2.15}$$

$$\frac{\mu(B(x,r))}{\varphi(2r)}\leqslant\frac{C_1}{2}+\varepsilon\quad\begin{pmatrix}x\in B\\ r\in(0,r_0)\end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

但是$\varphi(\cdot)$、$\mu(\cdot)$单增，所以

$$\frac{\mu(B(x,r))}{\varphi(2r)}\leqslant\frac{\mu(\mathbb{R}^d)}{\varphi(r_0)}\quad\left(\begin{matrix}x\in\mathbb{R}^d\\ \frac{1}{2}\delta>r>\frac{r_0}{2}\end{matrix}\right).\tag{2.17}$$

而对任何$x\in B$，分两种情况讨论：

(a)若$B\cap B(x,r)=\varnothing$，则

$$\varphi\text{-}m(B\cap B(x,r))=0.\tag{2.18}$$

(b)若$B\cap B(x,r)\neq\varnothing$，取$y\in B\cap B(x,r)$，则有

$$B\cap B(x,r)\subset B\cap B(y,2r).$$

因此，由(2.16)及$\varphi\in\Phi_0$满足限制增长条件得

$$\begin{aligned}\frac{\varphi\text{-}m(B\cap B(x,r))}{\varphi(2r)}&\leqslant\frac{\varphi\text{-}m(B\cap B(y,2r))}{\varphi(2r)}\\&\leqslant\frac{\mu(B(y,2r))}{\varphi(4r)}\frac{\varphi(4r)}{\varphi(2r)}\\&\leqslant(\frac{C_1}{2}+\varepsilon)K\quad(2r\in(0,r_0)).\end{aligned}\tag{2.19}$$

取$b=\max\{\mu(\mathbb{R}^d)/\varphi(r_0),\frac{C_1}{2}+\varepsilon,K(\frac{C_1}{2}+\varepsilon)\}$，由(2.16)、(2.17)、(2.18)、(2.19)及

$$\varphi\text{-}m(B\cap B(x,r))\leqslant\mu(B(x,r))$$

则得

$$\varphi\text{-}m(B\cap B(x,r))\leqslant b\varphi(2r)\quad(x\in\mathbb{R}^d,2r\in(0,\delta)).$$

定理 2.4 证毕.

定理 2.5　设$F\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$，$s^\alpha\text{-}m(F)>0$，则存在紧集$K\subset F$及$b>0$，使

$$0<s^\alpha\text{-}m(K)<\infty,\ s^\alpha\text{-}m(K\cap B(x,r))\leqslant br^\alpha(x\in\mathbb{R}^d,r\geqslant0).$$

证明可参见[58]p. 62—64.

定理 2.6(Frostman 引理)　设B是$\mathbb{R}^d$中紧子集，$\varphi\in\Phi_0$，则下列二条件等价：

(1)　$\varphi\text{-}m(B)>0$（可为$+\infty$）；

(2) 存在一个支撑含于 B 的 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 上的可数可加的概率测度 γ 及正的常数 C 使：

$\gamma(B(x,r))\leqslant C\varphi(2r)$ $(\forall\ x\in\mathbb{R}^d, 2r\in(0,\delta), (0,\delta)$ 是 φ 的定义域.).

证 (1)⇒(2). 设(1)成立，且 $\infty>\varphi\text{-}m(B)>0$. 令 $\gamma(A)=(\varphi\text{-}m(B\cap A))/(\varphi\text{-}m(B))$ $(\forall\ A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$, $C=b/(\varphi\text{-}m(B))$, b 如(2.13)中所定义，则由定理 2.4 即得本定理中的(2). 若 $\varphi\text{-}m(B)=\infty$，则先用定理 2.5，然后再仿上做一次推理仍知(2)成立. 总之，(1)⇒(2).

(2)⇒(1). 直接由命题 2.6 即可得(2)⇒(1). 定理证毕.

例 2.1 令 $B_0=[0,1]$, $f_1(x)=\dfrac{1}{3}x$, $f_2(x)=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$. $C_n=f_1(C_{n-1})\cup f_2(C_{n-1})$ $(n\geqslant1)$，称 $C\equiv\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}C_n$ 为 Cantor 三分集.

显然，C_n 是 2^n 个长度为 $(\dfrac{1}{3})^n$ 的 $[0,1]$ 中的两两不交的闭区间之并，$\{C_n\}$ 单调下降，C 是紧集.

下面我们计算 C 的 $\dim(C)=\alpha=\ln2/\ln3$.

设 $C_n=\bigcup\limits_{k=1}^{2^n}I(n,k)$, $\{I(n,k), 1\leqslant k\leqslant 2^n\}$ 两两不交，$\mathrm{diam}(I(n,k))=(\dfrac{1}{3})^n$, $I(n,k)$ 是 $[0,1]$ 中的闭区间 $(1\leqslant k\leqslant 2^n)$, $n\geqslant0$.

$\forall\ \varepsilon>0$，当 $n\geqslant[\ln\dfrac{1}{\varepsilon}/\ln3]$ 时，$\mathrm{diam}(I(n,k))=(\dfrac{1}{3})^n\leqslant\varepsilon$，故 $\{I(n,k), 1\leqslant k\leqslant 2^n\}$ 是 C_n 更是 C 的一个 ε 覆盖，故

$$s^\alpha\text{-}m(C)\leqslant\sum_{k=1}^{2^n}(\mathrm{diam}(I(n,k)))^\alpha=2^n=(\frac{1}{3^n})^\alpha=1, \quad (2.20)$$

从而 $\dim(C)\leqslant\alpha$.

往证 $\dim(C)\geqslant\alpha$. 为此，只需证明：

$$s^\alpha\text{-}m(C)>0.$$

用 Frostman 引理，只需证明存在一个支撑含于 C 的 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$ 上的可数可加的概率测度 γ，使

$\gamma(I)\leqslant\beta(\mathrm{diam}(I))^{\alpha}$　(I 是[0,1]中的任一闭区间,β 是不依赖 I 的正常数).

取 γ_n 是 C_n 上的均匀分布,$\gamma_n(C_n)\equiv 1$,($\forall\ n\geqslant 1$). 则$\{\gamma_n\}$必有弱收敛子列$\{\gamma_{n_j}\}$,$\gamma_{n_j}\xrightarrow{w}\gamma$,$\gamma$ 为支撑含于 C 的 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$上的可数可加的概率测度. 易证:

$$\gamma_n(I(n,k))=\frac{1}{2^n}=\left(\frac{1}{3^n}\right)^{\alpha}=(\mathrm{diam}(I(n,k)))^{\alpha},$$

$$\gamma_m(I(n,k))=(\mathrm{diam}(I(n,k))^{\alpha}\quad(m\geqslant n).$$

令 $m\to\infty$ 可证

$$\gamma(I(n,k))=(\mathrm{diam}(I(n,k)))^{\alpha}\quad(n\geqslant 1,1\leqslant k\leqslant 2^n).$$

任取闭区间 I,$\mathrm{diam}(I)<1$,总存在 n,使

$$3^{-(n+1)}\leqslant\mathrm{diam}(I)<3^{-n},$$

因此,由$\{I(n,k)\}$的构造(每两个不同的 $I(n,k)$,$I(n,j)$皆不交,且它们之间的距离$\geqslant(\frac{1}{3})^n$)得知,I 只能含于某一个 $I(n,k)$之中,所以

$$\begin{aligned}\gamma(I)&\leqslant\gamma(I(n,k))\\&=\frac{1}{2^n}=\left(\frac{1}{3^n}\right)^{\ln 2/\ln 3}\leqslant(3\mathrm{diam}(I))^{\alpha},\end{aligned}$$

因此 $s^{\alpha}\text{-}m(C)>0$,从而 $\dim(C)\geqslant\alpha$. 总之 $\dim(C)=\alpha$.

下面我们证明 $s^{\alpha}\text{-}m(C)=1$. 事实上,由定理 1.2 有

$$s^{\alpha}\text{-}m(C)=\lim_{n\to\infty}s^{\alpha}\text{-}m(C_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}s^{\alpha}\text{-}m(I(n,k)).\quad(2.21)$$

而由定理 2.3′(a)有

$$s^{\alpha}\text{-}m(I(n,k))\geqslant\frac{\gamma(I(n,k))}{\sup\limits_{x\in I(n,k)}\overline{\lim\limits_{r\downarrow 0}}\dfrac{\gamma(B(x,r))}{(2r)^{\alpha}}}.\quad(2.22)$$

但是,若令 $I(n,k)=[x_{n,k},x_{n,k}+(\frac{1}{3})^n]$,则有

$$\sup_{x\in I(n,k)}\overline{\lim_{r\downarrow 0}}\frac{\gamma(B(x,r))}{(2r)^{\alpha}}$$

$$=\overline{\lim_{r\downarrow 0}}\gamma([x_{n,k},x_{n,k}+2r])/(2r)^{\alpha}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{\gamma([x_{n,k},x_{n,k}+(\frac{1}{3})^{m}])}{(\frac{1}{3})^{m\alpha}}. \tag{2.23}$$

而 $x_{n,k}$ 是 $I(n,k)$ 的左端点，所以对任何 $m\geqslant n$，存在 j_m，使 $x_{n,k}$ 是 $I(m,j_m)$ 的左端点，从而

$$\gamma([x_{n,k},x_{n,k}+(\frac{1}{3})^{m}])=\gamma_{m}([x_{n,k},x_{n,k}+(\frac{1}{3})^{m}])$$

$$=(\frac{1}{3})^{m}/2^{m}\cdot(\frac{1}{3})^{m}=\frac{1}{2^{m}}. \tag{2.24}$$

以(2.24)代入(2.23)得

$$\sup_{x\in I(n,k)}\overline{\lim_{r\downarrow 0}}\frac{\gamma(B(x,r))}{(2r)^{\alpha}}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{(\frac{1}{2})^{m}}{(\frac{1}{3})^{m\alpha}}=1. \tag{2.25}$$

以(2.25)代入(2.22)后再代入(2.21)得

$$s^{\alpha}\text{-}m(C)\geqslant 1. \tag{2.26}$$

由(2.20)及(2.26)得 $s^{\alpha}\text{-}m(C)=1$.

§3 Packing 测度与 Packing 维数

第 2 节中所定义的 Hausdorff 测度，是用所谓“最经济”的覆盖所产生的. 在本节中，我们将介绍另一种测度—— Packing 测度，它是由“最有效”的填充(Packing)所产生的.

设(E,ρ)是一个距离空间，ρ 是 E 上的一个距离，$\mathscr{E}$ 是 E 的一个子集系. Φ、Φ_0 如§2 中所定义的全体测度函数系、全体“限制增长”的测度函数系. $\mathscr{G}$、$\mathscr{F}$、$\mathscr{H}$ 分别为 E 中全体开集、全体闭集、全体子集.

定义 3.1 设$B\subset E$，$b(E)$是 E 的全体有界子集. 称 $\mathscr{R}$ 是 B

的一个 Packing：如果 $\mathscr{R}\subset b(E)$，$\mathscr{R}$ 中的集合两两不交，且$\forall C\in\mathscr{R}$ 都有 $\overline{B}\cap\overline{C}\neq\varnothing$，其中 $\overline{B}$、$\overline{C}$ 分别表 B、C 的闭包.

如果 $\mathscr{E}$ 是 E 的一个子集系，$\mathscr{R}$ 是 B 的一个 Packing，$\mathscr{E}\supset\mathscr{R}$，则称 $\mathscr{R}$ 是 B 的一个 $\mathscr{E}$-Packing；如果 B 的一个 packing $\mathscr{R}$ 中的每一个集合的直径皆$\leqslant\eta$，则称 $\mathscr{R}$ 是 B 的一个 Packing(η). 若 $\mathscr{R}$ 既是 B 的 $\mathscr{E}$-Packing，又是 B 的 Packing(η)，则称 $\mathscr{R}$ 是 B 的一个 $\mathscr{E}_\eta$-Packing，$\mathscr{E}$ 是 B 的 Packing 基.

下面我们借鉴 Hausdorff 测度的方法来定义另一种 Packing 测度. 如果机械地照搬，我们对任何 $B\subset E$，任何 $\varphi\in\Phi$，任何 E 的子集系 $\mathscr{E}$，考虑对偶方法定义出的集合函数

$$\mathscr{E}\text{-}\varphi\text{-}\mathscr{P}(B)\equiv\lim_{\eta\downarrow 0}\sup\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(\mathrm{diam}(B_i)):\{B_i\}\text{是 }B\text{ 的 }\mathscr{E}_\eta-\text{Packing}\Big\}. \tag{3.1}$$

如果对Packing 基 $\mathscr{E}$ 不加任何限制，(3.1)定义的过于广泛的集合函数 $\mathscr{E}$-φ-$\mathscr{P}(B)$是没有什么实用意义的. 因为即使取 $B=\{x\}$ 为单点集，我们仍可找到任意多个两两不交的直径等于 $\delta>0$ 的其闭包包含 x 的集合，因此，由(3.1)定义的集合函数 $\mathscr{E}$-φ-$\mathscr{P}(\{x\})=\infty$. 所以，必须对 $\mathscr{E}$ 加以限制. 最自然的两种特殊情况是：用 $\mathscr{B}$（它是 E 中全体开球）或 $\mathscr{B}_B$（它是 E 中球心在 B 的全体开球）来替代 $\mathscr{E}$. $b(E)$表 E 中一切有界子集.

以后我们将要看到 $\mathscr{B}_B$-φ-$\mathscr{P}$ 的性质比 $\mathscr{B}$-φ-$\mathscr{P}$ 好. 所以，我们用 $\mathscr{B}_B$-φ-$\mathscr{P}$ 做定义.

注意：$\mathscr{B}$-φ-$\mathscr{P}$、$\mathscr{B}_B$-φ-$\mathscr{P}$ 一般都不是测度，而仅仅是预测度，所以定义 Packing 测度还要加工.

定义 3.2 设 $B\subset E$，$\varphi\in\Phi$，$\mathscr{B}_B$-φ-$\mathscr{P}(B)$如(3.1)所定义，由此预测度按§1 模式(Ⅰ)所产生的测度称为在 Packing 基 $\mathscr{B}_B$ 下，关于 φ 的 Packing 测度，简称 φ-Packing 测度，或更简单地（在不混淆的情况下）称为 Packing 测度，记之为 φ-$p(B)$. 即是

$$\varphi\text{-}p(B)=\inf\Big\{\sum_i(\mathscr{B}_{B_i}\text{-}\varphi\text{-}\mathscr{P}(B_i)):B_i\in bE,\bigcup_i B_i\supset B\Big\}, \tag{3.2}$$

$$\mathscr{B}_{B_i}\text{-}\varphi\text{-}\mathscr{P}(B_i)=\lim_{\eta\downarrow 0}\sup\{\sum_j\varphi(\mathrm{diam}(B_{i,j})):\{B_{i,j}\}\text{是 }B_i\text{ 的}(\mathscr{B}_{B_i})_\eta\text{-Packing}\}$$

$$=\lim_{\eta\downarrow 0}\sup\{\sum_j\varphi(\mathrm{diam}(B_{i,j})):\{B_{i,j},j\geqslant 1\}\text{是球心在 }B_i\text{ 中,半径}\leqslant\eta\text{ 的,两两不交的开球}\}. \tag{3.3}$$

本节的剩余部分,恒设 $E=\mathbb{R}^d$,ρ 是$\mathbb{R}^d$中通常的欧氏距离,$\varphi\in\Phi_c$. 仍与§2 一样,用 Γ^* 和 Γ^{**} 表$\mathbb{R}^d$中全体二进制区间和全体半二进制区间. 令 $u_n(x)$是 Γ^* 中含 x 的边长为$\frac{1}{2^n}$的唯一的那个区间,$v_n(x)$是 Γ^{**} 中的边长为$\frac{1}{2^n}$的其补集与 $u_{n+2}(x)$的距离恰为2^{-n-2}的那个半二进制区间. 注意 $u_n(x)$、$v_n(x)$都是由 n 和 x 所唯一决定的. 显然,Γ^*、Γ^{**}都是$\mathbb{R}^d$的覆盖基.

当(3.1)中的 $\mathscr{E}$ 取各种特殊集合系,如 $\mathscr{B}$,$\mathscr{B}_B$,Γ_B^*,Γ_B^{**} 时,我们得相应的预测度,这种预测度分别用下列符号表示.

$$\begin{aligned}&\varphi\text{-}\overline{P}(B)\equiv\mathscr{B}\text{-}\varphi\text{-}\mathscr{P}(B);\\&\varphi\text{-}P(B)\equiv\mathscr{B}_B\text{-}\varphi\text{-}\mathscr{P}(B);\\&\varphi\text{-}P^*(B)\equiv\Gamma_B^*\text{-}\varphi\text{-}\mathscr{P}(B);\\&\varphi\text{-}P^{**}(B)\equiv\Gamma_B^{**}\text{-}\varphi\text{-}\mathscr{P}(B),\end{aligned}\tag{3.4}$$

其中 $\Gamma_B^*=\{u_n(x):n\in\mathbb{N},x\in B\}$,$\Gamma_B^{**}=\{v_n(x):n\in\mathbb{N},x\in B\}$.

由预测度 $\varphi\text{-}\overline{P}$、$\varphi\text{-}P$、$\varphi\text{-}P^*$、$\varphi\text{-}P^{**}$按第 1 节中模式(Ⅰ)所产生的测度(参见(3.2))分别记为:

$$\varphi\text{-}\overline{p}、\varphi\text{-}p、\varphi\text{-}p^*、\varphi\text{-}p^{**}. \tag{3.5}$$

我们取了 $\varphi\text{-}p$ 作为 Packing 测度的定义. 后面我们将要看出它比其它三个的性质要好. 下面我们将讨论上述四个预测度和上述四个测度的性质及它们的相互关系. 本节结果,可参见[208].

命题 3.1 设 $\varphi\in\Phi_0$,$\tau=\tau_\varphi$ 是(3.4)中的四个预测度中的任何一个,则

(1) τ 是单调的:$B_1\subset B_2\Rightarrow\tau(B_1)\leqslant\tau(B_2)$;

(2) τ 是半可加的:$\tau(B_1\cup B_2)\leqslant\tau(B_1)+\tau(B_2)$,而且当

$\rho(B_1,B_2)>0$ 时，上述等式成立；

(3) $\tau(\{x\})=0$ ($\forall$ $x\in\mathbb{R}^d$)；

(4) 若 B 是$\mathbb{R}^d$中有界 Lebesgue 可测集，有正的 Lebesgue 测度，且 $\varphi(s)=s^d$，则 $0<\tau_\varphi(B)<\infty$.

证 用定义立得.

命题 3.2 设 $\varphi,\psi\in\Phi_0$，τ_φ、τ_ψ 如命题 3.1，$\varphi\text{-}m$ 如 § 2 为 Hausdorff 测度，则有

(1) $\lim\limits_{s\to 0}\varphi(s)/\psi(s)=0\Rightarrow$"$\tau_\psi(B)<\infty\Rightarrow\tau_\varphi(B)=0$"；

(2) $\varphi\text{-}m\overset{(n)}{\leqslant}\tau_\varphi$.

证 用定义立得.

命题 3.3 设 $\varphi\in\Phi_0$，且 φ 连续，$\tau=\tau_\varphi$ 如命题 3.1，则对$\mathbb{R}^d$中任一有界子集 B，均存在 Borel 集合 $C\supset B$ 使 $\tau(B)=\tau(C)$. 特别地，当 $\tau=\tau_\varphi$ 是 $\varphi\text{-}P$ 或 $\varphi\text{-}\overline{P}$ 时，上述 Borel 集合 C 可取为 $\overline{B}$(B 的闭包).

证 对任何有界子集 B，先证 $\varphi\text{-}P(B)=\varphi\text{-}P(\overline{B})$；$\varphi\text{-}\overline{P}(B)=\varphi\text{-}\overline{P}(\overline{B})$. 仍用 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B}_B$ 分别表$\mathbb{R}^d$中全体开球及$\mathbb{R}^d$中全体球心在 B 的开球. 由于"$\{B_i\}\subset\mathscr{B}$，$\{B_i\}$是 B 的 Packing$\Leftrightarrow\{B_i\}\subset\mathscr{B}$，$\{B_i\}$是 $\overline{B}$ 的 Packing"，所以

$$\varphi\text{-}\overline{P}(B)=\varphi\text{-}\overline{P}(\overline{B}).$$

任给 $\varepsilon>0$，任取开球族$\{B(x_i,r_i),x_i\in\overline{B},i\geqslant 1\}$，由 $\varphi(\cdot)$的连续性，存在开球族$\{B(x_i',r_i'),x_i'\in B,i\geqslant 1\}$，使 $B(x_i',r_i')\subset B(x_i,r_i)$ $(i\geqslant 1)$，而且 $\sum\limits_i\varphi(2r_i)\leqslant(1+\varepsilon)\sum\limits_i\varphi(2r_i')$，从而

$$\varphi\text{-}P(\overline{B})\leqslant(1+\varepsilon)\varphi\text{-}P(B).$$

由 $\varepsilon>0$ 可任意小得 $\varphi\text{-}P(\overline{B})\leqslant\varphi\text{-}P(B)$. 再用命题 3.1(1)得 $\varphi\text{-}P(\overline{B})\geqslant\varphi\text{-}P(B)$. 所以

$$\varphi\text{-}P(B)=\varphi\text{-}P(\overline{B}).$$

至于对 $\varphi\text{-}P^*$，取 $C=\bigcap\limits_{n\geqslant 1}(\bigcup\{u_n(x):x\in B\})$，显然有 $C\supset B$. 若

能证 $\Gamma_C^* \subset \Gamma_B^*$，则 $\Gamma_C^* = \Gamma_B^*$，从而 $\varphi\text{-}P^*(C) = \varphi\text{-}P^*(B)$. 事实上，任取 $u_n(x) \in \Gamma_C^*$，则 $x \in C = \bigcap_{k\geq 1}(\bigcup\{u_k(y): y \in B\})$. 特别地，$x \in \bigcup\{u_n(y): y \in B\}$，所以存在 $y \in B$，使 $x \in u_n(y)$. 由含 x 的 $u_n(\cdot)$的唯一性得 $u_n(x) = u_n(y)$. 此即 $\Gamma_C^* \subset \Gamma_B^*$. 这就证明了：

$$\varphi\text{-}P^*(B) = \varphi\text{-}P^*(C).$$

类似地，可以证明存在另一 Borel 集 C' 使

$$\varphi\text{-}P^{**}(B) = \varphi\text{-}P^{**}(C').$$

命题 3.4 设 $\varphi(s) \in \Phi_0$，$\varphi(s)$连续，且$\frac{s}{\varphi(s)} \in \Phi_0$，$B \subset [0,1]$，$B$ 是无穷集，则 $\varphi\text{-}\overline{P}(B) = 0$ 或者∞.

注意：满足 $s/\varphi(s) \in \Phi_0$ 的 φ 是很多的，如 $\varphi(s) = s^\alpha (0 < \alpha < 1)$ 即是.

证 分两种情况：(a) $\overline{B}$ 的 Lebesgue 测度大于 0. 取 $\psi(s) \equiv s$，则由命题 3.1(4)知：$0 < \psi\text{-}\overline{P}(\overline{B}) < \infty$，用命题 3.3 得 $0 < \psi\text{-}\overline{P}(B) < \infty$. 再注意命题 3.2(1)得 $\varphi\text{-}\overline{P}(B) = \infty$.

(b) $\overline{B}$ 的 Lebesgue 测度为 0. 则 $\overline{B}$ 可表为：

$(0,1) - \overline{B} = \bigcup_i G_i$，其中$\{G_i\}$是两两不交的开区间列，其长度单调下降.

往证$\bigcup_i G_i$ 是可数无穷多个开区间之并，且$\inf_i \operatorname{diam}(G_i) = 0$. 事实上，若$\bigcup_i G_i$ 是有限多个开区间之并，那么，或则 $\overline{B}$ 只有有限个点，或则 $\overline{B}$ 的 Lebesgue 测度大于 0，这与 $\overline{B}$ 的假设矛盾. 若 $\inf_i \operatorname{diam}(G_i) = \beta > 0$，则 $\operatorname{diam}((0,1) - \overline{B}) = \infty$，此为不可能.

下面对情况(b)再分两种情形讨论.

(1) $\sum_i \varphi(\operatorname{diam}(G_i)) = \infty$.

$\forall\, \varepsilon > 0$，必存在 $N(\varepsilon)$，使 $i \geq N(\varepsilon)$时 $\operatorname{diam}(G_i) \leq \varepsilon$，且$\{G_i : i \geq N(\varepsilon)\}$是 $\overline{B}$ 的一个 Packing，故

$$\varphi\text{-}\overline{P}(B) = \varphi\text{-}\overline{P}(\overline{B}) \geq \inf_\varepsilon \sum_{i \geq N(\varepsilon)} \varphi(\operatorname{diam}(G_i)) = \infty.$$

(2) $\sum_i \varphi(\mathrm{diam}(G_i))<\infty$.

由于 $s/\varphi(s)\in\Phi_0$，所以可取 $s_0>0$，使 $s/\varphi(s)$ 在 $(0,s_0)$ 内单调上升，从而 $\varphi(s)/s$ 在 $(0,s_0)$ 内单调下降. 往证 $\forall\ a>0,b>0$，总有

$$\varphi(a+b)\leqslant\varphi(a)+\varphi(b). \tag{3.6}$$

由于 a,b 地位的对称性，不失普遍性可设 $a\geqslant b$. 于是再用 $\varphi(s)/s$ 的单调下降性得：

$$\varphi(a+b)\leqslant\frac{a+b}{a}\varphi(a)=\varphi(a)+b\cdot\frac{\varphi(a)}{a}\leqslant\varphi(a)+\varphi(b).$$

利用(3.6)及 φ 的连续性得知：对任何正数序列 $\{a_n\}$，总有

$$\text{“}\sum_n a_n<s_0\Rightarrow\varphi(\sum_n a_n)\leqslant\sum_n\varphi(a_n)\text{”}. \tag{3.7}$$

设 $\mathscr{R}$ 是由直径 $\leqslant\varepsilon$ 的两两不交的开区间所构成的 B 的一个 Packing（其中 $0<\varepsilon<s_0$).

令 $\mathscr{R}=\{U_j\},U_j=(u_j,v_j),G_i=(g_i,h_i)$. 由于 $\overline{U}_j\cap\overline{B}\neq\varnothing$，$\{U_j\}$ 两两不交，$\overline{B}\subset[0,1]$，$\bigcup_i G_i=(0,1)-\overline{B}$，所以每一个 G_i 至多只能与二个 U_j 相交（$\because g_i<u_i<v_i<h_i$ 是不可能的），又 $\mathrm{diam}(U_j)\leqslant\varepsilon$，所以

$$\sum_j\varphi(\mathrm{diam}(G_iU_j))\leqslant\min\{2\varphi(\varepsilon),2\varphi(\mathrm{diam}(G_i))\}. \tag{3.8}$$

而 $\overline{B}\subset[0,1]$，所以 $\mathscr{R}$ 中至多只有两个开区间与 $\mathbb{R}^1-[0,1]$ 有交，而 $\mathscr{R}$ 中任一区间的长度 $\leqslant\varepsilon$，所以在产生预测度 $\varphi\text{-}\overline{P}$ 时，其贡献 $\leqslant2\varphi(\varepsilon)$，它随 $\varepsilon\to0$ 而趋于 0. 所以，不失普遍性可设：$\forall\ U_j\in\mathscr{R}$，有 $U_j\subset(0,1)$，再注意 $\overline{B}$ 的 Lebesgue 测度为 0 可得

$$\mathrm{diam}(U_j)=\sum_i\mathrm{diam}(G_iU_j). \tag{3.9}$$

令 $N(\varepsilon)=\sup\{i:\mathrm{diam}(G_i)>\varepsilon\},\eta>\varepsilon$（从而 $N(\eta)\leqslant N(\varepsilon)$），则由(3.7)、(3.8)、(3.9)有

$$\begin{aligned}\sum_j\varphi(\mathrm{diam}(U_j))&\leqslant\sum_j\sum_i\varphi(\mathrm{diam}(U_jG_i))\\&\leqslant\sum_{i\geqslant N(\varepsilon)}2\varphi(\mathrm{diam}(G_i))+\sum_{i<N(\varepsilon)}2\varphi(\varepsilon)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=2\sum_{i\geqslant N(\varepsilon)}\varphi(\operatorname{diam}(G_i))+2N(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)\\
&\leqslant 2\sum_{i\geqslant N(\varepsilon)}\varphi(\operatorname{diam}(G_i))+2\sum_{i=N(\eta)}^{N(\varepsilon)}\varphi(\operatorname{diam}(G_i))\\
&\quad+2N(\eta)\varphi(\varepsilon).
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

在(3.10)中先令 $\varepsilon\to0$,后令 $\eta\to0$ 并注意

$$
\sum_i\varphi(\operatorname{diam}(G_i))<\infty,\quad \varphi(\varepsilon)\to0,
$$

则可得 $\varphi\text{-}\overline{P}(B)=0$.

命题 3.5 对任何 $\varphi\in\Phi_0$,恒有

$$
\varphi\text{-}P\overset{(n)}{=}\varphi\text{-}P^{**}\overset{(n)}{\leqslant}\varphi\text{-}P^{*},\varphi\text{-}P\overset{(n)}{\leqslant}\varphi\text{-}\overline{P}.
$$

证 由定义即知 $B(x,2^{-n-2})\subset v_n(x)\subset B(x,\delta2^{-n})$,其中 $\delta=\sqrt{d}$ 是单位区间(d 维)的直径.所以由 φ 满足“限制增长”条件即知:$\varphi\text{-}P\overset{(n)}{=}\varphi\text{-}P^{**}$.又因为每个半二进制的 d 维区间 $v_n(x)$ 包含了一个二进制区间 $u_{n+1}(x)$(因为 $v_n(x)$ 是 Γ^{**} 中的 n 阶半二进制 d 维区间,它总可表为 2^d 个 $n+1$ 阶二进制 d 维区间之并,此中必有一个含 x,就取这个为 $u_{n+1}(x)$),所以 $\varphi\text{-}P^{**}\overset{(n)}{\leqslant}\varphi\text{-}P^{*}$.而 $\varphi\text{-}P\overset{(n)}{\leqslant}\varphi\text{-}\overline{P}$ 是显然的,命题 3.5 证毕.

命题 3.6 设 $\varphi\in\Phi_0,g:(0,1)\to\mathbb{R}^1,\sum\limits_n g(2^{-n})^{-1}<\infty,\psi\equiv\varphi/g\in\Phi_0$,则对$\mathbb{R}^d$中任一有界子集 B,总有:“$\varphi\text{-}P(B)<+\infty\Rightarrow\psi\text{-}\overline{P}(B)=0=\psi\text{-}P^{*}(B)$”.

证 令 $M_r(B)$ 为中心在 B 中的直径为 r 的不交的开球的最大个数.则对任何 $n\geqslant1$ 有

$$
M_{2^{-n}}(B)\varphi(2^{-n})\leqslant\sup\left\{\sum_i\varphi(2r_i):\begin{matrix}\{B(x_i,r_i)\}\text{两两不交},\\ x_i\in B,2r_i\leqslant2^{-n}\end{matrix}\right\},
\tag{3.11}
$$

又因为

$$
\infty>\varphi\text{-}P(B)=\lim_{n\to\infty}\sup\left\{\sum_i\varphi(2r_i):\begin{matrix}\{B(x_i,r_i)\}\text{两两不交},\\ x_i\in B,2r_i\leqslant2^{-n}\end{matrix}\right\},
\tag{3.12}
$$

所以由(3.11)、(3.12)得知存在 $0<K'<\infty$，使

$$\sup_{n\geqslant 1} M_{2^{-n}}(B)\varphi(2^{-n})\leqslant K'. \tag{3.13}$$

取正整数 L_d，使得：$\forall\ n\geqslant 1$，没有一个半径为 2^{n} 的开球到 L_d 个不交的半径 $\geqslant 2^{-n}$ 的开球中的每一个的距离都 $\leqslant 2^{-n}$(L_d 的存在性见命题后面的说明(1)).

任取正整数 n_0，设 $\mathscr{R}_{n_0}$ 是 B 的任一个 $\mathscr{B}_{2^{-n_0-2}}$-Packing，令 k_n 是 $\mathscr{R}_{n_0}$ 中半径 $r_i\in[2^{-n},2^{-n+1})$ 的开球的个数，$n\geqslant n_0$. 由 k_n、L_d、$M_{2^{-n}}(B)$ 的定义有(见命题后面的说明(2))：

$$k_n\leqslant L_d M_{2^{-n}}(B)\quad (n\geqslant n_0), \tag{3.14}$$

所以，由 $\mathscr{R}_{n_0}, k_n, L_d, M_{2^{-n}}(B), \psi$ 的定义，并注意(3.14)、(3.13)得知：

$$\begin{aligned}
\psi(\mathscr{R}_{n_0}) &\equiv \sum_{B(x_i,r_i)\in\mathscr{R}_{n_0}} \psi(2r_i)\leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} k_n\psi(2^{-n+1}) \\
&\leqslant L_d\sum_{n=n_0}^{\infty} M_{2^{-n}}(B)\psi(2^{-n+1}) \\
&\leqslant L_d K'\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\psi(2^{-n+1})}{\varphi(2^{-n})}\leqslant L_d K' K\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\psi(2^{-n})}{\varphi(2^{-n})} \\
&= L_d K' K\sum_{n=n_0}^{\infty} g(2^{-n})^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

(3.15)中的 K 是 ψ 的“限制增长”条件中的常数. 由本命题假设知(3.15)右边当 $n_0\to\infty$ 时趋于 0. 所以

$$\psi\text{-}\overline{P}(B)=\lim_{n_0\to\infty}\sup\{\psi(\mathscr{R}_{n_0}):\mathscr{R}_{n_0}\text{是 } B \text{ 的 } \mathscr{B}_{2^{-n_0-2}}\text{-Packing}\}=0.$$

类似地可以证明 $\psi\text{-}P^*(B)=0$. 只不过把 L_d 换成 J_d，J_d 满足下列条件：

$\forall\ n\geqslant 1$，没有一个半径为 2^{-n} 的开球到 J_d 个两两不交的边长为 2^{-n} 的 Γ_B^* 中的二进制区间中的每一个的距离都 $\leqslant 2^{-n}$.

把 $\mathscr{R}_{n_0}$ 换成 Q_{n_0}，Q_{n_0} 是 B 的任何一个 Γ_B^*-Packing，且 Q_{n_0} 中的每一个二进制的区间的边长 $\leqslant 2^{-n_0}$.

把 k_n 换成 j_n，j_n 是 Q_{n_0} 中边长为 2^{-n} 的二进制区间的个数.

把(3.14)换成：

$$j_n \leqslant J_d M_{2^{-n}}(B). \tag{3.14$'$}$$

作这些更换后，仿照证明 $\psi\text{-}\overline{P}(B)=0$ 的办法可以证明 $\psi\text{-}P^*(B)=0$. 命题 3.6 得证.

下面补充说明 L_d 的存在性及(3.14)$'$的正确性.

说明(1) 记$\mathbb{R}^d$中的 Lebesgue 测度为 $\mathscr{L}_d$. 对$\mathbb{R}^d$中任何开球 $B(z,r)$ 有 $\mathscr{L}_d(B(z,r))=\delta_d r^d$($\delta_d$ 是不依赖 r 的常数).

$\forall\ B(x,2^{-n})\subset\mathbb{R}^d$. 设半径$\geqslant 2^{-n}$的两两不交的与 $B(x,2^{-n})$ 的距离$\leqslant 2^{-n}$的开球的最大个数为 $L'_d(n)$，它们是$\{B(y_i,r_i),r_i\geqslant 2^{-n}, i=1,\cdots,L'_d(n)\}$. 再令半径$=2^{-n}$的两两不交的与 $B(x,2^{-n})$ 的距离$\leqslant 2^{-n}$的开球的最大个数为 $L''_d(n)$，它们是$\{B(z_j,2^{-n}),j=1,\cdots,L''_d(n)\}$.

由于$\forall\ B(y_i,r_i)(r_i\geqslant 2^{-n})$，必存在 $B(y'_i,2^{-n})\subset B(y_i,r_i)$，使 $\rho(B(y'_i,2^{-n}),B(x,2^{-n}))=\rho(B(y_i,r_i),B(x,2^{-n}))\leqslant 2^{-n}$，由$\{B(y_i,r_i):r_i\geqslant 2^{-n},i=1,\cdots,L'_d(n)\}$的两两不交性可知$\{B(y'_i,2^{-n}):i=1,\cdots,L'_d(n)\}$的两两不交性. 所以 $L''_d(n)\geqslant L'_d(n)$.

而半径为 2^{-n} 的与 $B(x,2^{-n})$ 的距离$\leqslant 2^{-n}$的开球的球心必在 $\overline{B}(x,3\cdot 2^{-n})$ 内，即是 $z_j\in\overline{B}(x,3\cdot 2^{-n})$，$j=1,\cdots,L''_d(n)$. 故

$\mathscr{L}_d(\overline{B}(x,3\cdot 2^{-n})\cap B(z_j,2^{-n}))\geqslant\frac{1}{2}\mathscr{L}_d(B(z_j,2^{-n}))$. 但是 $\{B(z_j,2^{-n}):j=1,\cdots,L''_d(n)\}$ 两两不交，所以

$$\frac{1}{2}L''_d(n)\mathscr{L}_d(B(z_j,2^{-n}))\leqslant\mathscr{L}_d(\overline{B}(x,3\cdot 2^{-n})),$$

即是

$$\frac{1}{2}L''_d(n)\leqslant\frac{\delta_d(3\cdot 2^{-n})^d}{\delta_d(2^{-n})^d},$$

亦即 $L''_d(n)\leqslant 2\cdot 3^d$，所以取 $L_d=2\cdot 3^d$ 即可.

说明(2) 在 $\mathscr{R}_{n_0}$ 中半径 $r_i\in[2^{-n},2^{-n+1})$ 的那 k_n 个开球记为

$\{B(x_i,r_i),1\leqslant i\leqslant k_n\}$，直径为 2^{-n} 的球心在 B 中的两两不交的那 $M_{2^{-n}}(B)$ 个开球记为 $\{B(u_i,2^{-n-1}),u_i\in B,i=1,\cdots,M_{2^{-n}}(B)\}$.

反设 $k_n>L_dM_{2^{-n}}(B)$. 由 k_n、L_d、$M_{2^{-n}}(B)$ 的定义知：$\{B(x_i,r_i):r_i\in[2^{-n},2^{-n+1}),i=1,\cdots,k_n\}$ 中必有一个（不妨设为 $B(x_1,r_1)$）与 $\{B(u_i,2^{-n-1}):u_i\in B,i=1,\cdots,M_{2^{-n}}(B)\}$ 中每一个开球的距离都 $>2^{-n}$. 但 $B(x_1,r_1)\in\mathscr{R}_{n_0}$ 是 B 的一个 Packing，所以 $\overline{B}(x_1,r_1)\cap\overline{B}\neq\varnothing$，从而可取 $w\in B$，使 $\{B(w,2^{-n-1}),B(u_i,2^{-n-1}),w\in B,u_i\in B,i=1,\cdots,M_{2^{-n}}(B)\}$ 两两不交，这与 $M_{2^{-n}}(B)$ 的定义矛盾.

推论 3.1　对 $\mathbb{R}^d$ 中任何一个有界子集 B，当 $\alpha>\beta>0$ 时，总有：

$$s^\beta\text{-}P(B)<\infty\Rightarrow s^\alpha\text{-}\overline{P}(B)=0=s^\alpha\text{-}P^*(B).$$

定义 3.3　对任何 $B\subset b(\mathbb{R}^d)$，定义指数

$$\overline{\mathrm{D}}\mathrm{im}(B)=\inf\{\alpha>0:s^\alpha\text{-}P(B)=0\}.$$

命题 3.7　对任何 $B\subset b(\mathbb{R}^d)$，总有：

(1)　当 $0<\alpha<\overline{\mathrm{D}}\mathrm{im}(B)$ 时，有

$$s^\alpha\text{-}P(B)=s^\alpha\text{-}P^*(B)=s^\alpha\text{-}P^{**}(B)=s^\alpha\text{-}\overline{P}(B)=\infty;$$

(2)　当 $\alpha>\overline{\mathrm{D}}\mathrm{im}(B)$ 时，有

$$s^\alpha\text{-}P(B)=s^\alpha\text{-}P^{**}(B)=s^\alpha\text{-}\overline{P}(B)=s^\alpha\text{-}P^*(B)=0.$$

证　(1) 当 $0<\alpha<\overline{\mathrm{D}}\mathrm{im}(B)$ 时，取 $\alpha<\beta<\overline{\mathrm{D}}\mathrm{im}(B)$. 则有 $s^\beta\text{-}\overline{P}(B)\geqslant s^\beta\text{-}P(B)>0$. 因此，由命题 3.6 的推论得知 $s^\alpha\text{-}P(B)=\infty$. 再用命题 3.5 得

$$s^\alpha\text{-}P^*(B)=s^\alpha\text{-}P^{**}(B)=s^\alpha\text{-}\overline{P}(B)=\infty.$$

(2) 当 $\alpha>\overline{\mathrm{D}}\mathrm{im}(B)$ 时，取 $\alpha>\beta>\overline{\mathrm{D}}\mathrm{im}(B)$，则 $s^\beta\text{-}P(B)=0$. 反设 $s^\alpha\text{-}\overline{P}(B)>0$，则由命题 3.6 的推论得知 $s^\beta\text{-}P(B)=\infty$，矛盾，所以 $s^\alpha\text{-}\overline{P}(B)=0$. 仿之，$s^\alpha\text{-}P^*(B)=0$. 再用命题 3.5，得 $s^\alpha\text{-}P^{**}(B)=0$.

推论 3.2　对任何 $B\in b(\mathbb{R}^d)$，设 τ_α 是 $s^\alpha\text{-}P$、$s^\alpha\text{-}P^*$、$s^\alpha\text{-}P^{**}$、

s^α-$\overline{P}$中的任一个预测度，总有

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Dim}}(B)&=\inf\{\alpha>0:\tau_\alpha(B)=0\}\\&=\inf\{\alpha>0:\tau_\alpha(B)<\infty\}\\&=\sup\{\alpha>0:\tau_\alpha(B)=\infty\}\\&=\sup\{\alpha>0:\tau_\alpha(B)>0\}.\end{aligned}$$

定义 3.4 称定义在 $\mathscr{E}$ 上的集合函数 τ($\mathscr{E}$ 是$\mathbb{R}^d$的一个子集系)具有平移不变性：如果对任何 $B\in\mathscr{E}$，$x\in\mathbb{R}^d$，只要

$$x+B\equiv\{y:y=x+u,u\in B\}\in\mathscr{E},$$

就有 $\tau(x+B)=\tau(B)$.

命题 3.8 $\forall\ \varphi\in\Phi_0$，$\varphi$-$p$ 具有平移不变性，但 φ-p^* 一般不具有平移不变性.

证 φ-p 的平移不变性，由定义即得，而 φ-p^* 一般不具有平移不变性的反例，请参见[208]p. 690.

由此命题看出，我们选 φ-p 做为 Packing 测度的定义是较明智的.

定义 3.5 $\forall\ B\subset\mathbb{R}^d$，定义

$$\mathrm{Dim}(B)=\inf\{\alpha>0:s^\alpha\text{-}p(B)=0\}$$

为 B 的 Packing 维数.

命题 3.9 $\forall\ B\subset\mathbb{R}^d$，总有：

(1) $\beta>\alpha$，s^α-$p(B)<\infty\Rightarrow s^\beta$-$p(B)=0$；

(2) $\alpha>\mathrm{Dim}(B)\Rightarrow s^\alpha$-$p(B)=0$；

(3) $\alpha<\mathrm{Dim}(B)\Rightarrow s^\alpha$-$p(B)=\infty$；

(4) $\alpha=\mathrm{Dim}(B)\Rightarrow s^\alpha$-$p(B)\in[0,\infty]$；

(5) $$\begin{aligned}\mathrm{Dim}(B)&=\inf\{\alpha>0:s^\alpha\text{-}p(B)=0\}\\&=\inf\{\alpha>0:s^\alpha\text{-}p(B)<\infty\}\\&=\sup\{\alpha>0:s^\alpha\text{-}p(B)=\infty\}\\&=\sup\{\alpha>0:s^\alpha\text{-}p(B)>0\}.\end{aligned}$$

证 由定义和命题 3.5、3.6 立即可得本命题.

定义 3.6 若 φ-$p(B)\in(0,\infty)$，则称 φ 是 B 的 Packing 确切

测度函数，简称确切测度函数. 若 $s^\alpha\text{-}p(B)\in(0,\infty)$，则称 B 是 α-Packing 集. 显然，α-Packing 集的确切测度函数是 $\varphi(s)=s^\alpha$，α-Packing集的维数为 $\mathrm{Dim}(B)=\alpha$.

命题 3.10(Dim 的 σ 稳定性) 对任何 $B_n\subset\mathbb{R}^d(n=1,2,\cdots)$，总有 $\mathrm{Dim}(\bigcup_{n\geq 1}B_n)=\sup_{n\geq 1}\mathrm{Dim}(B_n)$.

证 仿命题 2.2 可证本命题.

命题 3.11 对任何 $B\subset\mathbb{R}^d$，令 μ_α 是 $s^\alpha\text{-}p$、$s^\alpha\text{-}p^*$、$s^\alpha\text{-}p^{**}$、$s^\alpha\text{-}\overline{p}$ 中的任一测度，总有

$$\begin{aligned}\mathrm{Dim}(B)&=\inf\{\alpha>0:\mu_\alpha(B)=0\}\\&=\inf\{\alpha>0:\mu_\alpha(B)<\infty\}\\&=\sup\{\alpha>0:\mu_\alpha(B)=\infty\}\\&=\sup\{\alpha>0:\mu_\alpha(B)>0\}.\end{aligned}$$

证 由命题3.7及命题3.9即得本命题.

命题 3.12 $\forall\ \varphi\in\Phi_0$，$\forall$ 可数集 $B\subset\mathbb{R}^d$，总有

(1) $\varphi\text{-}p(B)=\varphi\text{-}p^*(B)=\varphi\text{-}p^{**}(B)=\varphi\text{-}\overline{p}(B)=0$；

(2) $\mathrm{Dim}(B)=0$.

证 (1)可由命题 3.1(3)及 $\varphi\text{-}p$、$\varphi\text{-}p^*$、$\varphi\text{-}p^{**}$ 及 $\varphi\text{-}\overline{p}$ 的可数半可加性而得.

(2)可由(1)立即得到.

下面我们讨论由四个预测度 $\varphi\text{-}P$、$\varphi\text{-}P^*$、$\varphi\text{-}P^{**}$、$\varphi\text{-}\overline{P}$ 按§1中模式(Ⅰ)所产生的测度 $\varphi\text{-}p$、$\varphi\text{-}p^*$、$\varphi\text{-}p^{**}$、$\varphi\text{-}\overline{p}$ 的关系及它们的主要性质.

定理 3.1([208]) 设 τ 是 $\varphi\text{-}P$、$\varphi\text{-}P^*$、$\varphi\text{-}P^{**}$、$\varphi\text{-}\overline{P}$ 中的任何一个，$\varphi\in\Phi_0$，φ 连续，μ 是 τ 按§1中模式(Ⅰ)产生的测度，则

(1) μ 是距离测度，即是"$\rho(B,C)>0\Rightarrow\mu(B\cup C)=\mu(B)+\mu(C)$"；

(2) $\mathbb{R}^d$ 中一切 Borel 集都是 μ 可测的，即是 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)\subset\sigma(\mu)$；

(3) μ 是 Borel 正则的，即是 $\forall\ B\subset\mathbb{R}^d$，都存在 $C\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$，使 $C\supset B$，且 $\mu(C)=\mu(B)$；

(4) 对$\mathbb{R}^d$中任何有界集 B，都有 $\mu(B)\leqslant\tau(B)$；

(5) 对于任何 $B_n\uparrow B$，总有 $\mu(B_n)\uparrow\mu(B)$；

(6) 对于任何 μ 可测集 B，只要 $0<\mu(B)<\infty$，任给 $\varepsilon>0$，都存在闭集 $F\subset B$，使 $\mu(F)>\mu(B)-\varepsilon$.

(7) 对任何 $B\subset\mathbb{R}^d$，均有

$$\mu(B)=\inf\{\lim_{n\to\infty}\tau(B_n):B_n\text{ 是有界集，且 }B_n\uparrow B\}.\quad(3.16)$$

证 (1) 显然，$\forall\ \varepsilon>0$，总有

$$\begin{aligned}&\inf\left\{\sum_n\tau(B_n):B_n\text{ 是有界集，且 }B\subset\bigcup_n B_n\right\}\\ =&\inf\left\{\sum_n\tau(B_n'):B_n'\text{ 是有界集},B_n'\subset\bigcup_{x\in B}B(x,\varepsilon),B\subset\bigcup_n B_n'\right\}\end{aligned}\quad(3.17)$$

(当然，(3.17)中的 B、B_n 换成 C，C_n 也对).

取 $B_n'\subset\bigcup_{x\in B}B(x,\varepsilon)$，$C_n'\subset\bigcup_{x\in C}B(x,\varepsilon)$，$B\subset\bigcup_n B_n'$，$C\subset\bigcup_n C_n'$（其中 $\varepsilon<\frac{1}{3}\rho(B,C)$）. 则

$$\rho\Big(\bigcup_{x\in B}B(x,\varepsilon),\bigcup_{x\in C}B(x,\varepsilon)\Big)\geqslant\varepsilon.\quad(3.18)$$

更有

$$\rho(B_n',C_n')\geqslant\varepsilon\quad(\forall\ n\geqslant1),\quad(3.19)$$

从而由命题 3.1(2)得

$$\tau(B_n'\cup C_n')=\tau(B_n')+\tau(C_n')\quad(\forall\ n\geqslant1).\quad(3.20)$$

故由(3.17)及(3.20)有

$$\begin{aligned}&\mu(B\cup C)\\ =&\inf\left\{\begin{aligned}&\sum_n\tau(B_n'\cup C_n'):B_n',C_n'\text{ 是有界集，且}\\ &B_n'\subset\bigcup_{x\in B}B(x,\varepsilon),C_n'\subset\bigcup_{x\in C}B(x,\varepsilon),\\ &B\subset\bigcup_n B_n',C\subset\bigcup_n C_n'\end{aligned}\right\}\\ =&\mu(B)+\mu(C).\end{aligned}$$

(2) 由定理 1.8 及本定理的(1)即得.

(3) 由命题 3.3 有

$$\mu(B)=\inf\left\{\sum_n \tau(B_n): B_n \text{ 是有界 Borel 集}, \bigcup_n B_n \supset B\right\}.$$

不失普遍性可设 $0<\mu(B)<\infty$，于是对任何 $k\geqslant 1$，可取有界 Borel 集 $B_n^{(k)}(n\geqslant 1)$，使

$$\mu(B)\geqslant \sum_n \tau(B_n^{(k)})-\frac{1}{k}, \tag{3.21}$$

$$\bigcup_n B_n^{(k)}\supset B. \tag{3.22}$$

取 $C=\bigcap_k \bigcup_n B_n^{(k)}$，则 $C\supset B$，$\mu(C)=\mu(B)$．(因为 $\mu(C)\leqslant\mu(\bigcup_n B_n^{(k)})\leqslant \sum_n \mu(B_n^{(k)})\leqslant \sum_n \tau(B_n^{(k)})\leqslant \mu(B)+\frac{1}{k}$ $(\forall\ k\geqslant 1)$，故 $\mu(C)\leqslant \mu(B)$，而 $\mu(B)\leqslant\mu(C)$ 是显然的．)

(4) 由 μ 及 τ 的定义即得．

(5) 由(3)及 $B_n\uparrow B$ 得知存在 Borel 集 C_n，使 $C_n\supset B_n$，$C_n\uparrow C$，$\mu(B_n)=\mu(C_n)$．而由定理 1.2 知 $C_n\in\sigma(\mu)$，再用定理 1.3 及 $\mu(\cdot)$ 的单调性知 $\mu(C_n)\uparrow\mu(C)$．所以

$$\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(C_n)=\mu(C)\geqslant\mu(B).$$

而由 $\mu(\cdot)$ 的单增性必有 $\mu(B_n)\uparrow$，且 $\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)\leqslant\mu(B)$．总之 $\mu(B_n)\uparrow\mu(B)$．

(6) 设 B 是 μ 可测的，即 $B\in\sigma(\mu)$．由(3)可取 Borel 集 $C\supset B$，使 $\mu(C)=\mu(B)$．由于 $\mu(C-B)=0$，再用(3)，可取 Borel 集 $C_1\supset C-B$，使 $\mu(C_1)=0$．于是 $C_2=C-C_1$ 是 Borel 集，$C_2\subset B$，$\mu(C_2)=\mu(B)$．定义

$$\mu_1(A)=\mu(A\cap C_2)\quad \forall\ A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \tag{3.23}$$

则由 $0<\mu(B)<\infty$ 知 μ_1 是 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 上的可数可加的有限的非恒 0 的测度．再用定理 1.9 可知 μ_1 是"内正则"的，即是 $\forall\ C_2\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$，$\forall\ \varepsilon>0$，存在闭集 F，使

$$F\subset C_2,\ \mu_1(F)>\mu_1(C_2)-\varepsilon.$$

而由(3.23)

$$\mu_1(F)=\mu(F),\mu_1(C_2)=\mu(C_2)=\mu(B).$$

(6)证毕.

(7) 记(3.16)右端为$\mu^*(B)$. 由(4)、(5)知

$$\mu(B)=\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}\tau(B_n) \tag{3.24}$$

对一切有界集B_n,$B_n\uparrow B$成立. 这就给出

$$\mu(B)\leqslant\mu^*(B). \tag{3.25}$$

另一方面,$\forall\ \varepsilon>0$,可取有界集列$\{C_n\}$,使

$$\bigcup_n C_n\supset B,\sum_{n=1}^{\infty}\tau(C_n)<\mu(B)+\varepsilon.$$

令

$$B_n=B\cap(\bigcup_{i=1}^{n}C_i),$$

则由命题3.1(1)和(2)得

$$\tau(B_n)\leqslant\tau(\bigcup_{i=1}^{n}C_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\tau(C_i)<\mu(B)+\varepsilon,$$

由$\mu^*(B)$的定义有

$$\mu^*(B)\leqslant\mu(B)+\varepsilon. \tag{3.26}$$

由(3.25)、(3.26)得证(7). 定理3.1证毕.

定理3.2 设$\varphi\in\Phi_0$,则

$$\varphi\text{-}p\overset{(n)}{=}\varphi\text{-}p^{**}\overset{(n)}{\leqslant}\varphi\text{-}p^*,\varphi\text{-}p\overset{(n)}{\leqslant}\varphi\text{-}\bar{p}. \tag{3.27}$$

证 由命题3.5立得定理3.2.

附注3.1 在定理3.2中的(3.27)式中,两个不等式一般不能再加强为等式了. 因为一般而言,

$$\varphi\text{-}p\overset{(n)}{=}\varphi\text{-}p^*,\varphi\text{-}p^*\overset{(n)}{=}\varphi\text{-}\bar{p}$$

都不成立. 反例请参见[208]p.690. 由于构造较复杂,在此不详论了.

定理3.3 设τ是定义在$\mathbb{R}^d$中有界集上的非负实值的集函数,μ由τ按(3.16)所定义,τ是单增的半可加的,且对任何有界集A,有$\tau(A)=\tau(\overline{A})$. 若$B$是紧集,且对任何开集$G$,只要$\overline{B\cap G}\neq$

$\varnothing$，就有 $\tau(B\cap G)=\infty$，则 $\mu(B)=\infty$.

证 任取 $B_n\uparrow B$. 由于 B 是闭集，所以，由 Baire 定理得知：存在 n_0 及开集 G，使

$$\overline{B_{n_0}\cap G}=\overline{B\cap G}\neq\varnothing,$$

所以

$$\begin{aligned}\tau(B_{n_0})&\geqslant\tau(B_{n_0}\cap G)=\tau(\overline{B_{n_0}\cap G})\\&=\tau(\overline{B\cap G})=\tau(B\cap G)=\infty.\end{aligned}$$

因此，由(3.16)的定义便知 $\mu(B)=\infty$.

注意：若 τ 是 φ-P、φ-$\overline{P}$ 中任何一个，φ 连续，则由命题 3.3，有

$$\tau(A)=\tau(\overline{A})\quad(\forall\ A\subset\mathbb{R}^d).$$

而由命题 3.1，τ 是单增的半可加的. 因此对 φ-P 和 φ-$\overline{P}$ 皆可用定理 3.3.

下面证明 Packing 测度的密度定理.

定理 3.4([208]) 设 μ 是定义在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 上的可数可加测度，$0<\mu(\mathbb{R}^d)<\infty$. $B(x,r)$、$u_n(x)$、$v_n(x)$ 如(3.4)式前所定义. 对任何 $\varphi\in\Phi_0$，φ 连续，均存在正的常数 $\lambda_i>0\ (i=1,2,3)$，使得对任何 $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$，都有

$$\begin{aligned}\lambda_1\mu(B)\inf_{x\in B}\left\{\limsup_{r\downarrow 0}\frac{\varphi(2r)}{\mu(B(x,r))}\right\}&\leqslant\varphi\text{-}p(B)\\&\leqslant\mu(\mathbb{R}^d)\sup_{x\in B}\left\{\limsup_{x\downarrow 0}\frac{\varphi(2r)}{\mu(B(x,r))}\right\};\end{aligned}\tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}\lambda_2\mu(B)\inf_{x\in B}\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{\varphi(d^{\frac{1}{2}}2^{-n})}{\mu(u_n(x))}\right\}&\leqslant\varphi\text{-}p^*(B)\\&\leqslant\mu(\mathbb{R}^d)\sup_{x\in B}\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{\varphi(d^{\frac{1}{2}}2^{-n})}{\mu(u_n(x))}\right\};\end{aligned}\tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}\lambda_3\mu(B)\inf_{x\in B}\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{\varphi(d^{\frac{1}{2}}2^{-n})}{\mu(v_n(x))}\right\}&\leqslant\varphi\text{-}p^{**}(B)\\&\leqslant\mu(\mathbb{R}^d)\sup_{x\in B}\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{\varphi(d^{\frac{1}{2}}2^{-n})}{\mu(v_n(x))}\right\}.\end{aligned}\tag{3.30}$$

证 (3.28)、(3.29)、(3.30)的证法类似，我们择其中较难的一个——(3.28)证明之. 先证(3.28)的右方不等式. 设存在有限正数 M 使得

$$\limsup_{r\downarrow 0}\frac{\varphi(2r)}{\mu(B(x,r))}<M\ (\forall\ x\in B),\tag{3.31}$$

(否则(3.28)右方不等式显然成立). 令

$$B_n=\{x\in B:“r\leqslant\frac{1}{n}\Rightarrow\varphi(2r)<M\mu(B(x,r))”\},$$

则由(3.31)知 $B_n\uparrow B$，从而由定理 3.1(5)有

$$\varphi\text{-}p(B)=\sup_{n\geqslant 1}\varphi\text{-}p(B_n).\tag{3.32}$$

取 B_n^k 有界且 $B_n^k\uparrow B_n$，由 $\varphi\text{-}P$、$\varphi\text{-}p$ 及 B_n 的定义有：

$$\begin{aligned}\varphi\text{-}p(B_n^k)&\leqslant\varphi\text{-}P(B_n^k)\\&=\lim_{m\to\infty}\sup\left\{\sum_i\varphi(2r_i):\begin{array}{c}\{B(x_i,r_i)\}\text{两两不交},\\ x_i\in B_n^k,r_i\leqslant\dfrac{1}{m}\end{array}\right\}\\&\leqslant\sup\{\sum_i M\mu(B(x_i,r_i)):\{B(x_i,r_i)\}\text{两两不交}\}\\&\leqslant M\mu(\mathbb{R}^d)\quad(\forall\ k,\forall\ n).\end{aligned}$$

在上式令 $k\uparrow\infty$ 得

$$\varphi\text{-}p(B_n)\leqslant M\mu(\mathbb{R}^d).\tag{3.33}$$

由(3.32)、(3.33)得知：对任何满足(3.31)的 M，都有

$$\varphi\text{-}p(B)\leqslant\mu(\mathbb{R}^d)M,\tag{3.34}$$

所以(3.28)的右方不等式成立.

下面证明(3.28)的左方不等式.

假定 J 是满足下列不等式的任一正数：

$$\limsup_{r\downarrow 0}\frac{\varphi(2r)}{\mu(B(x,r))}>J\ (\forall\ x\in B).\tag{3.35}$$

(如果这样的 J 一个都不存在，则(3.28)最左方为 0，左方不等式自然成立.)仿上，注意 μ 的可数可加性及(3.16)，为证(3.28)左方不等式，只需证任一满足(3.35)的 J，都有

$$\lambda_1 J\mu(B) \leqslant \varphi\text{-}P(B). \tag{3.36}$$

不失普遍性，可设(3.36)右方为有限：

$$\varphi\text{-}P(B) < \infty.$$

于是$\forall\ \varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对B的任何一个Packing$\{B(x_i,r_i)\}$，只要$x_i\in B, r_i\leqslant\delta$，就有

$$\sum_i \varphi(2r_i) \leqslant \varphi\text{-}P(B)+\varepsilon. \tag{3.37}$$

令

$$V=\{B(x,r): x\in B, r\leqslant\delta, J\mu(B(x,3r))\geqslant\varphi(6r)\}, \tag{3.38}$$

则由(3.35)得知：$\forall\ x\in B, \exists\ 0<r\leqslant\delta$，使

$$J\mu(B(x,3r)) \leqslant \varphi(6r). \tag{3.39}$$

所以V是B的一个覆盖. 由于$\mathbb{R}^d$是有可数基的，所以B的开覆盖V中必有B的可数子覆盖，记之为

$$\{B(x_i,r_i)\}\subset V, \bigcup_i B(x_i,r_i)\supset B. \tag{3.40}$$

任取$i\neq j$，若$B(x_i,r_i)\cap B(x_j,r_j)=\varnothing$，则$B(x_i,r_i)$、$B(x_j,r_j)$均保留在$\{B(x_i,r_i)\}$中；若$B(x_i,r_i)\cap B(x_j,r_j)\neq\varnothing$，则$\rho(x_i,x_j)<r_i+r_j$. 不妨设$r_i\geqslant r_j$（反之，推理也一样），因此$B(x_i,3r_i)\supset B(x_j,r_j)$，所以把$B(x_j,r_j)$从$B$的覆盖中去掉，而用$B(x_i,3r_i)$代$B(x_i,r_i)$，则所剩的开球列仍盖住$B$. 因此，总可以找到

$$\{B(x_i,r_i)\}\subset V, x_i\in B, r_i\leqslant\delta, \{B(x_i,r_i)\}\text{两两不交}; \tag{3.41}$$

$$\bigcup_i B(x_i,3r_i)\supset B. \tag{3.42}$$

所以，由(3.42)、(3.39)、φ的“限制增长”性及(3.37)和(3.41)得

$$\begin{aligned}\mu(B) &\leqslant \sum_i \mu(B(x_i,3r_i)) \leqslant J^{-1}\sum_i\varphi(6r_i)\\ &\leqslant J^{-1}K^2\sum_i\varphi(2r_i) \leqslant J^{-1}K^2(\varphi\text{-}P(B)+\varepsilon),\end{aligned} \tag{3.43}$$

其中K是φ的“限制增长”系数. 由$\varepsilon>0$可任意小，在(3.36)中取$\lambda_1=K^{-2}$，由(3.43)即得(3.36). 定理证毕.

附注 3.2 只要把$\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$上的可数可加测度$\mu$按§1中模式(Ⅰ)扩张到$\mathbb{R}^d$的一切子集上去，则定理3.4对一切$B\subset\mathbb{R}^d$也成立.

密度定理 3.4,对计算 Packing 维数是很有力的工具.

定理 3.5 对任何 $B\subset\mathbb{R}^d$,总有 $\mathrm{Dim}(B)\leqslant d$,特别地,若 B 有内点,则 $\mathrm{Dim}(B)=d$,更有 $\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^d)=d$.

证 (1) 先证对任意开球 $B(x,r)$,总有

$$\mathrm{Dim}(B(x,r))=d. \tag{3.44}$$

(A) $\forall\ \alpha>d$. 令 k_n 是含于 $B(x,r+2\varepsilon)$ 中的两两不交的半径 $r_i\in(\frac{\varepsilon}{2^n},\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}]$ 的开球的个数,则存在正数 $M>0$ 使

$$k_n\leqslant M\left(\frac{r+2\varepsilon}{\frac{\varepsilon}{2^n}}\right)^d\quad(\varepsilon>0). \tag{3.45}$$

因此,由定义及(3.45)得

$$\begin{aligned}
&s^\alpha\text{-}\overline{p}(B(x,r))\leqslant s^\alpha\text{-}\overline{P}(B(x,r))\\
&=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \sup\{\sum_j(2r_j)^\alpha:\{B(x_j,r_j)\}\text{是 }B(x,r)\text{ 的 }\mathscr{B}_\varepsilon\text{-Packing}\}\\
&\leqslant\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \sup\{\sum_j(2r_j)^\alpha:\{B(x_j,r_j)\}\text{两两不交},B(x_j,r_j)\subset\\
&\qquad\qquad B(x,r),r_j\leqslant\varepsilon,\forall\ j\}\\
&\leqslant\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sum_{n=1}^{\infty}k_n\left(\frac{2\varepsilon}{2^n}\right)^\alpha<\infty.
\end{aligned}\tag{3.46}$$

所以 $\mathrm{Dim}(B(x,r))\leqslant d$.

(B) $\forall\ \alpha<d$. 令 $\{B(x_j,r_j)\}$ 是两两不交的、含于 $B(y,\bar{r})$ 的、$2r_j\leqslant\varepsilon$ 的开球全体,a_n 是 $\{B(x_j,r_j)\}$ 中直径 $2r_j\in(\frac{\varepsilon}{2^n},\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}]$ $(n\geqslant 1)$ 的开球的个数,则存在正数 b 使

$$a_n\geqslant b(\bar{r}/\frac{\varepsilon}{2^n})^d, \tag{3.47}$$

但 $\{B(x_j,r_j)\}$ 是 $B(y,\bar{r})$ 的一个 $\mathscr{B}_\varepsilon$-Packing,所以由定义及(3.47)得

$$s^\alpha\text{-}\overline{P}(B(y,\bar{r}))\geqslant\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\frac{\varepsilon}{2^n})^\alpha=\infty. \tag{3.48}$$

所以由

$$s^{\alpha}\text{-}\overline{p}(B(x,r))=\inf\left\{\sum_i(s^{\alpha}\text{-}\overline{P}(B_i)):B_i\in b(\mathbb{R}^d),\bigcup_i B_i\supset B(x,r)\right\}.\tag{3.49}$$

而对任何 $B_i\in b(\mathbb{R}^d)$，$\bigcup_i B_i\supset B(x,r)$，必存在一个 B_i 使 $\mathscr{L}_d(B_i)>0$（$\mathscr{L}_d$ 是 d 维 Lebesgue 测度），所以必有开球，不妨记为 $B(y,\bar{r})\subset B_i$. 因此，由(3.48)、(3.49)得 $s^{\alpha}\text{-}\overline{p}(B(x,r))=\infty$，故

$$\mathrm{Dim}(B(x,r))\geqslant d.$$

由(A)、(B)得 $\mathrm{Dim}(B(x,r))=d\quad(\forall\ x\in\mathbb{R}^d,r>0)$.

(2) 再证 $\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^d)=d$. 表 $\mathbb{R}^d$ 为可数个开球之并：$\mathbb{R}^d=\bigcup_j B(x_j,r_j)$. 由(1)及 Packing 维数的 σ 稳定性即得 $\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^d)=d$.

从(1)和(2)、定理 3.5 中的其它结论立得.

例 3.1 设 $C=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n$ 是例 2.1 中所定义的直线上的 Cantor 集，$C_n=\bigcup_{k=1}^{2^n}I(n,k)$，$\{I(n,k),1\leqslant k\leqslant 2^n\}$ 是 2^n 个两两不交的直径为 3^{-n} 的闭区间，则 $0<s^{\alpha}\text{-}p(C)<\infty$，其中 $\alpha=\ln 2/\ln 3$.

证 设 γ 是例 2.1 中所定义的支撑含于 C 的可数可加测度，$\gamma(C)=1$. 从例 2.1 中可见：

$$\sup_{x\in C}\left\{\limsup_{r\downarrow 0}\frac{(2r)^{\alpha}}{\gamma(B(x,r))}\right\}\leqslant 2\limsup_{r\downarrow 0}\frac{(2r)^{\alpha}}{\gamma(B(0,r))}$$

$$\leqslant 2M\limsup_{r\downarrow 0}\frac{(2r)^{\alpha}}{(2r)^{\alpha}}=2M\quad(M\text{ 是正常数}).$$

所以，由定理 3.4 有

$$0<\lambda_1=\lambda_1\gamma(C)\inf_{x\in C}\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{(3^{-n})^{\alpha}}{\gamma(I(n,k))}\right\}$$

$$\leqslant s^{\alpha}\text{-}p(C)\leqslant\lambda_2\gamma(\mathbb{R}^1)\sup_{x\in C}\left\{\limsup_{r\downarrow 0}\frac{(2r)^{\alpha}}{\gamma(B(x,r))}\right\}<\infty.$$

定义 3.7 对任何 $A\subset\mathbb{R}^d$，若 $\mathrm{Dim}(A)=\dim(A)$，则称 A 是分形(Fractal)集，其中 dim 是§2 中定义的 Hausdorff 维数.

§4 其它维数概念及诸维数之间的关系

在前两节中，我们详细地讨论了 Hausdorff 测度及维数，Packing 测度及维数. 在本节中，我们将要简单地介绍其它几种维数概念，并研究各种维数之间的关系.

本节仍设基本空间 $E=\mathbb{R}^d$，且若不特别声明，一律沿用前几节的符号.

定义 4.1 对任何 $\varnothing\neq B\in b(\mathbb{R}^d)$，令 $M(\varepsilon,B)$ 是下列五个数中的任何一个：

(1) 半径为 ε 的能覆盖 B 的开(或者闭)球的最少个数；

(2) 半径为 ε 的球心在 B 的两两不交的开(或者闭)球的最多个数；

(3) 边长为 ε 的能覆盖 B 的 d 维区间的最少个数；

(4) 与 B 相交的边长为 $\varepsilon=2^{-n}$ 的二进制 d 维区间的个数；

(5) 直径 $\leqslant 2\varepsilon$ 的能覆盖 B 的集合的最少个数.

定义

$$\underline{\dim}_K(B)=\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{\log M(\varepsilon,B)}{-\log\varepsilon},\tag{4.1}$$

$$\overline{\dim}_K(B)=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\log M(\varepsilon,B)}{-\log\varepsilon},\tag{4.2}$$

若(4.1)与(4.2)右边二极限相等，则定义

$$\dim_K(B)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log M(\varepsilon,B)}{-\log\varepsilon}.\tag{4.3}$$

称 $\underline{\dim}_K(B)$、$\overline{\dim}_K(B)$、$\dim_K(B)$ 为 B 的 Kolmogorov 下熵指数、上熵指数、熵指数(或者 Bouligand 下维数、上维数、维数). [58]中称它们为下盒维数、上盒维数、盒维数.

注意：容易验证，$M(\varepsilon,B)$ 取定义 4.1 中所列的五个数中的任一个，定义出来的 $\underline{\dim}_K(B)$、$\overline{\dim}_K(B)$、$\dim_K(B)$ 都是一样的，所以定义 4.1 是合乎逻辑的. 为了方便补定义 $\dim_K(\varnothing)=0$.

也有人称 $\dim_K(B)$ 为 Minkowski 维数.

命题 4.1　设 $B_i \in b(\mathbb{R}^d)$，$i=1,2$，则有

(1)　$\underline{\dim}_K$、$\overline{\dim}_K$ 具有单增性，即"$B_1 \subset B_2 \Rightarrow \underline{\dim}_K(B_1) \leqslant \underline{\dim}_K(B_2)$；$\overline{\dim}_K(B_1) \leqslant \overline{\dim}_K(B_2)$"；

(2)　$\overline{\dim}_K$ 有有限稳定性，即

$$\overline{\dim}_K(B_1 \cup B_2) = \max\{\overline{\dim}_K(B_1), \overline{\dim}_K(B_2)\},$$

但 $\underline{\dim}_K$ 却未必有.

(3)　$\underline{\dim}_K(\overline{B}_1) = \underline{\dim}_K(B_1)$；$\overline{\dim}_K(\overline{B}_1) = \overline{\dim}_K(B_1)$（$\overline{B}_1$ 为 B_1 的闭包）.

证　(1)由定义立即可得.

(2)　由(1)得 $\overline{\dim}_K(B_1 \cup B_2) \geqslant \overline{\dim}_K(B_1) \vee \overline{\dim}_K(B_2)$.
下面证明反向不等式. 设 $M_1(\varepsilon, B)$ 是半径为 ε 的能覆盖住 B 的开球的最少个数，$M_2(\varepsilon, B)$ 是半径为 ε 的球心在 B 的两两不交的开球的最多个数. 由于 $M_2(\frac{\varepsilon}{2}, B_i)$ 个半径为 ε 的开球能覆盖住 B_i，所以由 $M_1(\varepsilon, B_i)$ 的定义得知

$$M_1(\varepsilon, B_1 \cup B_2) \leqslant M_2(\frac{\varepsilon}{2}, B_1) + M_2(\frac{\varepsilon}{2}, B_2), \tag{4.4}$$

因此

$$\begin{aligned}
\overline{\dim}_K(B_1 \cup B_2) &\leqslant \overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} \frac{\log(M_2(\frac{\varepsilon}{2}, B_1) + M_2(\frac{\varepsilon}{2}, B_2))}{-\log\varepsilon} \\
&\leqslant \max\left\{\overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} \frac{\log 2M_2(\frac{\varepsilon}{2}, B_1)}{-\log\varepsilon},\ \overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} \frac{\log 2M_2(\frac{\varepsilon}{2}, B_2)}{-\log\varepsilon}\right\} \\
&= \max\{\overline{\dim}_K(B_1), \overline{\dim}_K(B_2)\}.
\end{aligned}$$

(3)　若 $\{B(x_1, \varepsilon), \cdots, B(x_n, \varepsilon)\}$ 能覆盖住 B，则 $\{B(x_1, 2\varepsilon), \cdots, B(x_n, 2\varepsilon)\}$ 能覆盖住 $\overline{B}$，所以

$$\overline{\dim}_K(B) \geqslant \overline{\dim}_K(\overline{B}),\ \underline{\dim}_K(B) \geqslant \underline{\dim}_K(\overline{B}).$$

而反向不等式显然成立. 命题 4.1 证毕.

附注 4.1 命题 4.1(3)说明$\overline{\dim}_K$、$\underline{\dim}_K$一般不可能有σ稳定性. 因为[0,1]中任何一点x的$\overline{\dim}_K(\{x\})=\underline{\dim}_K(\{x\})=0$. 但[0,1]中的有理数集$\{r_i\}$在[0,1]中稠,所以

$$1=\dim_K([0,1])=\dim_K(\overline{\{r_i,i\geqslant 1\}})=\dim_K(\{r_i,i\geqslant 1\})$$
$$\neq\sup_{i\geqslant 1}\dim_K(\{r_i\})=0.$$

命题 4.2 $\forall\ B\in b(\mathbb{R}^d),B\neq\varnothing,\forall\ \delta>0$,令$B_\delta$是$B$的$\delta$-平行体,即$B_\delta=\{y:\rho(y,B)\leqslant\delta\}$,$\mathscr{L}_d$是$d$维 Lebesgue 测度,则

$$\underline{\dim}_K(B)=d-\overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\log\mathscr{L}_d(B_\delta)}{\log\delta},\tag{4.5}$$

$$\overline{\dim}_K(B)=d-\underline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\log\mathscr{L}_d(B_\delta)}{\log\delta}.\tag{4.6}$$

证 令c_d是d维单位球的$\mathscr{L}_d$测度(或者说是d维单位球的体积). 如果B能被半径为δ的$M(\delta,B)$个开球$\{B(x_i,\delta):1\leqslant i\leqslant M(\delta,B)\}$所覆盖,则$\{B(x_i,3\delta):1\leqslant i\leqslant M(\delta,B)\}$覆盖住了$B_\delta$,所以当$\delta$充分小后有

$$\mathscr{L}_d(B_\delta)\leqslant M(\delta,B)c_d(3\delta)^d.\tag{4.7}$$

因此当δ充分小后有:

$$\frac{\log\mathscr{L}_d(B_\delta)}{-\log\delta}\leqslant\frac{\log 3^d c_d+d\log\delta+\log M(\delta,B)}{-\log\delta}.\tag{4.8}$$

把(4.8)对$\delta\to 0$取下极限得

$$\underline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\log\mathscr{L}_d(B_\delta)}{-\log\delta}\leqslant -d+\underline{\dim}_K(B).\tag{4.9}$$

另一方面,如果有$M(\delta,B)$个半径为δ球心在B上两两不交的开球,则

$$M(\delta,B)c_d(2\delta)^d\leqslant\mathscr{L}_d(B_\delta).\tag{4.10}$$

把(4.10)两边除以$-\log\delta(\delta<1)$并对$\delta\downarrow 0$取极限即得(4.9)的反向不等式. (4.5)得证. 仿之可证(4.6).

附注 4.1 说明$\underline{\dim}_K$、$\overline{\dim}_K$、$\dim_K$一般不具备σ稳定性. 下面我们引进它们的"修正".

定义 4.2　$\forall\ B\subset\mathbb{R}^d$，令

$$\underline{\dim}_{MK}(B)=\inf\{\sup_{i\geqslant 1}\underline{\dim}_K(B_i):B_i\in b(\mathbb{R}^d),\bigcup_{i\geqslant 1}B_i\supset B\};$$

$$\overline{\dim}_{MK}(B)=\inf\{\sup_{i\geqslant 1}\overline{\dim}_K(B_i):B_i\in b(\mathbb{R}^d),\bigcup_{i\geqslant 1}B_i\supset B\};$$

$$\dim_{MK}(B)=\inf\{\sup_{i\geqslant 1}\dim_K(B_i):B_i\in b(\mathbb{R}^d),\bigcup_{i\geqslant 1}B_i\supset B\},$$

称它们分别为 B 的修正的 Kolmogorov 下熵指数、上熵指数、熵指数.

命题 4.3　$\underline{\dim}_{MK}$、$\overline{\dim}_{MK}$、$\dim_{MK}$都具有 σ 稳定性.

证　$\forall\ B_i\subset\mathbb{R}^d\ (i\geqslant 1)$，显然，

$$\dim_{MK}(\bigcup_{i\geqslant 1}B_i)\geqslant\sup_{i\geqslant 1}\dim_{MK}(B_i).\tag{4.11}$$

再证(4.11)的反向不等式. 不失普遍性可设 $\dim_{MK}(B_i)<\infty(\forall\ i\geqslant 1)$. 于是由定义，$\forall\ \varepsilon>0$，存在$\{C_{i,j},j\geqslant 1\}\subset b(\mathbb{R}^d)$，$\bigcup_{j\geqslant 1}C_{i,j}\supset B_i$，使

$$\varepsilon+\dim_{MK}(B_i)>\sup_{j\geqslant 1}\dim_K(C_{i,j})\ \ (\forall\ i\geqslant 1),$$

因此，

$$\begin{aligned}\varepsilon+\sup_{i\geqslant 1}\dim_{MK}(B_i)&\geqslant\sup_{\substack{i\geqslant 1\\ j\geqslant 1}}\dim_K(C_{i,j})\\ &\geqslant\dim_{MK}(\bigcup_{i\geqslant 1}B_i).\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 可以任意小得知(4.11)的反向不等式亦成立. 总之 $\dim_{MK}(\bigcup_{i\geqslant 1}B_i)=\sup_{i\geqslant 1}\dim_{MK}(B_i)$. 命题 4.3 的其它二结论亦可类似地证明.

下面我们引进 Kaufman 维数. 为此，先介绍有关乘积集的几个维数定理.

定理 4.1　设 A_i 是$\mathbb{R}^{d_i}(i=1,2)$中的非空子集，$d_1+d_2=d$. 总有

(1)　$\dim(A_1\times A_2)\geqslant\dim(A_1)+\dim(A_2)$；　(4.12)

(2)　$\mathrm{Dim}(A_1\times A_2)\geqslant\mathrm{Dim}(A_1)+\dim(A_2)\geqslant\dim(A_1\times A_2)$；　(4.13)

(3) $\mathrm{Dim}(A_1\times A_2)\leqslant\mathrm{Dim}(A_1)+\mathrm{Dim}(A_2)$. (4.14)

特别地，当 A_1,A_2 中有一个是分形集时，恒有

(4) $\dim(A_1\times A_2)=\dim(A_1)+\dim(A_2)$; (4.15)

(5) $\mathrm{Dim}(A_1\times A_2)=\mathrm{Dim}(A_1)+\mathrm{Dim}(A_2)$, (4.16)

其中 dim、Dim 是 § 2、§ 3 中定义的 Hausdorff 维数和 Packing 维数.

证 (4.12)的证明请参见[23]，(4.13)和(4.14)的证明请参见[213]. 由(4.12)－(4.14)及分形集的定义可得(4.15)、(4.16).

定义 4.3 设 $A\subset\mathbb{R}^d, A\neq\varnothing$，称

$$\mathrm{adim}(A)=\sup_{B\subset\mathbb{R}^1}(\dim(A\times B)-\dim(B))$$

为 A 的 Kaufman 维数. 当 $A=\varnothing$ 时，定义

$$\mathrm{adim}(\varnothing)=0.$$

命题 4.4 $\forall\ A\subset\mathbb{R}^d$，总有

$$\mathrm{Dim}(A)\geqslant\mathrm{adim}(A)\geqslant\dim(A).$$

证 由定理 4.1 及 adim 的定义立即可得命题 4.4.

命题 4.5 $\mathrm{adim}(\cdot)$具有单增性、σ 稳定性，且对任何 $A\subset\mathbb{R}^d$，总有 $0\leqslant\mathrm{adim}(A)\leqslant d$.

证 由 $\dim(\cdot)$的单增性、σ 稳定性及 $\mathrm{adim}(\cdot)$的定义知 $\mathrm{adim}(\cdot)$具有单增性及 σ 稳定性，由命题 4.4 知 $0\leqslant\mathrm{adim}(A)\leqslant d$.

定理 4.2 任取 $A_i\in b(\mathbb{R}^{d_i}), A_i\neq\varnothing\ (i=1,2)$，总有

$$\begin{aligned}&\underline{\dim}_K(A_1)+\underline{\dim}_K(A_2)\leqslant\underline{\dim}_K(A_1\times A_2)\\&\leqslant\underline{\dim}_K(A_1)+\overline{\dim}_K(A_2)\leqslant\overline{\dim}_K(A_1\times A_2)\\&\leqslant\overline{\dim}_K(A_1)+\overline{\dim}_K(A_2).\end{aligned}\tag{4.17}$$

证 令 $M(\varepsilon,B)$是边长为 ε 的能覆盖 B 的 d 维区间的最少个数($\varepsilon>0, B\subset\mathbb{R}^d$). 若注意：

$$\bigcup_{i=1}^{K_1}I_i\supset A_1,\ \bigcup_{j=1}^{K_2}J_j\supset A_2\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{K_1}\bigcup_{j=1}^{K_2}I_i\times J_j\supset A_1\times A_2,$$

则由 $M(\varepsilon,B)$的定义可得

$$M(\varepsilon,A_1)M(\varepsilon,A_2)\geqslant M(\varepsilon,A_1\times A_2).\tag{4.18}$$

由(4.18)并用定义 4.1 得

$$\overline{\dim}_K(A_1\times A_2)=\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{\log M(\varepsilon,A_1\times A_2)}{-\log\varepsilon}$$

$$\leqslant\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left[\frac{\log M(\varepsilon,A_1)}{-\log\varepsilon}+\frac{\log M(\varepsilon,A_2)}{-\log\varepsilon}\right]$$

$$\leqslant\overline{\dim}_K(A_1)-\overline{\dim}_K(A_2),\tag{4.19}$$

$$\underline{\dim}_K(A_1\times A_2)=\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{\log M(\varepsilon,A_1\times A_2)}{-\log\varepsilon}$$

$$\leqslant\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left[\frac{\log M(\varepsilon,A_1)}{-\log\varepsilon}+\frac{\log M(\varepsilon,A_2)}{-\log\varepsilon}\right]$$

$$\leqslant\underline{\dim}_K(A_1)+\overline{\dim}_K(A_2).\tag{4.20}$$

再令 $M_1(2^{-n},B)$是与 B 相交的边长为 2^{-n}的二进制 d 维区间的个数,则 $M_1(2^{-n},A_1)\cdot M_1(2^{-n},A_2)\leqslant M_1(2^{-n},A_1\times A_2)$. 所以再用定义 4.1 有

$$\underline{\dim}_K(A_1\times A_2)=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log M_1(2^{-n},A_1\times A_2)}{-\log 2^{-n}}$$

$$\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{\log M_1(2^{-n},A_1)}{-\log 2^{-n}}+\frac{\log M_1(2^{-n},A_2)}{-\log 2^{-n}}\right]$$

$$\geqslant\underline{\dim}_K(A_1)+\underline{\dim}_K(A_2),\tag{4.21}$$

$$\overline{\dim}_K(A_1\times A_2)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log M_1(2^{-n},A_1\times A_2)}{-\log 2^{-n}}$$

$$\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{\log M_1(2^{-n},A_1)}{-\log 2^{-n}}+\frac{\log M_1(2^{-n},A_2)}{-\log 2^{-n}}\right]$$

$$\geqslant\underline{\dim}_K(A_1)+\overline{\dim}_K(A_2).\tag{4.22}$$

由(4.19)—(4.22)即得定理 4.2.

定理 4.3([104]) 对任何 $A\in b(\mathbb{R}^1)$,只要 $\underline{\dim}_K(A)=\dim(A)$,$\overline{\dim}_K(A)=\mathrm{Dim}(A)$,总有

(1) $$\sup_{B\in b(\mathbb{R}^1)}(\underline{\dim}_K(A\times B)-\underline{\dim}_K(B))=\overline{\dim}_K(A);\tag{4.23}$$

(2) $$\inf_{B\subset\mathbb{R}^1}(\mathrm{Dim}(A\times B)-\mathrm{Dim}(B))=\dim(A);\tag{4.24}$$

(3) $$\sup_{B\subset\mathbb{R}^1}(\mathrm{Dim}(A\times B)-\mathrm{Dim}(B))=\mathrm{Dim}(A);\tag{4.25}$$

(4) $\text{adim}(A)=\text{Dim}(A)$. (4.26)

证明请参见[104]第二章.

定义 4.4 设$K\subset\mathbb{R}^d$是紧集,μ是$\mathbb{R}^d$上的支撑为K的有限的Borel测度,$\alpha\geqslant 0$,称

$$I_\alpha(\mu)=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{|x-y|^\alpha}\mu(dx)\mu(dy) \tag{4.27}$$

为μ的α-能.称

$C_\alpha(K)=\sup\{1/I_\alpha(\mu):\mu$是有紧支撑$K'\subset K$的Borel测度,而且$\mu(K')=1\}$为$K$的$\alpha$-容度.称

$$\begin{aligned}\dim_C(K)&=\inf\{\alpha>0:C_\alpha(K)=0\}\\&=\sup\{\alpha>0:C_\alpha(K)>0\}\end{aligned}$$

为K的容度维数(约定$\frac{1}{\infty}=0$).

下面我们将要给出容度维数与Hausdorff维数的关系(Frostman定理),为此先给出更一般的定理4.4,它对计算Hausdorff维数很有用.

定理 4.4 对$\mathbb{R}^d$中任何子集K,总有:

(a) 如果存在支撑含于K的Borel测度μ,$\mu(K)=1$,使$I_\alpha(\mu)<\infty$,则$s^\alpha\text{-}m(K)=\infty$(从而$\dim(K)\geqslant\alpha$);

(b) 如果$s^\alpha\text{-}m(K)>0$,则存在支撑为紧集$K'\subset K$的Borel测度μ,$\mu(K')=1$,使$I_\beta(\mu)<\infty$ ($\forall\ \beta<\alpha$).

证 (a)设μ满足(a)中的条件,令

$$K_1=\{x\in K:\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{\mu(B(x,r))}{r^\alpha}>0\}.$$

则对任何$x\in K_1$,均存在$\varepsilon>0$和$r_i\downarrow 0$,使

$$\mu(B(x,r_i))\geqslant\varepsilon r_i^\alpha\quad(\forall\ i). \tag{4.28}$$

显然$\mu(\{x\})$不可能大于0(否则$I_\alpha(\mu)=\infty$,这与假设矛盾),所以,由测度μ的连续性,必存在充分小的$q_i(0<q_i<r_i)$,使

$$\mu(A_i)\geqslant\frac{1}{4}\varepsilon r_i^\alpha\quad(A_i=B(x,r_i)-B(x,q_i),i=1,2,\cdots). \tag{4.29}$$

不妨设$r_{i+1}<q_i(i=1,2,\cdots)$(否则考虑子序列). 因此$\{A_i,i=1,2,\cdots\}$是一列中心在$x$的两两不交的环($x\in K_1$). 因此

$$\forall\ x\in K_1,|x-y|^{-\alpha}\geqslant r_i^{-\alpha}(\text{当 } y\in A_i \text{ 时}). \tag{4.30}$$

所以由(4.29)、(4.30)及$\{A_i\}$的不交性得:

$$f_\alpha(x)\equiv\int_K \frac{\mu(dy)}{|x-y|^\alpha}\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\int_{A_i}\frac{\mu(dy)}{|x-y|^\alpha}$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4}\varepsilon r_i^\alpha r_i^{-\alpha}=\infty\quad(x\in K_1). \tag{4.31}$$

但是

$$I_\alpha(\mu)=\int_K f_\alpha(x)\mu(dx)<\infty,K_1\subset K, \tag{4.32}$$

所以由(4.31)和(4.32)得:$\mu(K_1)=0.$　(4.33)

又因为对任何$x\in K-K_1$,由K_1的定义有

$$\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{\mu(B(x,r))}{r^{-\alpha}}=0\quad(x\in K-K_1), \tag{4.34}$$

所以由(4.34)及定理2.3′和(4.33)得知:$\forall\ C>0$,有

$$s^\alpha\text{-}m(K)\geqslant s^\alpha\text{-}m(K-K_1)\geqslant\mu(K-K_1)/C$$

$$=\mu(K)/C=\frac{1}{C}\quad(\forall\ C>0).$$

故$s^\alpha\text{-}m(K)=\infty$,更有$\dim(K)\geqslant\alpha$.

(b)设$s^\alpha\text{-}m(K)>0$. 则由定理2.5得知存在紧集$K'\subset K$及$b>0$满足:

$$0<s^\alpha\text{-}m(K')<\infty,s^\alpha\text{-}m(K'\cap B(x,r))\leqslant br^\alpha$$

$$(x\in\mathbb{R}^d,r\geqslant 0).$$

令

$$\mu(A)=s^\alpha\text{-}m(K'\cap A)\div s^\alpha\text{-}m(K'),A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \tag{4.35}$$

往证μ即为所求. 为此,只需证

$$I_\beta(\mu)<\infty\quad(\forall\ \beta<\alpha).$$

事实上,固定$x\in\mathbb{R}^a$,记$b/(s^\alpha\text{-}m(K'))=b'$,则

$$m(r) \equiv \mu(B(x,r)) \leqslant b' r^{\alpha}, \tag{4.36}$$

所以，当 $0 \leqslant \beta < \alpha$ 时，用分部积分后再用(4.36)得：

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|x-y|^{\beta}} \mu(dy) &= \int_{|x-y| \leqslant 1} \frac{\mu(dy)}{|x-y|^{\beta}} + \int_{|x-y|>1} \frac{\mu(dy)}{|x-y|^{\beta}} \\
&\leqslant \int_0^1 r^{-\beta} m(dr) + \mu(\mathbb{R}^d) \\
&= (r^{-\beta} m(r))|_0^1 + \beta \int_0^1 r^{-\beta-1} m(r) dr + \mu(\mathbb{R}^d) \\
&\leqslant b' + b'\beta \int_0^1 r^{\alpha-\beta-1} dr + 1 \\
&= b'\left(1 + \frac{\beta}{\alpha-\beta}\right) + 1.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

由(4.37)立得 $I_{\beta}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mu(dx)\mu(dy)}{|x-y|^{\beta}} < \infty \ (\forall\ \beta < \alpha)$. 定理 4.4 证毕.

定理 4.5 (Frostman 定理) 对任何紧集 $K \subset \mathbb{R}^d$，总有 $\dim_C(K) = \dim(K)$.

证 这是定理 4.4 的特例(取 K 为紧集). 事实上，$\forall\ \alpha < \dim_C(K)$，必有 $C_{\alpha}(K) > 0$，从而存在满足定理 4.4(a)的条件的 μ，使 $I_{\alpha}(\mu) < \infty$，所以由定理 4.4(a)知 $\dim(K) \geqslant \alpha$，这就说明 $\dim(K) \geqslant \dim_C(K)$.

另一方面，$\forall\ \alpha < \dim(K)$，必有 $s^{\alpha}\text{-}m(K) > 0$，所以存在支撑为紧集 $K' \subset K$ 的 Borel 测度 μ，$\mu(K') = 1$，使 $I_{\beta}(\mu) < \infty\ (\forall\ \beta < \alpha)$. 因此 $C_{\beta}(K) > 0\ (\forall\ \beta < \alpha < \dim(K))$，从而 $\dim_C(K) \geqslant \beta\ (\forall\ \beta < \alpha < \dim(K))$. 这就说明 $\dim_C(K) \geqslant \dim(K)$. 定理 4.5 证毕.

定理 4.6 $\forall\ B \in b(\mathbb{R}^d)$，总有

(1) $0 \leqslant \dim(B) \leqslant \underline{\dim}_{MK}(B) \leqslant \overline{\dim}_{MK}(B) = \mathrm{Dim}(B) \leqslant \overline{\dim}_K(B) \leqslant d$

(2) $\underline{\dim}_{MK}(B) \leqslant \underline{\dim}_K(B)$.

证 只需证两点:

(a) $\dim(B)\leqslant\underline{\dim}_{MK}(B)$;

(b) $\operatorname{Dim}(B)=\overline{\dim}_{MK}(B)$,

定理 4.6 的其它结论均属显然.

(a) $\forall\ \alpha<\dim(B)$,令 $M(\delta,B)$是能覆盖 B 的直径为 δ 的开球的最少个数,则由命题 2.4 知

$$1<s^{\alpha}\text{-}m_{b}(B)\equiv\lim_{\delta\downarrow 0}\ \inf\{\sum_{i}\delta_i^{\alpha}:B_i \text{ 是直径为 } \delta_i \text{ 的开球},\bigcup_{i}B_i\supset B\}\leqslant$$

$$\underline{\lim}_{\delta\downarrow 0}M(\delta,B)\delta^{\alpha}. \tag{4.38}$$

所以由(4.38)有

$$\log M(\delta,B)+\alpha\log\delta>0\ (\text{当 } \delta \text{ 充分小}),$$

从而

$$\alpha\leqslant\underline{\lim}_{\delta\downarrow 0}\left(\frac{\log M(\delta,B)}{-\log\delta}\right)=\underline{\dim}_{K}(B). \tag{4.39}$$

由于 $\alpha<\dim(B)$可任意接近于 $\dim(B)$,所以由(4.39)得

$$\dim(B)\leqslant\underline{\dim}_{K}(B). \tag{4.40}$$

$\forall\ B^{(j)}\in b(\mathbb{R}^d),\bigcup_{j}B^{(j)}\supset B$,由 $\dim(\cdot)$的 σ 稳定性及单增性和(4.40)得

$$\dim(B)\leqslant\sup_{j}\ \dim(B^{(j)})\leqslant\sup_{j}\ \underline{\dim}_{K}(B^{(j)}).$$

所以

$$\begin{aligned}\dim(B)&\leqslant\inf\{\sup_{j}\ \underline{\dim}_{K}(B^{(j)}):B^{(j)}\in b(\mathbb{R}^d),\bigcup_{j}B_j\supset B\}\\&=\underline{\dim}_{MK}(B).\end{aligned}$$

(a)得证.

(b) 先证

$$\operatorname{Dim}(B)\leqslant\overline{\dim}_{K}(B). \tag{4.41}$$

$\forall\ 0\leqslant\beta<\alpha<\operatorname{Dim}(B),0<\delta\leqslant 1$,由 Packing 维数 $\operatorname{Dim}(B)$的定义得知:存在 $B_i=B(x_i,\delta_i)$,使得 $\delta_i\leqslant\delta,x_i\in B,\{(B(x_i,\delta_i)\}$两两不交而且

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(B_i)^{\alpha} \geqslant 1. \tag{4.42}$$

令

$$n_k = \#\{i : 2^{-k-1} < \operatorname{diam}(B_i) \leqslant 2^{-k}\}, \tag{4.43}$$

则由(4.42)、(4.43)有

$$\sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^{-\alpha k} > 1. \tag{4.44}$$

于是必存在一个 k，使

$$n_k > 2^{k\beta}(1 - 2^{\beta-\alpha}). \tag{4.45}$$

(否则 $\sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^{-\alpha k} \leqslant 1$)因此，满足(4.45)的那 n_k 个开球中的每一个必包含一个球心在 B 中半径为 $2^{-k-2} \leqslant \delta$ 的开球. 所以，若令 $M(\delta, B)$ 为球心在 B 上半径为 δ 的互不相交的开球的最多个数，则由(4.45)有

$$\begin{aligned} & M(2^{-k-2}, B)(2^{-k-2})^{\beta} \geqslant n_k (2^{-k-2})^{\beta} \\ & > 2^{-2\beta}(1 - 2^{\beta-\alpha}) \quad (\text{其中 } 2^{-k-2} < \delta). \end{aligned} \tag{4.46}$$

所以

$$\varlimsup_{\delta \to 0} M(\delta, B) \delta^{\beta} > 0,$$

从而

$$\overline{\dim}_K(B) \geqslant \beta. \tag{4.47}$$

由于 $0 \leqslant \beta < \alpha < \operatorname{Dim}(B)$ 中 β 可任意接近 $\operatorname{Dim}(B)$，由(4.47)可推得(4.41).

再用 $\operatorname{Dim}(\cdot)$ 的 σ 稳定性、单增性和(4.41)及 $\overline{\dim}_{MK}(\cdot)$ 的定义有：$\forall\, B^{(j)} \in b(\mathbb{R}^d)$，$\bigcup_j B^{(j)} \supset B$，有

$$\operatorname{Dim}(B) \leqslant \sup_j \operatorname{Dim}(B^{(j)}) \leqslant \sup_j \overline{\dim}_K(B^{(j)}),$$

从而

$$\operatorname{Dim}(B) \leqslant \overline{\dim}_{MK}(B). \tag{4.48}$$

最后证明

$$\operatorname{Dim}(B) \geqslant \overline{\dim}_{MK}(B). \tag{4.49}$$

$\forall\ \alpha > \mathrm{Dim}(B)$，令

$\mathscr{P}_\delta^\alpha(B)=\sup\{\sum_i \mathrm{diam}(B_i)^\alpha : \{B_i\}$是球心在 B 中，半径$\leqslant\delta$ 的两两不交的开球族$\}$，

$$\mathscr{P}_0^\alpha(B)=\lim_{\delta\to 0}\mathscr{P}_\delta^\alpha(B),$$

$$s^\alpha\text{-}p(B)=\inf\{\sum_i \mathscr{P}_0^\alpha(B_i) : B_i\in b(\mathbb{R}^d),\ \bigcup_i B_i\supset B\},$$

则 $s^\alpha\text{-}p(B)=0$. 因此，存在 $B_i\in b(\mathbb{R}^d)$，$\bigcup_i B_i\supset B$，使 $\mathscr{P}_0^\alpha(B_i)<\infty$ $(\forall\ i)$. 因此对每一个 i，存在 $\delta>0$ 充分小(δ 可依赖 i)，使 $\mathscr{P}_\delta^\alpha(B_i)<\infty$. 因此，若令 $M(\delta,B_i)$是中心在 B_i 半径为 δ 的两两不交的开球的最多个数，则由 $\mathscr{P}_\delta^\alpha(B_i)$的定义以及它$<\infty$可知 $M(\delta,B_i)\delta^\alpha$ 有界(当 $\delta\to 0$ 时). 所以

$$\overline{\dim}_K(B_i)\leqslant\alpha\quad(\forall\ i),$$

而 $\alpha>\mathrm{Dim}(B)$可以任意接近于 $\mathrm{Dim}(B)$，因此

$$\overline{\dim}_{MK}(B)\leqslant\mathrm{Dim}(B).$$

定理证毕.

例 4.1　设 $C=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n$ 是例 2.1 中所定义的直线上的 Cantor 集. 直接计算可知$\underline{\dim}_K(C)=\overline{\dim}_K(C)=\log 2/\log 3$. 所以由例 2.1、例 3.1、定理 4.6 及定理 4.3 可知：

$$\dim(C)=\mathrm{Dim}(C)=\mathrm{adim}(C)=\dim_K(C)$$
$$=\dim_{MK}(C)=\log 2/\log 3.$$

§ 5　离散的 Hausdorff 维数与离散的 Packing 维数

在前面四节中，我们讨论了距离空间特别是$\mathbb{R}^d$空间中的各种测度及维数的概念、性质以及它们之间的相互关系，而重点是 Hausdorff 测度及维数，Packing 测度及维数. 从命题 2.3 和命题 3.12 得知：对任何可数集 B 而言，它的 Hausdorff 测度及维数，

Packing 测度及维数都是 0，因此，用前四节引进的测度及维数的概念，是无法区分两个可数集之间的“大小”的. 但是，无论从理论上或者应用上看，引进一种指数，利用它能区别可数集之间的大小，是一件很有意义的事情.

在这一节中，我们将要引进 d 维整数格子点空间 $\mathbb{Z}^d$ 中的子集 A 的离散的 Hausdorff 维数与离散的 Packing 维数，并讨论它们的性质及相互关系. 如不特别声明，一律沿用以前的符号，特别地，$\dim(B)$、$\mathrm{Dim}(B)$ 分别表 B 的 Hausdorff 维数和 Packing 维数，Φ（Φ_0）表一切（限制增长的）测度函数. $\forall\ A\subset\mathbb{R}^d$，$\alpha\in\mathbb{R}^1$，$x\in\mathbb{R}^d$，

$$\alpha A=\{\alpha y: y\in A\},\ A+x=\{y+x: y\in A\}.$$

对任何 $x\in\mathbb{Z}^d$，$n\geqslant 1$，记 $x=(x_1,\cdots,x_d)$，

$$C(x,n)=\{y\in\mathbb{Z}^d: x_i\leqslant y_i<x_i+n,\ 1\leqslant i\leqslant d\},$$

$$V(x,n)=\{y\in\mathbb{Z}^d: x_i-\frac{1}{2}n\leqslant y_i<x_i+\frac{1}{2}n,\ 1\leqslant i\leqslant d\}.$$

显然，

$$C(x,1)=V(x,1)=\{x\},$$

$$\#(C(x,n))=\#(V(x,n))=n^d.$$

本节恒设 $\mathscr{C}$、$\mathscr{C}_d$、$\mathscr{C}_s$ 分别为下面定义的全体立方体、全体二进制立方体、全体半二进制立方体：

$$\mathscr{C}=\{C(x,n): x\in\mathbb{Z}^d, n\geqslant 1\},$$

$$\mathscr{C}_d=\{C(x,2^n): x\in 2^n\mathbb{Z}^d, n\geqslant 0\},$$

$$\mathscr{C}_s=\{C(x,2^n): x\in 2^{n-1}\mathbb{Z}^d, n\geqslant 1\}.$$

定义 5.1 $\forall\ A\subset\mathbb{Z}^d$，称

$$s(A)=\min\{r: \text{存在 } x\in\mathbb{Z}^d, \text{使 } C(x,r)\supset A\}$$

为 A 的边长.

记 $\mathscr{C}_d^k$，$\mathscr{C}_s^k$ 分别为边长为 2^k 的二进制立方体全体和半二进制立方体全体. 注意 $C(x,n)$，$V(x,n)$ 的边长都是 n. 所以

$$\mathscr{C}_d^k=\{C(x,2^k): x\in 2^k\mathbb{Z}^d\}\ (k\geqslant 0),$$

$$\mathscr{C}_s^k=\{C(x,2^k): x\in 2^{k-1}\mathbb{Z}^d\}\ (k\geqslant 1).$$

$\forall\ x\in\mathbb{Z}^d$，记 $Q_k(x)$ 是 $\mathscr{E}_d^k$ 中含 x 的唯一的那个边长为 2^k 的二进制立方体，$\tilde{V}(x,2^k)$ 是 $\mathscr{E}_s^k$ 中的含 x 的其中心与 x 最近的那个边长为 2^k 的半二进制立方体.

附注 5.1　$\forall\ x\in\mathbb{Z}^d, k\geqslant 0, Q_k(x)$ 确是唯一存在且 $Q_{k+1}(x)\supset Q_k(x)$. $\mathscr{E}_s^k$ 中含 x 的边长为 $2^k(x\in\mathbb{Z}^d,k\geqslant 1)$ 的半二进制立方体恰有 2^d 个，它们是 $\{C(2^{k-1}y,2^k): y=(y_1,\cdots,y_d), y_i=\left[\frac{x_i}{2^{k-1}}\right]$ 或 $\left[\frac{x_i}{2^{k-1}}\right]-1, i=1,\cdots,d\}$（其中 $[a]$ 表 $\leqslant a$ 的最大整数，$x=(x_1,\cdots,x_d)$）. 这 2^d 个含 x 的边长为 2^k 的半二进制立方体中每一个的中心 $w^{(i)}(i=1,\cdots,2^d)$ 均满足

$$|\pi_j(w^{(i)}-x)|\leqslant 2^{k-1}\qquad (i=1,\cdots,2^d, j=1,\cdots,d),$$

其中 π_j 是 $\mathbb{R}^d$ 到第 j 个坐标轴 $\mathbb{R}$ 的投影算子，且 $\{w^{(1)},\cdots,w^{(2^d)}\}$ 中恰有唯一一个 $w^{(i_0)}$，使

$$|\pi_j(w^{(i_0)}-x)|\leqslant 2^{k-2}(j=1,\cdots,d).$$

以 $w^{(i_0)}$ 为中心含 x 的边长为 2^k 的那一个半二进制立方体就记之为 $\tilde{V}(x,2^k)=V(w^{(i_0)},2^k)$.

再注意 $V(x,2^n)$ 的中心是 x，可证

$$V(x,2^{k+1})\supset\tilde{V}(x,2^k)\supset V(x,2^{k-1}).$$

证　由 $\mathscr{E}_d^k$ 中的立方体是两两不交的，且 $\mathscr{E}_d^k$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 的覆盖可知：$\forall\ x\in\mathbb{Z}^d$，在 $\mathscr{E}_d^k$ 中有唯一的 $Q_k(x)$，使 $x\in Q_k(x)$. 令 $Q_k(x)=C(2^kp,2^k)$，$p\in\mathbb{Z}^d$，$e=(1,\cdots,1)\in\mathbb{Z}^d$，$\pi_j(\bar{p})=[\pi_j(p)/2](j=1,\cdots,d)$，则 $\bar{p}2^{k+1}\leqslant p2^k\leqslant(\bar{p}+e)2^{k+1}$，所以 $Q_k(x)=C(2^kp,2^k)\subset C(2^{k+1}\bar{p},2^{k+1})\in\mathscr{E}_d^{k+1}$，由 $\mathscr{E}_d^{k+1}$ 恰有唯一一个立方体含 x，所以 $Q_{k+1}(x)=C(2^{k+1}\bar{p},2^{k+1})\supset Q_k(x)$.

$\mathscr{E}_s^k$ 中含 x 的一切立方体为

$$\{C(2^{k-1}y,2^k): y\in\mathbb{Z}^d, 2^{k-1}y\leqslant x<2^{k-1}y+2^ke\}$$
$$=\{C(2^{k-1}y,2^k): \pi_j(y)=[\pi_j(x)/2^{k-1}]\text{或}[\pi_j(x)/2^{k-1}]-1,$$

$$j=1,\cdots,d\}$$

共 2^d 个,令它们为

$$V(w^{(i)},2^k)\quad(1\leqslant i\leqslant 2^d).$$

由于 $x\in V(w^{(i)},2^k)$,所以

$$\pi_j(w^{(i)}-x)\leqslant 2^{k-1},\ (i=1,\cdots,2^d,j=1,\cdots,d).$$

令

$$x_j=\pi_j(x)=s_j2^{k-1}+t_j\quad(j=1,\cdots,d),$$

其中 $s_j\in\mathbb{Z}$, $0\leqslant t_j<2^{k-1}$. 由于

$$w^{(i)}=2^{k-1}(y^{(i)}+e),\quad(1\leqslant i\leqslant 2^d),$$

其中

$$\pi_j(y^{(i)})\in\left\{\left[\frac{x_j}{2^{k-1}}\right],\left[\frac{x_j}{2^{k-1}}\right]-1\right\}=\{s_j,s_j-1\},$$

所以

$$w_j^{(i)}\in\{2^{k-1}(s_j+1),2^{k-1}s_j\}\ (j=1,\cdots,d,i=1,\cdots,2^d),$$

从而

$$\pi_j(w^{(i)}-x)\in\{2^{k-1}-t_j,-t_j\},j=1,\cdots,d,i=1,\cdots,2^a.$$

取

$$w_j^{(i_0)}=\begin{cases}2^{k-1}s_j, & \text{当 } 2^{k-1}-t_j\geqslant t_j,\\ 2^{k-1}(s_j+1), & \text{当 } 2^{k-1}-t_j<t_j\end{cases}\quad(j=1,\cdots,d),$$

则

$$x_j-w_j^{(i_0)}=\begin{cases}t_j, & \text{当 } 2^{k-1}-t_j\geqslant t_j\\ -2^{k-1}+t_j, & \text{当 } 2^{k-1}-t_j<t_j\end{cases}\quad(j=1,\cdots,d).$$

显然 $\{V(w^{(i)},2^k),1\leqslant i\leqslant 2^d\}$ 中以 $V(w^{(i_0)},2^k)$ 的中心 $w^{(i_0)}$ 到 x 的距离最近,且

$$|\pi_j(w^{(i_0)}-x)|\leqslant 2^{k-2}.\quad j=1,\cdots,d.$$

由上述不等式及 $x\in\tilde{V}(x,2^k)=V(w^{(i_0)},2^k)$,及 x 是 $V(x,2^n)$ 的中心($\forall\ n\geqslant 1,x\in\mathbb{Z}^d$)可得

$$V(x,2^{k+1})\supset\tilde{V}(x,2^k)\supset V(x,2^{k-1}).$$

本节恒令 $V_n=V(0,2^n),(n\geqslant 0)$, $S_1=V_1$, $S_n=V_n-V_{n-1}(n\geqslant 2)$. 易见 $\{S_n,n\geqslant 2\}$ 是一列立方体壳, S_n 的边长是 2^n, S_n 的壳厚是 2^{n-1}, S_n 的中心是 $(-\frac{1}{2},\cdots,-\frac{1}{2})\in\mathbb{R}^d$.

不特别声明, $C(x,n)$, $V(x,n)$ 亦如前所定义.

定义 5.2　令 $\Phi_1=\{\varphi\in\Phi_0:\varphi$ 在$[0,\infty)$上定义且连续$\}$, $\forall\ \varphi\in\Phi_1$, $\forall\ A,F\subset\mathbb{Z}^d$, 且 F 是非空有界集. 令

$$\nu_\varphi(A,F)=\min\left\{\sum_{i=1}^m\varphi\left(\frac{s(B_i)}{s(F)}\right):\{B_1,\cdots,B_m\}\text{ 是 }A\cap F\text{ 的 }\mathscr{E}\text{ 覆盖}\right\},\tag{5.1}$$

$$\tilde{\nu}_\varphi(A,F)=\min\left\{\sum_{i=1}^m\varphi\left(\frac{s(B_i)}{s(F)}\right):\{B_1,\cdots,B_m\}\text{是 }A\cap F\text{ 的 }\mathscr{E}_d\text{ 覆盖}\right\},\tag{5.2}$$

$$m_\varphi(A)=\sum_{n=1}^\infty\nu_\varphi(A,S_n);\ \tilde{m}_\varphi(A)=\sum_{n=1}^\infty\tilde{\nu}_\varphi(A,S_n).\tag{5.3}$$

当 $\varphi(s)=s^\alpha$ 时, 简记 ν_φ、$\tilde{\nu}_\varphi$、m_φ、$\tilde{m}_\varphi$ 为 ν_α、$\tilde{\nu}_\alpha$、m_α、$\tilde{m}_\alpha$. 称

$$(\mathrm{D})\dim(A)=\inf\{\alpha>0:m_\alpha(A)<\infty\}\tag{5.4}$$

为 A 的离散的 Hausdorff 维数.

附注 5.2　(D)dim(A)的定义源于(5.1)及(5.3)式. 若令 $\mathscr{B}$ 为 $\mathbb{Z}^d$ 中全体开球, (5.1)式中的 $A\cap F$ 的 $\mathscr{E}$ 覆盖换为 $\mathscr{B}$ 覆盖, (5.3)、(5.4)式亦平行地定义, 这样定义出的(D)dim(A)与以前定义出的(D)dim(A)是一样的, 因为每一个边长为 r 的球含于一个边长为 r 的立方体内, 而此球又包含一个边长为 c_dr 的立方体.

我们再定义 $\mathbb{Z}^d$ 中的几个离散的维数.

定义 5.3　$\forall\ A\subset\mathbb{Z}^d$, 定义

$$(\mathrm{D})\dim_L(A)=\inf\{\alpha>0:\nu_\alpha(A,S_n)\to 0\},\tag{5.5}$$

$$(\mathrm{D})\underline{\dim}_M(A)=\varliminf_{n\to\infty}\frac{\log\#(A\cap V(0,n))}{\log\ n},\tag{5.6}$$

$$(\mathrm{D})\overline{\dim}_M(A)=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log\#(A\cap V(0,n))}{\log\ n},\tag{5.7}$$

若(5.6)、(5.7)相等, 则记其公共值为(D)$\dim_M(A)$.

命题 5.1 $\forall\ A\subset\mathbb{Z}^d$，总有

(1) A 是有限集 $\Rightarrow(\mathrm{D})\dim(A)=(\mathrm{D})\dim_L(A)$

$$=(\mathrm{D})\underline{\dim}_M(A)=(\mathrm{D})\overline{\dim}_M(A)=0;$$

(2) $0\leqslant(\mathrm{D})\dim_L(A)\leqslant(\mathrm{D})\dim(A)\leqslant(\mathrm{D})\overline{\dim}_M(A)\leqslant d$；

(3) $0\leqslant(\mathrm{D})\underline{\dim}_M(A)\leqslant(\mathrm{D})\overline{\dim}_M(A)\leqslant d.$

证 (1)设 A 为有限集，则当 n 充分大时，$A\cap S_n=\varnothing$，从而 $\nu_\varphi(A,S_n)=0\ (\forall\ \varphi\in\Phi_1)$. 因此$\forall\ \varphi\in\Phi_1$，总有 $m_\varphi(A)<\infty$，所以 $(\mathrm{D})\dim(A)=0$. 再注意(5.5)—(5.7)，可知 $(\mathrm{D})\dim_L(A)=(\mathrm{D})\underline{\dim}_M(A)=(\mathrm{D})\overline{\dim}_M(A)=0$.

(2) 令 $A\cap V_n=\{x^{(1)},\cdots,x^{(k_n)}\}$，$B_i=C(x^{(i)},1)\ (i=1,\cdots,k_n)$，则有 $\varphi\left(\dfrac{s(B_i)}{s(S_n)}\right)=\varphi(2^{-n})\ (1\leqslant i\leqslant k_n)$，

$$\nu_\varphi(A,S_n)\leqslant k_n\varphi(2^{-n}).\tag{5.8}$$

所以，当 $\varphi(s)=s^\alpha$，$\alpha>(\mathrm{D})\overline{\dim}_M(A)$时，即当

$$\alpha>\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log\#(A\cap V_n)}{\log 2^n}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log k_n}{\log 2^n},\ \varphi(s)=s^\alpha$$

时，总有 $0<\varepsilon<1$，使

$$k_n\leqslant 2^{\alpha n(1-\varepsilon)}\ (\text{当 } n \text{ 充分大}).\tag{5.9}$$

由(5.8)、(5.9)并注意 $\varphi(s)=s^\alpha$ 及 $m_\alpha(A)$之定义知 $m_\alpha(A)<\infty$ (当 $\alpha>(\mathrm{D})\overline{\dim}_M(A)$时). 因此，由$(\mathrm{D})\dim(A)$之定义知

$$(\mathrm{D})\dim(A)\leqslant(\mathrm{D})\overline{\dim}_M(A).$$

再注意$\#(A\cap V(0,n))\leqslant\#V(0,n)=n^d$ 可知

$$(\mathrm{D})\overline{\dim}_M(A)\leqslant d.$$

而(2)中其它不等式由定义立得.

(3) 由定义直接可得.

命题 5.2 (1) $\nu_\varphi(A,F)$、$m_\varphi(A)$对 $\varphi\in\Phi_1$，$A\subset\mathbb{Z}^d$来说，都是单调增的，特别地，

(a) $\alpha\leqslant\beta\Rightarrow m_\alpha(A)\geqslant m_\beta(A)\ (\forall\ A\subset\mathbb{Z}^d)$；

(b) $\alpha<(\mathrm{D})\dim(A)\Rightarrow m_\alpha(A)=\infty$；

(c)　$\alpha>(\mathrm{D})\dim(A)\Rightarrow m_\alpha(A)<\infty$.

(2)　$\forall\ \varphi\in\Phi_1$，总有"$m_\varphi(A)<\infty\Leftrightarrow\tilde{m}_\varphi(A)<\infty$".

(3)　$\forall\ \varphi\in\Phi_1, a>0, \psi(s)=\varphi(as)$，总有

$$\text{“}m_\varphi(A)<\infty\Leftrightarrow m_\psi(A)<\infty\text{”}.$$

(4)　$(\mathrm{D})\dim$ 具有有限稳定性，即 $\forall\ A, B\subset\mathbb{Z}^d$，均有 $(\mathrm{D})\dim(A\cup B)=(\mathrm{D})\dim(A)\vee(\mathrm{D})\dim(B)$.

证　(1)由定义立即可得.

(2)设$\{B_1,\cdots,B_m\}$是 $A\cap S_n$ 的一个"最优"的 $\mathscr{E}$ 覆盖，即是 $\bigcup_i B_i\supset A\cap S_n$，$B_i\in\mathscr{E}$，且

$$\nu_\varphi(A,S_n)=\sum_{i=1}^m\varphi\left(\frac{s(B_i)}{s(S_n)}\right).$$

(注意：由于 $A\cap S_n$ 是有界集，由 $\nu_\varphi(A,S_n)$ 的定义得知这样的$\{B_1,\cdots,B_m\}$是存在的.)则必存在$\{Q_{i,j}, 1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant 2^d\}\subset\mathscr{E}_d$ 使

$$B_i\subset\bigcup_{j=1}^{2^d}Q_{i,j},\quad s(Q_{i,j})\leqslant s(B_i).$$

因此

$$\tilde{\nu}_\varphi(A,S_n)\leqslant 2^d\nu_\varphi(A,S_n).\tag{5.10}$$

而由定义还有($\mathscr{E}_d\subset\mathscr{E}$)

$$\nu_\varphi(A,S_n)\leqslant\tilde{\nu}_\varphi(A,S_n).\tag{5.11}$$

由(5.10)、(5.11)即得(2).

(3)因为 $\varphi\in\Phi_1$ 具有"限制增长"性，所以

$$\text{“}m_\varphi(A)<\infty\Leftrightarrow m_\psi(A)<\infty\text{”}.$$

(4)设 $\alpha>(\mathrm{D})\dim(A)\vee(\mathrm{D})\dim(B)$，则由

$$\nu_\alpha(A\cup B,S_n)\leqslant\nu_\alpha(A,S_n)+\nu_\alpha(B,S_n)$$

得 $\alpha>(\mathrm{D})\dim(A\cup B)$. 所以

$$(\mathrm{D})\dim(A)\vee(\mathrm{D})\dim(B)\geqslant(\mathrm{D})\dim(A\cup B).$$

而上述不等式的反向不等式由 $m_\alpha(\cdot)$ 的单增性立即可得. 命题 5.2证毕.

命题 5.3　$\forall\ x\in\mathbb{Z}^d, A\subset\mathbb{Z}^d, \varphi\in\Phi_1$，均有

$$“m_\varphi(A)<\infty \Leftrightarrow m_\varphi(A+x)<\infty”.$$

证 设$\{B_{n,i},1\leqslant i\leqslant k_n\}$是$A\cap S_n$的一个“最优”$\mathscr{E}$覆盖（“最优”的含义见命题5.2(2)的证明）. 令$\varphi_0(s)=\varphi(\frac{1}{2}s)$, $\varphi_1(s)=\varphi(2s)$. 由于$n\geqslant n_0$(n_0充分大)时有

$$(A+x)\cap S_n\subset x+[(A\cap S_{n-1})\cup(A\cap S_n)\cup(A\cap S_{n+1})],$$

所以$\{x+B_{r,i},1\leqslant i\leqslant k_r,r=n-1,n,n+1\}$是$(A+x)\cap S_n$的$\mathscr{E}$覆盖，故

$$\begin{aligned}\nu_\varphi(A+x,S_n)&\leqslant\sum_{r=n-1}^{n+1}\sum_{i=1}^{k_r}\varphi\left(\frac{s(B_{r,i})}{s(S_n)}\right)\\&=\sum_{r=n-1}^{n+1}\sum_{i=1}^{k_r}\varphi\left(\frac{s(B_{r,i})}{s(S_r)}\cdot\frac{2^r}{2^n}\right)\\&=\nu_{\varphi_0}(A,S_{n-1})+\nu_\varphi(A,S_n)+\nu_{\varphi_1}(A,S_{n+1}).\end{aligned}\qquad(5.12)$$

由命题5.2(3)及(5.12)得知

$$m_\varphi(A)<\infty\Rightarrow m_\varphi(A+x)<\infty.$$

在上述推理中以$-x$代替x，得

$$m_\varphi(A+x)<\infty\Rightarrow m_\varphi(A)<\infty.$$

推论5.1 $\forall\ \varphi\in\Phi_1,\theta>1,A\subset\mathbb{Z}^d$，总有

$$“\sum_{n=1}^{\infty}\nu_\varphi(A,V(0,\theta^n)-V(0,\theta^{n-1}))<\infty\Leftrightarrow m_\varphi(A)<\infty”.$$

仿命题5.3的证明的推理可证推论5.1.

由推论5.1看出：以前在定义立方体壳S_m时，我们取$S_m=V(0,2^m)-V(0,2^{m-1})$，其实取任一几何序列$\{\theta^m,m\geqslant 0\}$来替代$\{2^m,m\geqslant 0\}$去定义$\{S_m\}$，都不影响$m_\varphi(A)$是否有穷，从而不影响维数(D)dim$(A)$.

命题5.4 设$\varphi\in\Phi_1$，且存在$0<\rho<1$使

$$\varphi(s)<\rho\varphi(2s)\ (\forall\ 0\leqslant s<1),\qquad(5.13)$$

则$\forall\ A\subset\mathbb{R}^d$，均有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\nu_\varphi(A,V_n)<\infty\Leftrightarrow m_\varphi(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_\varphi(A,S_n)<\infty.\qquad(5.14)$$

注意：当 $\varphi(s)=s^{\alpha}(\alpha>0)$，$\rho=2^{-\alpha}$ 时，(5.13)式成立.

证　因为 $V_n\supset S_n$，$s(V_n)=s(S_n)$，所以

$$“\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{\varphi}(A,V_n)<\infty\Rightarrow m_{\varphi}(A)<\infty”.$$

设 $m_{\varphi}(A)<\infty$. 令 $\{B_1,\cdots,B_k\}$、$\{C_1,\cdots,C_l\}$ 分别为 $A\cap S_n$ 与 $A\cap V_{n-1}$ 的最优 $\mathscr{E}$ 覆盖，即 $\{B_i\}\subset\mathscr{E}$，$\{C_j\}\subset\mathscr{E}$，$\bigcup\limits_i B_i\supset A\cap S_n$，$\bigcup\limits_j C_j\supset A\cap V_{n-1}$，且

$$\nu_{\varphi}(A,S_n)=\sum_{i=1}^{k}\varphi\left(\frac{s(B_i)}{s(S_n)}\right),\nu_{\varphi}(A,V_{n-1})=\sum_{j=1}^{l}\varphi\left(\frac{s(C_j)}{s(V_{n-1})}\right). \tag{5.15}$$

则

$$A\cap V_n=(A\cap S_n)\cup(A\cap V_{n-1})\subset\bigcup_{i=1}^{k}B_i\cup\bigcup_{j=1}^{l}C_j, \tag{5.16}$$

所以，由 ν_{φ} 的定义和(5.16)、(5.14)、(5.15)得：

$$\begin{aligned}\nu_{\varphi}(A,V_n)&\leqslant\sum_{i=1}^{k}\varphi\left(\frac{s(B_i)}{2^n}\right)+\sum_{j=1}^{l}\varphi\left(\frac{s(C_j)}{2^n}\right)\\&\leqslant\nu_{\varphi}(A,S_n)+\sum_{j=1}^{l}\rho\varphi\left(\frac{s(C_j)}{2^{n-1}}\right)\\&=\nu_{\varphi}(A,S_n)+\rho\nu_{\varphi}(A,V_{n-1}).\end{aligned} \tag{5.17}$$

由(5.17)得

$$\nu_{\varphi}(A,V_n)\leqslant\sum_{m=1}^{n}\rho^{n-m}\nu_{\varphi}(A,S_m). \tag{5.18}$$

把(5.18)对 n 求和并注意 $0<\rho<1$ 及 $m_{\varphi}(A)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu_{\varphi}(A,S_n)<\infty$ 得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\nu_{\varphi}(A,V_n)<\infty.$$

命题 5.4 证毕.

关于(D)$\dim_L$，我们有

命题 5.5　$\forall\ x\in\mathbb{Z}^d$，$A,B\subset\mathbb{Z}^d$，$\varphi\in\Phi_1$，总有：

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty}\nu_{\varphi}(A,V_n)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\nu_{\varphi}(A,V(x,2^n))=0$；

(2) $(D)\dim_L(A\cup B)=\max((D)\dim_L(A),(D)\dim_L(B))$;

(3) $(D)\dim_L(A)=\inf\{\alpha>0;\nu_\alpha(A,V_n)\to 0\}$.

证 (1)可由 $s(V_n)=s(V(x,2^n))=2^n$ 及

$$A\cap V(0,2^n)\subset A\cap V(x,2^{m+n})\subset A\cap V(0,2^{2m+n})$$

(m 充分大)而得.

(2)的证明仿命题 5.2(4).

(3)的证明仿命题 5.4. 注意:这时取 $\varphi(s)=s^\alpha,\rho=2^{-\alpha}(\alpha>0)$.

下面我们将要引进$\mathbb{Z}^d$上的离散的 Packing 维数(D)Dim.

定义 5.4 设 $A\subset\mathbb{Z}^d,\varphi\in\Phi_1$. $\forall\ 0<\varepsilon<1,\forall$ 非空有限集 $F\subset\mathbb{Z}^d$,令

$$\tau_\varphi(A,F,\varepsilon)=\max\left\{\begin{array}{l}\sum_{i=1}^m\varphi\left(\frac{r_i}{s(F)}\right):x_i\in A\cap F,1\leqslant r_i\leqslant s(F)^{1-\varepsilon},\\ \{V(x_i,r_i)\}\text{两两不交.}\end{array}\right\},\tag{5.19}$$

$$\tilde{\tau}_\varphi(A,F,\varepsilon)=\max\left\{\begin{array}{l}\sum_{i=1}^m\varphi\left(\frac{2^{k_i}}{s(F)}\right):x_i\in A\cap F,1\leqslant 2^{k_i}\leqslant s(F)^{1-\varepsilon},\\ \{\tilde{V}(x_i,2^{k_i})\}\text{两两不交.}\end{array}\right\},\tag{5.20}$$

其中 $\tilde{V}(x_i,2^{k_i})$的定义见定义 5.1 后面. 再令

$$p_\varphi(A,\varepsilon)=\sum_{n=1}^\infty\tau_\varphi(A,S_n,\varepsilon),\tag{5.21}$$

$$\tilde{p}_\varphi(A,\varepsilon)=\sum_{n=1}^\infty\tilde{\tau}_\varphi(A,S_n,\varepsilon).\tag{5.22}$$

称 A 是 φ-Packing 有限的,如果 $p_\varphi(A,\varepsilon)<\infty$对任何 $\varepsilon>0$ 成立. 称

$$(D)\mathrm{Dim}(A)=\inf\{\alpha>0;A\text{ 是 }s^\alpha\text{-Packing 有限的}\}$$

是 A 的离散的 Packing 维数.

命题 5.6 $\forall\ A\subset\mathbb{Z}^d,\varphi\in\Phi_1,\varepsilon>0$,总有

(1) $p_\varphi(A,\varepsilon)<\infty\Leftrightarrow\tilde{p}_\varphi(A,\varepsilon)<\infty$;

(2)　$m_\varphi(A)\leqslant p_\varphi(A,\varepsilon)$；

(3)　$0\leqslant(\mathrm{D})\dim(A)\leqslant(\mathrm{D})\mathrm{Dim}(A)\leqslant d$.

证　(1)　设 $2^{k_i}\geqslant r_i>2^{k_i-1}$，则

$$V(x_i,2^{k_i-1})\subset V(x_i,r_i)\subset V(x_i,2^{k_i}). \tag{5.23}$$

又因为 $\widetilde{V}(x,2^k)$ 是边长为 2^k 的包含 x 的那 2^d 个半二进制立方体中其中心到 x 最近的那一个，所以由附注 5.1 有：

$$\widetilde{V}(x,2^{k-1})\subset V(x,2^k)\subset\widetilde{V}(x,2^{k+1})\ (\forall\ x\in\mathbb{Z}^d,k\geqslant 1). \tag{5.24}$$

由(5.23)、(5.24)得

$$\widetilde{V}(x_i,2^{k_i-2})\subset V(x_i,r_i)\subset\widetilde{V}(x_i,2^{k_i+1}). \tag{5.25}$$

所以，由 τ_φ、$\tilde{\tau}_\varphi$ 的定义及(5.25)和 φ 的限制增长性条件(设限制增长常数为 K)有：

$$K^{-2}\tau_\varphi(A,F,\varepsilon)\leqslant\tilde{\tau}_\varphi(A,F,\varepsilon)\leqslant K^2\tau_\varphi(A,F,\varepsilon). \tag{5.26}$$

由 $p_\varphi(A,\varepsilon)$、$\tilde{p}_\varphi(A,\varepsilon)$ 的定义及(5.26)得：

$$p_\varphi(A,\varepsilon)<\infty\Leftrightarrow\tilde{p}_\varphi(A,\varepsilon)<\infty.$$

(2)　令 $A\cap S_n=\{x_1^{(n)},\cdots,x_{k_n}^{(n)}\}$ $(n\geqslant 1)$，由于 $C(x_i^{(n)},1)=V(x_i^{(n)},1)=\{x_i^{(n)}\}$，所以 $\{x_i^{(n)}\}_1^{k_n}$ 既是 $A\cap S_n$ 的覆盖又是 $A\cap S_n$ 的 Packing. 因此，由 τ_φ、ν_φ 的定义知：

$$\tau_\varphi(A,S_n,\varepsilon)\geqslant\sum_{i=1}^{k_n}\varphi\left(\frac{1}{s(S_n)}\right)\geqslant\nu_\varphi(A,S_n), \tag{5.27}$$

从而 $p_\varphi(A,\varepsilon)\geqslant m_\varphi(A)$ $(\varepsilon>0)$.

(3)　由(2)及命题 5.1(2)即得(3)中的第二个不等式. 而第一个不等式是显然的. 最后证第三个不等式. 事实上，不妨设 $d\geqslant 2$ ($d=1$ 更简单)，若令 $\tau_{\varphi}=\tau_\alpha$，并注意 $s(S_n)=2^n$，$\# S_n=2^{nd}-2^{(n-1)d}$，则 $\forall\ \delta>0$，总有

$$\tau_{d+\delta}(A,S_n,\varepsilon)$$
$$\leqslant\max\left\{\sum_i\left(\frac{r_i}{2^n}\right)^{d+\delta}:x_i\in S_n,\{V(x_i,r_i)\}\text{两两不交},\ 1\leqslant r_i\leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}\right\}. \tag{5.28}$$

但是

$$“x_i \in S_n, \{V(x_i, r_i)\}\text{两两不交}, 1 \leqslant r_i \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}”$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow“\sum_i r_i^d &= \{V(x_i, r_i)\}\text{中点的个数}\\ &\leqslant K_d 2^n \cdot 2^{n(1-\varepsilon)} + (2^{nd} - 2^{(n-1)d})\\ &\leqslant K_d' 2^{nd}”,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\tau_{d+\delta}(A, S_n, \varepsilon)\\ &\quad\leqslant \max\left\{\sum_{\Sigma r_i^d \leqslant K_d' 2^{nd}} \left(\frac{r_i}{2^n}\right)^{d+\delta} : 1 \leqslant r_i \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}\right\}\\ &\quad\leqslant 2^{-n(d+\delta)} \cdot 2^{n\delta(1-\varepsilon)} K_d' \cdot 2^{nd}\\ &\quad\leqslant K_d' 2^{-n\delta\varepsilon}.\end{aligned} \tag{5.29}$$

所以

$$p_{d+\delta}(A, \varepsilon) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\delta\varepsilon} < \infty \quad (\forall\ A \subset \mathbb{Z}^d, \varepsilon > 0),$$

从而(D)Dim$(A) \leqslant d$. 命题 5.6 证毕.

类似于 $\nu_\varphi(A, F)$、$m_\varphi(A)$，关于 $\tau_\varphi(A, F, \varepsilon)$、$p_\varphi(A, \varepsilon)$，我们有

命题 5.7 $\forall\ \varphi \in \Phi_1, A, F \subset \mathbb{Z}^d$，$F$ 是非空有限集，均有

(1) $\tau_\varphi(A, F, \varepsilon)$、$p_\varphi(A, \varepsilon)$ 对 φ 和 A 均为单增的，对 ε 均为单降的；

(2) $\alpha <$ (D)Dim$(A) \Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0$，使 $p_\varphi(A, \varepsilon) = \infty$；

(3) $\alpha >$ (D)Dim$(A) \Rightarrow p_\varphi(A, \varepsilon) < \infty$ $(\forall\ \varepsilon > 0)$；

(4) $\tau_\varphi(A, F, \varepsilon)$ 对 A 是半有限可加的；

(5) 若存在一个有限阶的多项式 $f(n)$，使

$$\#(A \cap S_n) \leqslant f(n) \quad (\forall\ n \geqslant 1),$$

则 $\forall\ \alpha > 0, \varepsilon > 0$，都有 $p_\alpha(A, \varepsilon) < \infty$，从而(D)Dim$(A) = 0$.

证 (1)—(4)由定义可直接验证，下面只证(5). 事实上，仿(5.29)有

$$\tau_\alpha(A, S_n, \varepsilon) \leqslant \max\left\{\sum_i \left(\frac{r_i}{2^n}\right)^\alpha : \begin{array}{l} x_i \in A \cap S_n, \{V(x_i, r_i)\} \\ \text{两两不交}, 1 \leqslant r_i \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)} \end{array}\right\}$$

$$\leqslant (\#(A\cap S_n))\left(\frac{2^{n(1-\varepsilon)}}{2^n}\right)^{\alpha}$$
$$\leqslant f(n)2^{-n\varepsilon\alpha},$$

所以

$$p_\alpha(A,\varepsilon)\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n)2^{-n\varepsilon\alpha}<\infty \quad (\forall\ \alpha>0,\varepsilon>0).$$

作为本节最后要引进的两个离散维数，是离散的上熵维数 $(\mathrm{D})\overline{\dim}_K$ 与离散的下熵维数 $(\mathrm{D})\underline{\dim}_K$.

定义 5.5　令 $N(r,B)$ 是 $\mathscr{E}$ 中边长为 r、中心在 B 的两两不交的立方体的最多个数. $\forall\ \varepsilon>0,\alpha>0,A,F\subset\mathbb{Z}^d$，$F$ 是非空有限集，令

$$H_\alpha(A,F,\varepsilon)=\max_{1\leqslant r\leqslant s(F)^{1-\varepsilon}}\left\{\left(\frac{r}{s(F)}\right)^{\alpha}N(r,A\cap F)\right\},$$
$$J_\alpha(A,F,\varepsilon)=\min_{1\leqslant r\leqslant s(F)^{1-\varepsilon}}\left\{\left(\frac{r}{s(F)}\right)^{\alpha}N(r,A\cap F)\right\},$$

其中 $s(F)$ 如前定义为 F 的边长，定义

$$(\mathrm{D})\overline{\dim}_K(A)=\inf\{\alpha>0:\lim_{n\to\infty}H_\alpha(A,S_n,\varepsilon)=0,\forall\ \varepsilon>0\},$$

$$(\mathrm{D})\underline{\dim}_K(A)=\inf\{\alpha>0:\exists\ \varepsilon>0\ 使\ \lim_{n\to\infty}J_\alpha(A,S_n,\varepsilon)=0\},$$

称 $(\mathrm{D})\overline{\dim}_K(A)$、$(\mathrm{D})\underline{\dim}_K(A)$ 分别为 A 的离散的上熵维数与 A 的离散的下熵维数. 若它们相等，则记其公共值为 $(\mathrm{D})\dim_K(A)$.

命题 5.8　$\forall\ A\subset\mathbb{Z}^d$，总有：

(1)　$0\leqslant(\mathrm{D})\underline{\dim}_K(A)\leqslant(D)\overline{\dim}_K(A)\leqslant d$；

(2)　$(\mathrm{D})\dim(A)\leqslant(\mathrm{D})\underline{\dim}_K(A)\leqslant(\mathrm{D})\overline{\dim}_M(A)$；

(3)　$(\mathrm{D})\mathrm{Dim}(A)=(\mathrm{D})\overline{\dim}_K(A)$；

(4)　$(\mathrm{D})\overline{\dim}_M(A)\leqslant(\mathrm{D})\overline{\dim}_K(A)$.

证　(1)　只需证(1)的最后一个不等式. 事实上，由于 $N(r,S_n)\leqslant N(r,V_n)\leqslant(\frac{2^n}{r}+1)^d$，所以对任何 $\delta>0$，总有

$$H_{d+\delta}(A,S_n,\varepsilon)\leqslant\max_{1\leqslant r\leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}}\left\{\left(\frac{r}{2^n}\right)^{d+\delta}N(r,A\cap S_n)\right\}$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant r\leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}}\left\{\left(\frac{r}{2^n}\right)^{d+\delta}\left(\frac{2^n}{r}+1\right)^{d}\right\}$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant r\leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}}2^d\cdot\frac{r^\delta}{2^{n\delta}}\leqslant 2^d2^{-n\delta\varepsilon}\to 0\ (n\to\infty).$$

故(D)$\overline{\dim}_K(A)\leqslant d$.

(2) 令(D)$\underline{\dim}_K(A)=\eta$. $\forall\ \beta>0$, 由 η 的定义得知:$\exists\ n_0$, 当 $n\geqslant n_0$时均有对应的 $r_n\leqslant s(S_n)^{1-\varepsilon}=2^{n(1-\varepsilon)}$, 使

$$\left(\frac{r_n}{2^n}\right)^{\eta+\frac{1}{2}\beta}N(r_n,A\cap S_n)\leqslant 1\ (n\geqslant n_0).\tag{5.30}$$

由于 $N(r_n,A\cap S_n)$是中心在 $A\cap S_n$ 的边长为 r_n 的不交的立方体的最多个数,所以若令此 $N(r_n,A\cap S_n)$个立方体为 $V(x_i,r_n)$ (x_i 是它的中心,r_n 是它的边长,$i=1,2,\cdots,N(r_n,A\cap S_n)$),把这些立方体的边长放大二倍得 $B_i=V(x_i,2r_n)$,由"$x\in A\cap S_n\Rightarrow V(x,r_n)\cap(\bigcup_i V(x_i,r_n))\neq\varnothing$"得

$$\bigcup_{i=1}^{N(r_n,A\cap S_n)}B_i\supset A\cap S_n.\tag{5.31}$$

因此,由 $\nu_\alpha(A,S_n)$的定义和 $r_n\leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}(n\geqslant n_0)$及(5.30)有:

$$\nu_{\eta+\beta}(A,S_n)\leqslant\sum_{i=1}^{N(r_n,A\cap S_n)}\left(\frac{s(B_i)}{s(S_n)}\right)^{\eta+\beta}$$

$$=N(r_n,A\cap S_n)\left(\frac{2r_n}{2^n}\right)^{\eta+\beta}$$

$$\leqslant\left(\frac{2^n}{r_n}\right)^{\eta+\frac{1}{2}\beta}\left(\frac{2r^n}{2^n}\right)^{\eta+\beta}$$

$$=r_n^{\frac{1}{2}\beta}\cdot 2^{-\frac{1}{2}n\beta}\cdot 2^{\eta+\beta}$$

$$\leqslant 2^{\eta+\beta}\cdot 2^{-\frac{1}{2}n\varepsilon\beta}\qquad(n\geqslant n_0).\tag{5.32}$$

由(5.32)得 $m_{\eta+\beta}(A)<\infty$ ($\forall\ \beta>0$),所以

$$\text{(D)}\dim(A)\leqslant\text{(D)}\underline{\dim}_K(A)=\eta.$$

再令 $b=(\mathrm{D})\overline{\dim}_M(A)$，任取 $\beta>0$. 则由 $N(r,B)$ 和 $(\mathrm{D})\overline{\dim}_M(A)$ 的定义得

$$\begin{aligned}N(1,A\cap S_n)&=\#(A\cap S_n)\leqslant\#(A\cap V_n)\\&\leqslant 2^{n(b+\beta)}\qquad(n\geqslant n_0).\end{aligned}\tag{5.33}$$

再用 $J_a(A,F,\varepsilon)$ 的定义有

$$J_{b+2\beta}(A,S_n,\varepsilon)\leqslant\left(\frac{1}{2^n}\right)^{b+2\beta}N(1,A\cap S_n).\tag{5.34}$$

由(5.33)、(5.34)有

$$J_{b+2\beta}(A,S_n,\varepsilon)\leqslant 2^{-n\beta},\ (n\geqslant n_0).\tag{5.35}$$

由(5.35)知

$$\lim_{n\to\infty}J_{b+2\beta}(A,S_n,\varepsilon)=0\ (\forall\ \varepsilon>0),$$

由 $\beta>0$ 可任意小得

$$(\mathrm{D})\underline{\dim}_K(A)\leqslant b=(\mathrm{D})\overline{\dim}_M(A).$$

(3)　先证 $(\mathrm{D})\mathrm{Dim}(A)\geqslant(\mathrm{D})\overline{\dim}_K^{\bullet}(A)$. 任取 $\beta<(\mathrm{D})\overline{\dim}_K(A)$，必存在 $\varepsilon>0$，使 $\{H_\beta(A,S_n,\varepsilon),n\geqslant 1\}$ 无界.（若对任何 $\varepsilon>0$，$\{H_\beta(A,S_n,\varepsilon)\}$ 有界，则取 $\beta<\beta'<(\mathrm{D})\overline{\dim}_K(A)$，必有

$$\begin{aligned}H_{\beta'}(A,S_n,\varepsilon)&=\max_{1\leqslant r\leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}}\left\{\left(\frac{r}{2^n}\right)^{\beta'}N(r,A\cap S_n)\right\}\\&\leqslant 2^{-n\varepsilon(\beta'-\beta)}\sup_{n\geqslant 1}\left[\max_{1\leqslant r\leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}}\left\{\left(\frac{r}{2^n}\right)^{\beta}N(r,A\cap S_n)\right\}\right]\\&=2^{-n\varepsilon(\beta'-\beta)}\sup_{n\geqslant 1}H_\beta(A,S_n,\varepsilon)\to 0\ (n\to\infty),\end{aligned}$$

从而 $(\mathrm{D})\overline{\dim}_K(A)\leqslant\beta'$，矛盾.）因此存在无穷多个 n 使

$$\max_{1\leqslant r\leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}}\left\{\left(\frac{r}{2^n}\right)^{\beta}N(r,S_n\cap A)\right\}>1,$$

从而存在无穷多个 n，使

$$r_n\leqslant 2^{n(1-\varepsilon)},N(r_n,A\cap S_n)\geqslant\left(\frac{2^n}{r_n}\right)^{\beta}.\tag{5.36}$$

由于有 $N(r_n,A\cap S_n)$ 个中心在 $A\cap S_n$ 的边长为 r_n 的两两不交的立方体，所以由 $\tau_\beta(A,S_n,\varepsilon)$ 的定义及(5.36)有

$$\tau_{\beta}(A,S_n,\varepsilon)\geqslant\left(\frac{r_n}{2^n}\right)^{\beta}N(r_n,A\cap S_n)\geqslant 1$$

（对无穷多个 n 成立）. 因此 $p_{\beta}(A,\varepsilon)=\infty$，所以由命题 5.7(3) 知 (D)Dim$(A)\geqslant\beta$. 由 $\beta<$(D)$\overline{\dim}_K(A)$ 可任意接近 (D)$\overline{\dim}_K(A)$，所以，(D)Dim$(A)\geqslant$(D)$\overline{\dim}_K(A)$.

再证 (D)Dim$(A)\leqslant$(D)$\overline{\dim}_K(A)$. 令 $\alpha=$(D)$\overline{\dim}_K(A)$，任取 $\delta>0$. 为证上述论断，只需证 (D)Dim$(A)\leqslant\alpha+\delta$. 由命题 5.6(1)，在计算 (D)Dim$(A)$ 时，我们可以用估计 $\tilde{\tau}_{\alpha+\delta}(A,S_n,\varepsilon)$ 来替代 $\tau_{\alpha+\delta}(A,S_n,\varepsilon)$. 设 $\tilde{V}(x,2^k)$ 如定义 5.1 后面所定义，则由 $\tilde{\tau}_{\alpha+\delta}$ 的定义有

$$\tilde{\tau}_{\alpha+\delta}(A,S_n,\varepsilon)\leqslant\sum_{k=1}^{(1-\varepsilon)n}\left(\sum_{i=1}^{M_k}\left(\frac{2^k}{s(S_n)}\right)^{\alpha+\delta}\right),\qquad(5.37)$$

其中 $M_k=\max\{M:\{\tilde{V}(x_i,2^{k_i}),1\leqslant i\leqslant M\}$ 两两不交，

$$x_i\in A\cap S_n,1\leqslant 2^{k_i}\leqslant 2^k\}.$$

由于 $\tilde{V}(x_i,2^{k_i})$ 的中心为 $y_i=2^{k_i-1}\cdot z_i,z_i\in\mathbb{Z}^d$，$\tilde{V}(x_i,2^{k_i})$ 是其中心 y_i 到 x_i 最近的边长为 2^{k_i} 的含 x 的那一个半二进制立方体，而 $\{\tilde{V}(x_i,2^{k_i}),i=1,\cdots,M_k\}$ 两两不交，所以由附注 5.1 知 $\{V(x_i,2^{k_i-1}),i=1,\cdots,M_k\}$ 两两不交. 又因为 $x_i\in A\cap S_n$，所以由定义有

$$M_k\leqslant N(2^{k-1},A\cap S_n).\qquad(5.38)$$

但是，由 (D)$\overline{\dim}_K(A)$ 的定义有

$$H_{\alpha+\frac{1}{2}\delta}(A,F_n,\varepsilon)=\max_{1\leqslant r\leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}}\left\{\left(\frac{r}{2^n}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}\delta}\cdot N(r,S\cap A_n)\right\}$$
$$\to 0\ (\text{当 } n\to\infty).\qquad(5.39)$$

所以，当 n 充分大后有

$$N(2^{k-1},A\cap S_n)\leqslant\left(\frac{2^{k-1}}{2^n}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}\delta}.\qquad(5.40)$$

将 (5.38)、(5.40) 代入 (5.37) 得

$$\tilde{\tau}_{\alpha+\delta}(A,S_n,\varepsilon)\leqslant\sum_{k=1}^{(1-\varepsilon)n}\left(\frac{2^{k-1}}{2^n}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}\delta}\left(\frac{2^k}{2^n}\right)^{\alpha+\delta}$$
$$\leqslant C2^{-\frac{1}{2}n\varepsilon\delta}\quad(n\text{ 充分大}),\tag{5.41}$$

其中 C 为正常数. 由(5.41)得 $\tilde{p}_{\alpha+\delta}(A,\varepsilon)<\infty$, ($\forall\ \varepsilon>0$), 故 (D)Dim$(A)\leqslant\alpha+\delta=$ (D)$\overline{\dim}_K(A)+\delta$, 由 $\delta>0$ 可任意小得 (D)Dim$(A)\leqslant$(D)$\overline{\dim}_K(A)$.

(4)　设 $\beta>$(D)$\overline{\dim}_K(A)$. 易证 $N(1,A\cap S_n)=o(2^{n\beta})$ (当 $n\to\infty$ 时). 但是 $N(1,B)=\# B$, 所以 $N(1,A\cap V(0,2^n))=\sum_{k=1}^{n}N(1,A\cap S_k)=o(2^{n\beta})$, 从而由 (D) $\overline{\dim}_M(A)$ 的定义知 (D)$\overline{\dim}_M(A)\leqslant\beta$. 由 $\beta>$(D)$\overline{\dim}_K(A)$ 可任意接近(D)$\overline{\dim}_K(A)$, 得 (D)$\overline{\dim}_M(A)\leqslant$(D)$\overline{\dim}_K(A)$.

定理 5.1　$\forall\ A\subset\mathbb{Z}^d$, 总有

$$0\leqslant(\mathrm{D})\dim_L(A)\leqslant(\mathrm{D})\dim(A)\leqslant(\mathrm{D})\underline{\dim}_K(A)$$
$$\leqslant(\mathrm{D})\overline{\dim}_M(A)\leqslant(\mathrm{D})\overline{\dim}_K(A)=(\mathrm{D})\mathrm{Dim}(A)\leqslant d.$$

证　由命题 5.1、命题 5.6、命题 5.8 即得定理 5.1.

对$\mathbb{R}^d$空间中的 Hausdorff 维数与 Packing 维数的计算, 我们曾介绍过两个计算维数的有用的定理——密度定理和 Frostman 引理. 在这一节中, 我们也将介绍两个类似的定理, 作为计算$\mathbb{Z}^d$中的离散的 Hausdorff 维数(D)dim(A)和离散的 Packing 维数 (D)Dim(A)的工具.

定理 5.2　(离散的密度定理, [16]) 设 $A\subset F\subset\mathbb{Z}^d$, F 是非空有限集, $s(F)=2^M$, μ 是定义在 A 上的可数可加测度, $\varphi\in\Phi_1$, K_φ 是 φ 的限制增长常数.

(1)　若

$$\mu(A\cap V(x,2^m))\leqslant a_1\varphi(2^{m-M})\quad(\forall\ x\in\mathbb{Z}^d,0\leqslant m\leqslant M),\tag{5.42}$$

则有

$$\nu_\varphi(A,F)\geqslant 2^{-d}a_1^{-1}\mu(A),\tag{5.43}$$

$$\tilde{\tau}_\varphi(A,F,\varepsilon)\geqslant a_1^{-1}\mu(A)K_\varphi{}^3(\forall\ 0<\varepsilon<1);\qquad(5.43)'$$

(2) 若存在某个 $r,0\leqslant r\leqslant M$,使

$$\mu(A\cap V(x,2^r))\geqslant a_1\varphi(2^{r-M})\ (\forall\ x\in A),\qquad(5.44)$$

则有

$$\nu_\varphi(A,F)\leqslant K_\varphi a_1^{-1}\mu(A);\qquad(5.45)$$

(3) 若

$$\mu(A\cap\tilde{V}(x,2^r))\geqslant a_1\varphi(2^{r-M})\ (\forall\ x\in A,\forall\ 0\leqslant r\leqslant M(1-\varepsilon)),\qquad(5.46)$$

则

$$\tilde{\tau}_\varphi(A,F,\varepsilon)\leqslant K_\varphi a_1^{-1}\mu(A),\qquad(5.47)$$

其中 a_1 是正常数.

证 (1) 设(5.42)成立. 令 $\{Q_i:1\leqslant i\leqslant m\}\subset\mathscr{E}_d,s(Q_i)=2^{q_i}$,且 $\{Q_i\}$ 是 $\nu_\varphi(A,F)$ 的最优 $\mathscr{E}_d$ 覆盖,则由"最优"性及(5.42)与 $\bigcup_{i=1}^m Q_i\supset AF=A$ 得:

$$\tilde{\nu}_\varphi(A,F)=\sum_{i=1}^m\varphi(2^{q_i-M})\geqslant a_1^{-1}\sum_{i=1}^m\mu(A\cap Q_i)$$
$$\geqslant a_1^{-1}\mu(A).\qquad(5.48)$$

仿(5.10)有

$$\nu_\varphi(A,F)\geqslant 2^{-d}\tilde{\nu}_\varphi(A,F).\qquad(5.49)$$

由(5.48)、(5.49)得(5.43).

令 $T=\max\{t:\{\tilde{V}(x_i,2^{r_i}),1\leqslant i\leqslant t\}$ 两两不交,

$x_i\in A\cap F=A,1\leqslant 2^{r_i}\leqslant 2^{M(1-\varepsilon)}\}$,

不妨令 $r_1=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant T}r_i$. $\forall\ x\in A\cap F=A$,

(A)设 $x\overline{\in}\{x_1,\cdots,x_T\}$,则由 T 的定义有

$$\tilde{V}(x,2^{r_1})\cap(\bigcup_{i=1}^T\tilde{V}(x_i,2^{r_i}))\neq\varnothing.\qquad(5.50)$$

因此,存在一个 $1\leqslant j\leqslant T$,存在 x^* 使

$$x^*\in\tilde{V}(x,2^{r_1})\cap\tilde{V}(x_j,2^{r_j}).\qquad(5.51)$$

令 $\tilde{V}(x_i,2^{r_i})$、$\tilde{V}(x,2^{r_1})$ 的中心分别为 $\bar{x}_i$、$\bar{x}$，$(i=1,\cdots,T)$，π_k 是$\mathbb{R}^d$到第 k 个坐标轴$\mathbb{R}$ 的投影算子，则由附注 5.1 得知：

$$|\pi_k(x_i-\bar{x}_i)|\leqslant 2^{r_i-2}\quad(k=1,\cdots,d,i=1,\cdots,T),$$

$$|\pi_k(x-\bar{x})|\leqslant 2^{r_1-2}\quad(k=1,\cdots,d).\tag{5.52}$$

由(5.51)和(5.52)知

$$\begin{aligned}|\pi_k(x-\bar{x}_j)|&\leqslant|\pi_k(x-\bar{x})|+|\pi_k(\bar{x}-x^*)|+|\pi_k(x^*-\bar{x}_j)|\\&\leqslant 2^{r_1-2}+2^{r_1-1}+2^{r_j-1}\\&\leqslant 2^{r_j+1}\qquad(k=1,\cdots,d).\end{aligned}$$

所以 $x\in\tilde{V}(x_j,2^{r_j+2})$.

(B) 若 $x\in\{x_1,\cdots,x_T\}$，显然有 $x\in\bigcup_{i=1}^{T}\tilde{V}(x_i,2^{r_i})$.

总之，由(A)、(B)知

$$A=A\cap F\subset\bigcup_{i=1}^{T}\tilde{V}(x_i,2^{r_i+2}).\tag{5.53}$$

但是，由 $\tilde{V}(x,r)$ 的定义还有

$$\tilde{V}(x,2^{k+1})\supset V(x,2^k)\supset\tilde{V}(x,2^{k-1})\ (\forall\ x\in\mathbb{Z}^d,k\geqslant 1).\tag{5.54}$$

所以，由$\{\tilde{V}(x_i,2^{r_i}),1\leqslant i\leqslant T\}$的定义及(5.42)、(5.53)、(5.54)得：

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_\varphi(A,F,\varepsilon)&\geqslant\sum_{i=1}^{T}\varphi\left(\frac{2^{r_i}}{2^M}\right)\geqslant\sum_{i=1}^{T}K_\varphi^{-3}\varphi\left(\frac{2^{r_i+3}}{2^M}\right)\\&\geqslant K_\varphi^{-3}a_1^{-1}\sum_{i=1}^{T}\mu(A\cap V(x_i,2^{r_i+3}))\\&\geqslant K_\varphi^{-3}a_1^{-1}\sum_{i=1}^{T}\mu(A\cap\tilde{V}(x_i,2^{r_i+2}))\\&=K_\varphi^{-3}a_1^{-1}\mu(A).\end{aligned}\tag{5.55}$$

其中 K_φ 是 φ 的限制增长系数.

(2)　设(5.44)成立. 取

$$T=\max\{t:\{V(x_i,2^r),1\leqslant i\leqslant t\}\text{两两不交},x_i\in A\}.$$

$\forall\ x\in A$，则由 T 的定义知 $V(x,2^r)\cap(\bigcup_{i=1}^{T}V(x_i,2^r))\neq\varnothing$，所以

$$x \in \bigcup_{i=1}^{T} V(x_i, 2^{r+1}).$$

此即$\{V(x_i, 2^{r+1}), 1 \leqslant i \leqslant T\}$是 A 的一个覆盖.因此,由 ν_φ 的定义及 φ 满足限制增长条件和(5.44)得

$$\nu_\varphi(A, F) \leqslant \sum_{i=1}^{T} \varphi\left(\frac{2^{r+1}}{2^M}\right) \leqslant K_\varphi \sum_{i=1}^{T} \varphi(2^{r-M})$$

$$\leqslant K_\varphi a_1^{-1} \sum_{i=1}^{T} \mu(A \cap V(x_i, 2^r)) \leqslant K_\varphi a_1^{-1} \mu(A).$$

(3) 设(5.46)成立.取$\{\tilde{V}(x_i, b_i), 1 \leqslant i \leqslant T\}$是 $\tilde{\tau}_\varphi(A, F, \varepsilon)$的一组最大 Packing(由 $A \cap F$ 是有限集,它一定存在),即是$\{\tilde{V}(x_i, b_i), 1 \leqslant i \leqslant T\}$两两不交,$x_i \in A \cap F = A$, $1 \leqslant b_i < s(F)^{1-\varepsilon} = 2^{M(1-\varepsilon)}$,且

$$\tilde{\tau}_\varphi(A, F, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{T} \varphi\left(\frac{b_i}{2^M}\right). \tag{5.56}$$

取 r_i 使 $2^{r_i} \leqslant b_i < 2^{r_i+1}$,则由 φ 的单增性、限制增长性、和(5.44)与$\{\tilde{V}(x_i, 2^{r_i}), 1 \leqslant i \leqslant T\}$的两两不交性,可得

$$\tilde{\tau}_\varphi(A, F, \varepsilon)$$

$$= \sum_{i=1}^{T} \varphi\left(\frac{b_i}{2^M}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{T} \varphi\left(\frac{2^{r_i+1}}{2^M}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{T} K_\varphi \varphi(2^{r_i-M})$$

$$\leqslant K_\varphi a_1^{-1} \sum_{i=1}^{T} \mu(A \cap \tilde{V}(x_i, 2^{r_i})) \leqslant K_\varphi a_1^{-1} \mu(A).$$

附注 5.3 此定理的最有用的不等式是(5.47)($\tilde{\tau}_\varphi$ 的上界)和(5.43)(ν_φ 的下界).

下面我们给出类似于经典的 Frostman 引理的离散形式:

定理 5.3([16]) 任取 $\varphi \in \Phi_1$, $A \subset V(0, K)$,总存在一个支撑在 A 上的可数可加的测度 μ,使得:

$$\mu(A) \geqslant \nu_\varphi(A, V(0, K)); \tag{5.57}$$

$$\mu(V(x, r)) \leqslant c_d \varphi\left(\frac{r}{k}\right), (\forall\ 1 \leqslant r \leqslant K, x \in A). \tag{5.58}$$

证 取 M 使 $2^{M-1} < K \leqslant 2^M$,令 $F = V(0, 2^M)$, $Q_r(x)$是如前已

定义的含 x 的边长为 2^r 的 $\mathscr{E}_d$ 中的唯一的那个二进制区间.

在 F 上定义 μ_0 如下：

$$\mu_0(\{x\})=\begin{cases}0, & \text{当 } x\overline{\in} A \\ \varphi\left(\frac{1}{K}\right), & \text{当 } x\in A.\end{cases} \tag{5.59}$$

归纳地定义 $\mu_1,\cdots,\mu_M$ 如下：设 $\mu_0,\cdots,\mu_r$ 已定义，$\forall\ x\in A$，令

$$\mu_{r+1}(\{x\})=\begin{cases}\mu_r(\{x\}), \text{当 } \mu_r(Q_{r+1}(x))\leqslant\varphi\left(\dfrac{2^{r+1}}{K}\right), \\ \lambda\mu_r(\{x\}), \text{当 } \mu_r(Q_{r+1}(x))>\varphi\left(\dfrac{2^{r+1}}{K}\right),\end{cases} \tag{5.60}$$

其中 $\lambda=\lambda_r(x)=\varphi(2^{r+1}/K)/\mu_r(Q_{r+1}(x))$（当 $\mu_r(Q_{r+1}(x))>\varphi(2^{r+1}/K)$时），

$\forall\ x\overline{\in}A$，令 $\mu_{r+1}(\{x\})=0$. 可证：$\forall\ x\in A,r\geqslant 0$，总有：

$$\mu_{r+1}(Q_{r+1}(x))=\begin{cases}\mu_r(Q_{r+1}(x)), \text{当 } \mu_r(Q_{r+1}(x))\leqslant\varphi\left(\dfrac{2^{r+1}}{K}\right); \\ \varphi(2^{r+1}/K), \text{当 } \mu_r(Q_{r+1}(x))>\varphi\left(\dfrac{2^{r+1}}{K}\right).\end{cases} \tag{5.61}$$

事实上，当 $y\in Q_{r+1}(x)$时，由 $\mathscr{E}_d^{r+1}$ 中含 y 的边长为 2^{r+1}的二进制立方体是唯一的，可知 $Q_{r+1}(y)=Q_{r+1}(x)$. 因此也有：
"$y\in Q_{r+1}(x),\mu_r(Q_{r+1}(x))>\varphi(2^{r+1}/K)\Rightarrow\lambda_r(y)=\lambda_r(x)$"，
故

$$\begin{aligned}\mu_{r+1}(Q_{r+1}(x))= & \sum_{\substack{y\in Q_{r+1}(x) \\ \mu_r(Q_{r+1}(y))\leqslant\varphi(2^{r+1}/K)}}\mu_r(\{y\}) \\ & +\sum_{\substack{y\in Q_{r+1}(x) \\ \mu_r(Q_{r+1}(y))>\varphi(2^{r+1}/K)}}\lambda_r(y)\mu_r(\{y\}) \\ = & \sum_{\substack{y\in Q_{r+1}(x) \\ \mu_r(Q_{r+1}(x))\leqslant\varphi(2^{r+1}/K)}}\mu_r(\{y\}) \\ & +\sum_{\substack{y\in Q_{r+1}(x) \\ \mu_r(Q_{r+1}(x))>\varphi(2^{r+1}/K)}}\lambda_r(x)\mu_r(\{y\})\end{aligned}$$

$$
=\begin{cases}\mu_r(Q_{r+1}(x)), \text{当}\ \mu_r(Q_{r+1}(x))\leqslant\varphi(2^{r+1}/K);\\ \varphi(2^{r+1}/K), \text{当}\ \mu_r(Q_{r+1}(x))>\varphi(2^{r+1}/K).\end{cases}
$$

令 $\mu=\mu_M$. $\forall\ x\in A$，由 μ 的构造得知必存在一个 $k\geqslant 0$，使 $\mu(Q_k(x))=\varphi(s(Q_k(x))/K)=\varphi(2^k/K)$.

事实上，令 $T=\max\{t:\mu_t(Q_t(x))=\varphi(\frac{2^t}{K}),t=0,1,\cdots,M\}$. 则由 $\mu_0(Q_0(x))=\mu_0(\{x\})=\varphi(2^0/K)$ 知上式右方集合非空. 再由 $\mu_t(Q_t(x))\leqslant\varphi(2^t/K)$ $(\forall\ t)$ 及 T 的定义得

$$
\mu_t(Q_t(x))<\varphi(2^t/K)\ \ (t>T). \tag{5.62}
$$

由(5.61)、(5.62)得

$$
\mu_{t-1}(Q_t(x))=\mu_t(Q_t(x))<\varphi(2^t/K)\ \ (t>T). \tag{5.63}
$$

由(5.63)及(5.60)和 $Q_t(x)$ 由 t,x 唯一决定可知($Q_t(x)$ 的唯一性推知：$y\in Q_t(x)\Rightarrow Q_t(y)=Q_t(x)$)：

$$
\mu_{t-1}(\{y\})=\mu_t(\{y\})\ \ (t>T,y\in Q_t(x)). \tag{5.64}
$$

由(5.64)及 $Q_t(x)$ 对 t 的单增性知

$$
\mu(\{y\})=\mu_M(\{y\})=\mu_{M-1}(\{y\})=\cdots=\mu_T(\{y\})\ \ (y\in Q_T(x)). \tag{5.65}
$$

由(5.65)知 $\mu(Q_T(x))=\mu_T(Q_T(x))=\varphi(2^T/K)$.

再令 $k(x)=\max\{k:\mu(Q_k(x))=\varphi(2^k/K)\}$，任取 $z,x,y\in A$，若 $x\neq y$，$z\in Q_{k(x)}(x)\bigcap Q_{k(y)}(y)$，则由 $Q_r(x)$ 由 x、r 唯一决定知 $Q_{k(x)}(x)=Q_{k(x)}(z)=Q_{k(x)}(y)$，由 $k(x)$ 的定义有

$$
\mu(Q_{k(x)}(z))=\mu(Q_{k(x)}(x))=\varphi(2^{k(x)}/K).
$$

再用 $k(z)$ 的最大性知 $k(z)\geqslant k(x)$. 由 $z\in Q_{k(x)}(x)\subset Q_{k(z)}(x)$ 得 $Q_{k(z)}(z)=Q_{k(z)}(x)$，所以

$$
\mu(Q_{k(z)}(x))=\mu(Q_{k(z)}(z))=\varphi(2^{k(z)}/K),
$$

再用 $k(x)$ 的最大性得 $k(x)\geqslant k(z)$. 总之 $k(x)=k(z)$. 仿之 $k(y)=k(z)$.

由上讨论得知：

"$x,y,z\in A,x\neq y,z\in Q_{k(x)}(x)\bigcap Q_{k(y)}(y)\Rightarrow$

$$Q_{k(x)}(x)=Q_{k(z)}(z)=Q_{k(y)}(y)".$$

这就说明$\{Q_{k(x)}^{(x)}: x\in A\}$中任取两个立方体,或者不交,或者恒等. 所以在上述有限个立方体中总可找出$\{\tilde{Q}_j: 1\leqslant j\leqslant m\}$满足:

(1) $\{\tilde{Q}_j\}$两两不交;

(2) $\bigcup\limits_j \tilde{Q}_j\supset A$;

(3) $\mu(\tilde{Q}_j)=\varphi(s(\tilde{Q}_j)/K)$, $\forall\ j$.

所以若注意 $\mu(\{x\})=0(\forall\ x\overline{\in} A)$及 $\tilde{\nu}_\varphi$、ν_φ 的定义有:

$$\mu(A)=\sum_{j=1}^{m}\mu(\tilde{Q}_j)=\sum_{j=1}^{m}\varphi(s(\tilde{Q}_j)/K)$$
$$\geqslant\tilde{\nu}_\varphi(A,V(0,K))\geqslant\nu_\varphi(A,V(0,K)).$$

(5.57)得证.

下证(5.58). $\forall\ 1\leqslant r\leqslant K, x\in A$. 取 n 使 $2^n<r\leqslant 2^{n+1}$. 由 n 的取法得知必存在$\{C_1,\cdots,C_u\}$是 $A\cap V(x,r)$的 $\mathscr{E}_d^n$ 覆盖,且 $u\leqslant 2^d$. 由 μ 的定义有 $\mu(Q_k(x))\leqslant\mu_k(Q_k(x))\leqslant\varphi(2^k/K)$,所以

$$\mu(V(x,r))\leqslant\sum_{i=1}^{u}\mu(C_i)\leqslant\sum_{i=1}^{u}\varphi(s(C_i)/K)$$
$$\leqslant 2^d\varphi(2^n/K)\leqslant 2^d\varphi(r/K).$$

定理证毕.

例 5.1　设 $L_k=\{x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{Z}^d: x_{k+1}=\cdots=x_d=0\}$是$\mathbb{Z}^d$中的 k 维超平面,则

$$k=(\mathrm{D})\dim_L(L_k)=(\mathrm{D})\dim(L_k)=(\mathrm{D})\underline{\dim}_K(L_k)$$
$$=(\mathrm{D})\overline{\dim}_K(L_k)=(\mathrm{D})\underline{\dim}_M(L_k)=(\mathrm{D})\overline{\dim}_M(L_k)$$
$$=(\mathrm{D})\mathrm{Dim}(L_k).$$

证　利用定理 5.1,为证上述结论,只需证明两点:(1) $(\mathrm{D})\dim_L(L_k)\geqslant k$;(2) $(\mathrm{D})\mathrm{Dim}(L_k)\leqslant k$.

事实上,$\forall\ \alpha\leqslant k, M\geqslant 1$,定义 $\mu(\{x\})=1(\forall\ x\in L_k\cap S_M)$,取 $\varphi(s)=s^\alpha$. 则有

$$\mu(L_k\cap V(x,2^m))\leqslant 2^{mk}\leqslant 2^{Mk}(2^{m-M})^{\alpha}\quad (\forall\ x\in\mathbb{Z}^d,0\leqslant m\leqslant M).$$

因此，由定理 5.2(1)知

$$\begin{aligned}\nu_\alpha(L_k,S_M)&\geqslant 2^{-d}2^{-Mk}\mu(L_k\cap S_M)\\&=2^{-(d+Mk)}((2^M)^k-(2^{M-1})^k)\\&=2^{-d}(1-2^{-k})\ (\forall\ M\geqslant 1).\end{aligned}$$

所以 $\nu_\alpha(L_k,S_M)$ 不趋于 0(当 $M\to\infty$ 时)，从而

$$(\mathrm{D})\dim_L(L_k)\geqslant k.$$

$\forall\ \alpha>k$，再令 $\tilde{\mu}(\{x\})=1\ (\forall\ x\in L_k)$，则

$$\begin{aligned}&\tilde{\mu}(L_k\cap\tilde{V}(x,2^r))=2^{rk}=2^{Mk}2^{(r-M)k}\\&\geqslant 2^{Mk}2^{M\varepsilon\alpha}(2^{r-M})^{\alpha},\\&x\in\mathbb{Z}^d,0\leqslant r\leqslant M(1-\varepsilon)(\text{此处取 }\varphi(s)=s^{\alpha}),\end{aligned}$$

所以由定理 5.2(3)得

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_\alpha(L_k,S_M)&\leqslant K_\varphi 2^{-M\varepsilon\alpha-Mk}\tilde{\mu}(L_k\cap S_M)\\&\leqslant K_\varphi 2^{-M\varepsilon\alpha}\quad (M\geqslant 1).\end{aligned}$$

所以 $p_\alpha(L_k,\varepsilon)<\infty,(\forall\ \varepsilon)$，从而$(\mathrm{D})\mathrm{Dim}(L_k)\leqslant k$.

例 5.2 均匀集 T_α.

设 $0<\alpha<d$，T_α 是按下列原则定义的集合：$\forall\ n\geqslant 1$，$T_\alpha\cap S_n$ 恰含 $2^{\alpha n}$ 个点且这 $2^{\alpha n}$ 个点均匀分布于 S_n 中. 则

$$\begin{aligned}(\mathrm{D})\dim_L(T_\alpha)&=(\mathrm{D})\dim(T_\alpha)=(\mathrm{D})\dim_M(T_\alpha)\\&=(\mathrm{D})\underline{\dim}_K(T_\alpha)=\alpha,\\(\mathrm{D})\overline{\dim}_K(T_\alpha)&=d.\end{aligned}$$

利用定理 5.2，直接计算可证上述论断(详细推导请见[16]p. 135).

例 5.3 令 $x=(1,0,\cdots,0)\in\mathbb{Z}^d$，$0<\gamma<1$，$\alpha>0$，

$$G_\gamma=\bigcup_{n=1}^{\infty}C(2^n x,2^{n\gamma}),$$

$$F_\alpha=\bigcup_{n=1}^{\infty}C(2^n x,(2+n)^{-\alpha}2^n),$$

$$E_\alpha=\bigcup_{j=1}^{\infty}C(2^{n_j}x,(2+n_j)^{-\alpha}2^{n_j}),$$

其中$\{n_j\}$是满足下列条件的正整数序列：对于任何 c，只要 j 充分大，总有 $n_{j+1}>n_j^c$. 则

$$(D)\dim_L(G_\gamma)=(D)\dim(G_\gamma)=(D)\underline{\dim}_K(G_\gamma)=0,$$

$$(D)\overline{\dim}_K(G_\gamma)=\gamma d;$$

$$(D)\dim_L(F_\alpha)=0,(D)\dim(F_\alpha)=d\wedge\frac{1}{\alpha},$$

$$(D)\dim_M(F_\alpha)=(D)\dim_K(F_\alpha)=(D)\mathrm{Dim}(F_\alpha)=d;$$

$$(D)\dim_L(E_\alpha)=(D)\underline{\dim}_M(E_\alpha)=0,$$

$$(D)\dim(E_\alpha)=d\wedge\frac{1}{\alpha},$$

$$(D)\overline{\dim}_M(E_\alpha)=(D)\dim_K(E_\alpha)=(D)\mathrm{Dim}(E_\alpha)=d.$$

利用定理 5.2 直接计算可证上述论断（详细推导请见[16]p.136）.

注意：由例 5.3 看出，在(D) $\underline{\dim}_M(A)$ 与(D) $\dim(A)$ 或(D)$\underline{\dim}_K(A)$之间没有必然的不等式成立. 这说明定理 5.1 中诸指数间不完全的序关系无法再填补.

定义 5.6　对任何 $A\subset\mathbb{Z}^d$，若(D)$\dim(A)$=(D)$\mathrm{Dim}(A)$，则称 A 是分形(Fractal)集.

第二章

Brown 运动中的随机分形

Brown 运动是我们很熟悉的一类随机过程. 它在随机过程的理论与应用中,具有极端的重要性与典型性. 一方面,它的概率分布与轨道具有独特的性质:它具有正态分布;它的轨道处处连续,但又无处可微. 这些属性,给研究带来许多方便和重要的启迪,致使人们对它十分感兴趣. 另一方面,近代概率论中绝大部分随机过程都以 Brown 运动为其特例. 一般说来,对一个专题的研究,往往是从 Brown 运动开始,再逐步推广到其它更广类型的随机过程. 这使得对 Brown 运动的研究不仅有它自身的重要性,而且也成为在更广类型随机过程的研究中产生新概念、新思想和新方法的源泉. 随机过程分形理论的发展也恰好经历了这么一个过程. 40 年代和 50 年代 Lévy、Besicovitch、Taylor、Mckean 等人研究了 Brown 运动的随机分形. 以后向两个方面发展,一是 Blumenthal、Getoor 等人先后研究了稳定过程、Lévy 过程的分形理论(保留 Brown 运动的独立增量性,但不要求轨道连续),二是 Kahane、Adler 等人先后研究了分数 Brown 运动、Gauss 场的分形理论(保留 Brown 运动轨道连续和正态分布的特性,但去掉独立增量性). 我们也大致按这个历史线索来介绍随机过程的分形理论. 这一章先介绍 Brown 运动中的随机分形.

给定$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取值于$\mathbb{R}^d$的随机过程$\{X_t:t\in\mathbb{R}^N\}$(不必是 Brown 运动),可以自然地派生出许多随机集合,我们所感兴趣的主要是下列几类:

像集　$X(E)=\{X_t(\omega):t\in E\},(E\subset\mathbb{R}^N)$

图集　$\mathrm{Gr}(X(E))=\{(t,X_t(\omega)):t\in E\},(E\subset\mathbb{R}^N)$

逆像集　$X^{-1}(F)=\{t:t\in\mathbb{R}^N,X_t(\omega)\in F\},(F\subset\mathbb{R}^d)$

水平集　$X^{-1}(x)=\{t:t\in\mathbb{R}^N,X_t(\omega)=x\},(x\in\mathbb{R}^d)$

k 重点集

$$L_k=\left\{x\in\mathbb{R}^d:\begin{array}{l}\exists\ \text{互不相同的}\ t_1,\cdots,t_k\in\mathbb{R}^N\\ \text{使得}\ X_{t_1}=\cdots=X_{t_k}=x\end{array}\right\}$$

k 重时集

$$M_k=\left\{(t_1,\cdots,t_k):\begin{array}{l}t_i\in\mathbb{R}^N,i=1,\cdots,k;t_1,\cdots,t_k\\ \text{互不相同,使得}\ X_{t_1}=\cdots=X_{t_k}\end{array}\right\}$$

对于每一种随机集合 A,我们可以研究下述几类问题:

(Ⅰ) A 的 Hausdorff 维数和 Packing 维数;

(Ⅱ) A 的确切 Hausdorff 测度函数和 Packing 测度函数;

(Ⅲ) 一致维数(测度)问题:是否存在公共的零概率集 $\Lambda\in\mathscr{F}$,使得当 $\omega\overline{\in}\Lambda$ 时,(Ⅰ)和(Ⅱ)中的关系对任意 Bonel 集 $E\subset\mathbb{R}^N$ 或 $F\subset\mathbb{R}^d$ 均成立.

§1 Brown 运动的基本性质

在这一节中,我们收集一些关于 Brown 运动轨道的基本性质,为进一步研究它的分形性质作思想上和技术上的准备. 由于这部分内容不属于本书主题范围,我们只指明结论的出处,而不予以详细证明.

定义 1.1　设 $X=\{X_t,t\geqslant0\}$ 为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取值于$\mathbb{R}^d$的随机过程. 称 X 为 d 维 Brown 运动,如果

(1)　对任意的 $0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n$,随机变量 $X_{t_k}-X_{t_{k-1}}(1\leqslant k\leqslant n)$相互独立;

(2)　若 $0\leqslant s<t$,则 X_t-X_s 服从 d 维正态分布 $N(0,(t-$

$s)I$)(这里 I 为 d 阶单位矩阵);

(3)　$\forall\ \omega\in\Omega, t\to X_t(\omega)$ 连续;

(4)　$X_0=0$.

命题 1.1　设 $X=\{(X_{t,1},\cdots,X_{t,d}),t\geqslant 0\}$ 为 d 维 Brown 运动,则 $\{X_{t,i},t\geqslant 0\}$ 为 1 维 Brown 运动($1\leqslant i\leqslant d$),且 $X_{t,1},\cdots,X_{t,d}$ 相互独立($t\geqslant 0$).

这个命题使得我们在很大程度上可以将 d 维 Brown 运动转化为 1 维 Brown 运动来研究. 该命题的证明见[101]p. 75.

下一命题给出了 Brown 运动像集的一个初等性质,其证明参见[101].

命题 1.2　设 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 为 d 维 Brown 运动,则对 $\mathbb{R}^d$ 中任何有界集 B,有

$$P(X([0,\infty))\subset B)=0.$$

若 $d=1$,则由该命题和 Brown 运动轨道的连续性知 a. s. $X([0,\infty))=\mathbb{R}^1$,从而 $\dim(X([0,\infty)))=1$. 若 $d>1$,则结论就变得不明显了. 我们将在下一节讨论这个问题. 下面命题将在下一节中被用到.

命题 1.3　设 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 为 d 维 Brown 运动,则对任意 $\alpha<\frac{1}{2}$ 和任意有界区间 $[a,b]\subset[0,\infty)$,对几乎所有的 ω,$t\to X_t(\omega)$ 以指数 α 在 $[a,b]$ 上为 Hölder 连续的,即 $\exists\ c>0$、$\delta>0$,使得 $\forall\ 0\leqslant s\leqslant\delta$,有

$$|X_{t+s}(\omega)-X_t(\omega)|\leqslant cs^\alpha\quad(\forall\ t\in[a,b])$$

上面命题的证明可由[63]p. 46 系 1.4($d=1$ 情形)并组合命题 1.1 得到. 由于命题 1.1 的原因,下面我们限于讨论 1 维 Brown 运动.

命题 1.4　$\forall\ \alpha>\frac{1}{2}$,1 维 Brown 运动的几乎所有样本轨道关于指数 α 处处不是 Hölder 连续的.

该命题和命题 1.3 形成鲜明的对照. 由这个命题容易得到下

面结论(它们的证明均可见[63]).

命题 1.5 设 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 为 1 维 Brown 运动,则对几乎所有 $\omega\in\Omega$,有

(1) $t\to X_t(\omega)$ 在 $[0,\infty)$ 上处处不可微,

(2) $t\to X_t(\omega)$ 在任何有限区间上的变差无界.

和上述结论(2)形成对比的是,Brown 运动轨道的平方变差有界,即(参见[101])

命题 1.6 设 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 为 1 维 Brown 运动,令

$$Y_n=\sum_{i=1}^{2^n}\left|X\left(\frac{i}{2^n}\right)-X\left(\frac{i-1}{2^n}\right)\right|^2,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}Y_n=1$, $[L^2]$、a.e..

下面我们考察一下 Brown 运动的水平集. 水平集这个概念在函数论中用来刻画函数的性质、在随机过程理论中用来描述轨道性质,是相当重要的概念(它和随机过程的局部时密切相关). 下面命题取自[64].

命题 1.7 设 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 为 1 维 Brown 运动,$y\in\mathbb{R}^1$. 令

$$X^{-1}(y,\omega)=\{t\geqslant 0:X_t(\omega)=y\},$$

则对几乎所有 ω,$X^{-1}(y,\omega)$ 是闭的、无界的、Lebesgue 测度为 0 的集合,且 $X^{-1}(y,\omega)$ 中每点都是这个集的极限点(即它是自密的).

因为 $X^{-1}(y,\omega)$ 的 Lebesgue 测度为 0,可以想象这是一个比较"小"的集合;但它又是自密的,因此又不可能太"小". 那么 $X^{-1}(y,\omega)$ 究竟有多"大"呢? 用什么来刻画它的大小才合适呢? 后面我们将看到,Hausdorff 维数是一个合适的量. 事实上,我们将证明 $\dim(X^{-1}(y,\omega))=\frac{1}{2}$ a.s..

§2 Brown 运动的像集与图集

本节中恒设 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 d 维

Brown 运动($d\geqslant 1$). 首先,我们证明

定理 2.1 若 $d\geqslant 2$,则

$$P(\dim(X([0,1]))=2)=1.$$

证 先证 $\dim(X([0,1]))\geqslant 2$ a.s.. 由第一章定理 4.4,这只需证明对 $1<\alpha<2$,有

$$C_\alpha(X([0,1]))>0 \text{ a.s.} \ (C_\alpha \text{ 的定义见第一章定义 4.4})$$

亦即要证对 a.s. ω,存在 $X([0,1])$ 上概率测度 μ,使得 $I_\alpha(\mu)<\infty$. 因为 X_s-X_t 服从正态分布 $N(0,|t-s|I)$,所以存在正常数 c 使得

$$\int_\Omega |X_s-X_t|^{-\alpha}dP=c|t-s|^{-\frac{\alpha}{2}}. \tag{2.1}$$

在上式两边对 t、s 积分,有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left[\int_0^1\int_0^1|X_t-X_s|^{-\alpha}dtds\right]dP\\ &\quad=\int_0^1\int_0^1\int_\Omega|X_t-X_s|^{-\alpha}dPdtds\\ &\quad=c\int_0^1\int_0^1|t-s|^{-\frac{\alpha}{2}}dtds<\infty.\end{aligned}$$

所以,对几乎所有的 ω,有

$$\int_0^1\int_0^1|X_t(\omega)-X_s(\omega)|^{-\alpha}dtds<\infty. \tag{2.2}$$

令 $\mu(A)=\mathscr{L}_1(\{t:0\leqslant t\leqslant 1,X_t(\omega)\in A\})$($\mathscr{L}_1$ 表示 1 维 Lebesgue 测度),即 $\mu=\mathscr{L}_1X_\cdot(\omega)^{-1}$,则 μ 为 $X([0,1])$ 上概率测度,且

$$\begin{aligned}I_\alpha(\mu)&=\int_{X([0,1])}\int_{X([0,1])}|x-y|^{-\alpha}\mu(dx)\mu(dy)\\ &=\int_0^1\int_0^1|X_t-X_s|^{-\alpha}dtds<\infty.\end{aligned}$$

总之,我们证明了 $\dim(X([0,1]))\geqslant 2$ a.s..

下面证对几乎所有 ω,$\dim(X([0,1]))\leqslant 2$. 这只需证:$\forall\ \alpha>2$,有

$$s^\alpha\text{-}m(X([0,1]))<\infty \text{ a.s.}.$$

任取 $\alpha>2$，即 $0<\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{2}$. 由命题 1.3 有：对 a.s. ω，存在 $c>0$、$\delta>0$，当 $0\leqslant h\leqslant\delta$ 时

$$|X_{t+h}(\omega)-X_t(\omega)|\leqslant ch^{\frac{1}{\alpha}}\quad(\forall\ 0\leqslant t\leqslant 1),$$

从而

$$X([t,t+h])\subset B(X_t,ch^{\frac{1}{\alpha}})\quad(\forall\ 0\leqslant t\leqslant 1).$$

由上式立得(取 m 使得$\frac{1}{m}<\delta$)：

$$\begin{aligned}X([0,1])&=\bigcup_{j=1}^{m}X([\frac{j-1}{m},\frac{j}{m}])\\&\subset\bigcup_{j=1}^{m}B(X(\frac{j-1}{m}),cm^{-\frac{1}{\alpha}})\ \text{a.s.}\end{aligned}$$

从而(s^α-$m_b(\cdot)$的定义见第一章(2.4))

$$\begin{aligned}&s^\alpha\text{-}m_b(X([0,1]))\\&=\lim_{m\to\infty}\ \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{diam}B_i)^\alpha:\begin{array}{l}B_i\in\mathscr{B}_d,\mathrm{diam}(B_i)\leqslant 2(\frac{1}{m})^\alpha,\\\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_i\supset X([0,1])\end{array}\right\}\\&\leqslant\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}(\mathrm{diam}B(X(\frac{j-1}{m}),m^{-\frac{1}{\alpha}}))^\alpha\\&=\lim_{m\to\infty}m(2m^{-\frac{1}{\alpha}})^\alpha=2^\alpha<\infty\ \text{a.s.}.\end{aligned}$$

再由第一章命题 2.4 知 s^α-$m(X([0,1])<\infty$ a.s.. 这证明了 $\dim(X([0,1]))\leqslant 2$. 定理证毕.

注意到定理 2.1 的结论可以写成 $\dim(X([0,1]))=2\dim([0,1])$，我们自然要深入一步提出如下问题：能否在这个等式中用一般 Borel 集 E 来取代$[0,1]$，即是否成立 $\dim(X(E))=2\dim(E)$？下面我们要肯定地回答这个问题.

另外，考察定理 2.1 的证明，我们不难发现，在证明 $\dim(X([0,1]))\leqslant 2$ 时，除了用到 Brown 运动轨道的 Hölder 连续性外，没用到 Brown 运动的任何概率属性. 这启发我们脱离概率背景，研究一般(非随机)Hölder 连续函数的像集的维数问题. 事实上，

我们有

命题 2.1 设紧集 $E\subset\mathbb{R}^n$，$f:E\to\mathbb{R}^d$，存在正常数 $c>0$、$0<\beta<1$ 使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant c|x-y|^\beta \quad (\forall\ x、y\in E) \tag{2.3}$$

我们有

(1) $\dim(f(E))\leqslant(\frac{1}{\beta}\dim(E))\wedge d$，

(2) $\dim(\mathrm{Gr}(f(E)))\leqslant(\dim(E)+(1-\beta)d)\wedge\frac{1}{\beta}\dim(E)$，

(3) 对关于 Lebesgue 测度几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^d$，

$$\dim(f^{-1}(x))\leqslant(\dim(E)-\beta d)\vee 0.$$

证 我们只需证明：$\forall\ \alpha>\dim(E)$，有

(i) $s^{\alpha/\beta}\text{-}m[f(E)]<\infty$ 且 $s^{\alpha/\beta}\text{-}m[\mathrm{Gr}(f(E))]<\infty$， (2.4)

(ii) $s^{\alpha+(1-\beta)d}\text{-}m[\mathrm{Gr}(f(E))]<\infty$， (2.5)

(iii) 若 $\alpha-\beta d>0$，则对几乎所有 $x\in\mathbb{R}^d$，

$$s^{\alpha-\beta d}\text{-}m[f^{-1}(x)]<\infty. \tag{2.6}$$

事实上，上述(i)、(ii)、(iii)意味着 $\dim(f(E))\leqslant\frac{\alpha}{\beta}$，$\dim(\mathrm{Gr}(f(E)))\leqslant(\alpha+(1-\beta)d)\wedge\frac{\alpha}{\beta}$，$\dim(f^{-1}(x))\leqslant(\alpha-\beta d)\vee 0$. 再令 $\alpha\downarrow\dim(E)$ 知命题的结论成立. 下面我们在 $\alpha>\dim(E)$ 的假定下证明(2.4)、(2.5)和(2.6).

由 $\alpha>\dim(E)$ 知 $s^\alpha\text{-}m(E)=0$. 这样，$\forall\ \varepsilon>0$，我们能用可数个直径不超过 ε 的球 B_m 来覆盖 E，使得

$$\sum_{m=1}^\infty(\mathrm{diam}B_m)^\alpha<1, \tag{*}$$

于是 $f(E)\subset\bigcup_{m=1}^\infty f(B_m)$，$\mathrm{Gr}(f(E))\subset\bigcup_{m=1}^\infty(B_m\times f(B_m))$. 由(2.3)有

(iv) $\mathrm{diam}f(B_m)\leqslant c(\mathrm{diam}B_m)^\beta$，

(v) $\mathrm{diam}(B_m\times f(B_m))\leqslant c'(\mathrm{diam}B_m)^\beta$（$c'$ 为常数），

所以，

$\mathrm{diam} f(B_m)\leqslant c\varepsilon^{\beta}$，$\mathrm{diam}(B_m\times f(B_m))\leqslant c'\varepsilon^{\beta}$，且

$$\sum_{m=1}^{\infty}(\mathrm{diam} f(B_m))^{\alpha/\beta}\leqslant c\sum_{m=1}^{\infty}(\mathrm{diam} B_m)^{\alpha}<c<\infty,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}(\mathrm{diam}(B_m\times f(B_m)))^{\alpha/\beta}\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}c'(\mathrm{diam} B_m)^{\alpha}<c'<\infty.$$

令 $\varepsilon\to 0$，由 Hausdorff 测度的定义知(2.4)成立. 由(iv)我们可用 N_m 个球 $B_{m,j}(j=1,\cdots,N_m)$ 来覆盖 $f(B_m)$，使得每个 $B_{m,j}$ 的直径均为 $\rho_m\equiv\mathrm{diam} B_m$，且 $N_m=O(\rho_m^{\beta d-d})$，从而由(*)及 ρ_m 的定义有:

$$\sum_{m,j}(\mathrm{diam}(B_m\times B_{m,j}))^{\alpha+(1-\beta)d}\leqslant c''\sum_{m}\rho_m^{\alpha}\leqslant c''$$

(其中 $c''<\infty$ 为常数). 再由 Hausdorff 测度的定义知(2.5)成立. 最后，$\forall\ x\in\mathbb{R}^d$，令

$$B_m(x)=\begin{cases}B_m, & 若\ x\in f(B_m),\\ \phi, & 若\ x\overline{\in} f(B_m),\end{cases}$$

则由 $\{B_m\}$ 是 f 的定义域 E 的覆盖知

$$f^{-1}(x)\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}B_m(x),\ \mathrm{diam} B_m(x)\leqslant\varepsilon,$$

且

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{m=1}^{\infty}(\mathrm{diam} B_m(x))^{\gamma}dx&=\sum_{m=1}^{\infty}\int_{f(B_m)}(\mathrm{diam} B_m(x))^{\gamma}dx\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\mathscr{L}_d(f(B_m))(\mathrm{diam} B_m)^{\gamma}\leqslant\hat{c}\sum_{m=1}^{\infty}(\mathrm{diam} B_m)^{\gamma+\beta d}\\&\leqslant\hat{c}\sum_{m}^{\infty}(\mathrm{diam} B_m)^{\alpha}\leqslant\hat{c}<\infty,\end{aligned}$$

(其中 $\gamma=\alpha-\beta d$，$\hat{c}$ 为常数，$\mathscr{L}_d$ 为 d 维 Lebesgue 测度). 由 Hausdorff 测度的定义有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}s^{\alpha-\beta d}\text{-}m(f^{-1}(x))dx&\leqslant\int_{\mathbb{R}^d}\varliminf_{\varepsilon\to 0}\sum_{m=1}^{\infty}(\mathrm{diam} B_m(x))^{\gamma}dx\\&\leqslant\varliminf_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{m=1}^{\infty}(\mathrm{diam} B_m(x))^{\gamma}dx\leqslant\hat{c}<\infty,\end{aligned}$$

这证明了(2.6).

命题 2.1 是十分有用的.后面我们要几次用到它.现在我们回头来证明

定理 2.2 设 $d\geqslant 2$,Borel 集 $E\subset[0,1]$,则

$$P(\dim(X(E))=2\dim(E))=1. \tag{2.7}$$

证 由命题 1.3 和命题 2.1 知

$$\dim(X(E))\leqslant 2\dim(E) \text{ a.s.}.$$

剩下来只需证明

$$\dim(X(E))\geqslant 2\dim(E) \quad \text{a.s.}. \tag{2.8}$$

为此,我们需要下面结果:

命题 2.2 设 $f:E\to\mathbb{R}^d$ 是 Borel 可测的(其中 E 为$[0,1]$中 Borel 子集),若存在 E 上概率测度 μ,使得

$$\int_E\int_E |f(t)-f(s)|^{-\alpha}\mu(dt)\mu(ds)<\infty, \tag{2.9}$$

则 $s^\alpha\text{-}m[f(E)]=\infty$.

证 由第一章定理 4.4,我们只需找到 $f(E)$上概率测度 ν,使得 $I_\alpha(\nu)<\infty$. 事实上,令

$$\nu(A)=\mu f^{-1}(A),A\subset f(E),$$

则 ν 的确为 $f(E)$上概率测度,且

$$\begin{aligned} I_\alpha(\nu)&=\int_{f(E)}\int_{f(E)}|x-y|^{-\alpha}\nu(dx)\nu(dy)\\ &=\int_E\int_E|f(t)-f(s)|^{-\alpha}\mu(dt)\mu(ds)<\infty, \end{aligned}$$

这证明了命题 2.2.

下面我们回头来证明(2.8). 不妨设 $\dim(E)>0$. 任取 $\alpha<2\dim(E)$,则$\frac{\alpha}{2}<\dim(E)$. 取 ε 使得$\frac{\alpha}{2}<\varepsilon<\dim(E)$,我们有 $s^\varepsilon\text{-}m(E)=\infty$. 再由第一章定理 4.4 知存在支撑为紧集 $K\subset E$ 的概率测度 μ,使得 $I_{\alpha/2}(\mu)<\infty$. 注意到(下设 $t\geqslant s$)

$$\int_\Omega |X_t - X_s|^{-\alpha} dP = \int_\Omega |X_{t-s}|^{-\alpha} dP$$
$$= (t-s)^{-\alpha/2} \int_\Omega |X_1|^{-\alpha} dP = (t-s)^{-\alpha/2} \cdot c,$$

我们有

$$\int_\Omega \Big[\iint_{KK} |X_t - X_s|^{-\alpha} \mu(dt)\mu(ds)\Big] dP$$
$$= \iiint_{KK\Omega} |X_t - X_s|^{-\alpha} dP \mu(dt)\mu(ds)$$
$$= C\iint_{KK} |t-s|^{-\alpha/2} \mu(dt)\mu(ds)$$
$$= I_{\alpha/2}(\mu) < \infty,$$

从而

$$\iint_{KK} |X_t - X_s|^{-\alpha} \mu(dt)\mu(ds) < \infty \quad \text{a. s.}$$

再由命题 2. 2 知 $s^\alpha\text{-}m[X(K)] = \infty$ a. s. ,更有

$$s^\alpha\text{-}m(X(E)) = \infty \qquad \text{a. s.},$$

所以 $\dim(X(E)) \geqslant \alpha$. 令 $\alpha \uparrow 2\dim(E)$ 知(2. 8)成立. 定理 2. 2 证毕.

定理 2. 2 告诉我们,$\forall$ Borel 集 $E \subset [0,1]$,存在例外集 $\Lambda_E \in \mathscr{F}$,$P(\Lambda_E) = 0$,当 $\omega \overline{\in} \Lambda_E$ 时,

$$\dim(X(E)) = 2\dim(E). \tag{2. 10}$$

一般说来 Λ_E 是与 E 有关的. 现在自然要问:能否找到与 E 无关的(即对每个 E 都适用的)例外集 Λ,使得在 Λ 的余集上(2. 10)成立? 这就是下面一致维数定理要回答的问题.

定理 2. 3 设 $d \geqslant 2$,则

$P(\dim(X(E)) = 2\dim(E)$ 对一切 Borel 集 E 成立$) = 1$.

证 我们只就 $2 < d$ 的情形证明:

$$P(\dim(X(E)) \geqslant 2\dim(E),\text{对一切 Borel 集 } E \text{ 成立}) = 1. \tag{2. 10}$$

其余部分的证明请参见[93]. 为此,先证明一个引理.

引理 2.1 设 $2<d$,则存在正整数 $N(\omega,p)$,使得 $P(N(\omega,p)<\infty)=1$,并且满足当 $n\geqslant N(\omega,p)$ 且 $C\in\mathscr{C}_n$(n 级二进制区间全体)时集合

$$\{t:X_t(\omega)\in C,0\leqslant t\leqslant s\}$$

能被至多 k_ν 个长度不超过 l_n 的区间所覆盖,其中 $l_n=(2^{1-n}d^{1/2})^{2(1-1/\nu)}$,而 k_ν 是大于 $p(1+2)/(d-2)$ 的最小正整数.

证 令

$$\mathscr{G}_n(\omega)=\left\{C\in\mathscr{C}_n:\begin{array}{l}\{t:X_t(\omega)\in C,0\leqslant t\leqslant s\}\text{不能被}\\ k_\nu\text{ 个长度不超过 }l_n\text{ 的区间所覆盖}\end{array}\right\},$$

$$N_n(\omega)=\#\mathscr{G}_n(\omega).$$

我们将证明对充分大的 n 有 $N_n(\omega)=0$.

$\forall\, C\in\mathscr{C}_n$,令 $T_0=T_C=\inf\{t>0:X_t\in C\}$. 我们定义一列停时如下:

$$T_j=\inf\{t>X(T_{j-1}+l_n):X_t\in B(X_{T_0},2^{2-n}d^{1/2})\}\ (j\geqslant 1)$$

其中 $B(X_{T_0},2^{2-n}d^{1/2})$ 表示以 X_{T_0} 为中心以 $2^{2-n}d^{1/2}$ 为半径的球(它必包含 C). 显然,区间列

$$[T_j,T_j+l_n],\ j=1,2,\cdots$$

覆盖了

$$\{t:X_t\in C,0\leqslant t\leqslant s\}.$$

我们下面将证明的实际上就是说这些区间中的头 k_ν 个区间就足够覆盖 $\{t:X_t\in C,0\leqslant t\leqslant s\}$.

显然,

$$\begin{aligned}P(C\in\mathscr{G}_n(\omega))&\leqslant P(T_{k_\nu}(\omega)<\infty,T_0(\omega)<s)\\&=P(T_0(\omega)<s)P(T_{k_\nu}<\infty\mid T_0<s).\end{aligned}$$

由[110]引理 2.2 有

$$P(T_{j+1}<\infty\mid T_j<\infty)\leqslant c_1[2^{2-n}d^{1/2}l_n^{-1/2}]^{d-2},\ j\geqslant 1.$$

再 k_ν 次运用强马氏性我们有

$$P(C\in\mathscr{G}_n(\omega))\leqslant P(T_0(\omega)<s)c_2[2^{2-n}d^{1/2}l_n^{-1/2}]^{k_r(d-2)}$$
$$\leqslant c_3 2^{-3n}P(T_0(\omega)<s).$$

令

$$M_n(\omega)=\#\{C\in\mathscr{C}_n:\exists\ t<s \text{ 使得 } X_t(\omega)\in C\}.$$

由[110]引理 2.1 有

$$\mathbf{E}(N_n)\leqslant c_3 2^{-3n}\mathbf{E}(M_n)$$
$$\leqslant c_4 2^{-n},$$

故

$$P(N_n\geqslant 1)\leqslant c_4 2^{-n}.$$

由 Borel-Cantelli 引理知当 n 充分大时有 $N_n(\omega)<1$，即是说当 n 充分大时有 $N_r(\omega)=0$. 证毕.

现在我们来证明(2.10). 令

$$\Omega_p^*=\{N(\omega,p)<\infty\},$$

$$\Omega^*=\bigcap_{p=1}^{\infty}\Omega_p^*.$$

由引理 2.1 有

$$P(\Omega^*)=1.$$

$\forall\ \omega\in\Omega^*$，$\forall$ Borel 集 $B\subset[0,s]$. 取 $\delta>0$、$\theta>\dim(X(B,\omega))$，从 $\bigcup_{r\ n}^{\infty}\mathscr{C}_r$ 中取立方体 S_j 来覆盖 $X(B,\omega)$，使得

$$\sum|\mathrm{diam}S_j|^{\theta}<\delta.$$

固定 $p>1$，当 n 充分大时我们能够(用引理 2.1)用长度为 $|\mathrm{diam}S_j|^{2(1-1/p)}$ 的区间 S_{ij}，$i=1,\cdots,k_p$ 来覆盖

$$\{t:X_t\in S_j,0\leqslant t\leqslant s\},$$

从而有

$$\sum_i\sum_j|\mathrm{diam}S_{ij}|^{\theta/(2(1-1/p))}$$
$$\leqslant k_t\sum_j|\mathrm{diam}S_j|^{\theta}\leqslant k_p\delta.$$

令 $\delta\to 0$，$n\to\infty$ 我们有(因 S_{ij} 必覆盖 B)

$$s^{\theta/(2(1-1/p))}\text{-}m(B)=0,$$

故

$$\dim(B)\leqslant\theta/2\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

再令 $\theta\downarrow\dim(X(B,\omega))$，令 $p\uparrow\infty$，我们得

$$2\dim(B)\leqslant\dim(X(B,\omega)).$$

(2.10)得证.

实际上，上述证明完全适用于任何 α 阶稳定过程($0<\alpha\leqslant2$). 这里的 Brown 运动为 2 阶稳定过程. 只要把上述证明中的某些 2 改为 α 即得 α 阶稳定过程的一致 Hausdorff 维数结果(该结果的叙述见第三章定理 3.2，但那里没给出证明. 这也是我们采用这种方法来证明定理 2.3 的原因之一). 另外，值得指出的是：当 $d=1$ 时 Brown 运动是点常返的，没有一致维数结果(参见本章§4 定理 4.1).

我们讨论了 Brown 运动像集的 Hausdorff 维数问题. 对 Packing 维数，可提相应的问题并得到相应的结果. 下面我们不加证明地给出 Packing 维数的一致维数结果(详细证明请参见[171]). 其它结论就不一一罗列了.

定理 2.4 设 $d\geqslant2$，则

$P(\text{Dim}(X(E))=2\text{Dim}(E)$ 对一切 Borel 集 E 成立$)=1$.

定理 2.3 和定理 2.4 告诉我们，分形集合在 Brown 运动下的像集亦为分形集合.

再往下深入讨论就是像集的确切测度函数问题了. 求确切测度函数远比求维数困难. 下面我们介绍两个结果. 限于篇幅，我们不给出证明，有兴趣的读者可参见相应的文献.

定理 2.5 若 $d\geqslant3$，则存在常数 $c_d>0$，使得对任何 Borel 集 $E\subset[0,\infty)$，有

$$s^2\log\log\frac{1}{s}\text{-}m(X(E))=c_d\mathscr{L}_d(E)\ \text{a.s.}.$$

若 $d=2$，则存在常数 $c>0$ 使得

$$s^2\log\frac{1}{s}\log\log\frac{1}{s}\text{-}m(X([0,1]))=c\quad \text{a.s.}.$$

证明可参见[145]、[40]、[182]、[200]. 至于 Packing 测度函数，有

定理 2.6　若 $d\geqslant 3$，则存在常数 $\lambda_d>0$ 使得

$$s^2/\log\log\frac{1}{s}\text{-}p(X([0,1]))=\lambda_d\quad \text{a.s.}.$$

若 $d=2$，则有

$$\varphi\text{-}p(X([0,1]))=\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}\text{相应于}\sum_{k=1}^{\infty}h(2^{-2^k})\begin{cases}<\infty\\ =\infty,\end{cases}$$

其中 $\varphi(s)=(s^2\log\frac{1}{s})h(s)$（这里 $h(s)\in\Phi$）.

定理的证明可参见[208]、[143].

现在我们考虑 Brown 运动的图集. 不难看出，d 维 Brown 运动 $\{X_t, t\geqslant 0\}$ 的图集就是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中平稳独立增量过程 $\{(t, X_t), t\geqslant 0\}$ 的像集. 在第 4 章中我们要专门讨论一般平稳独立增量过程的分形理论. 因此，下面的定理就可由第 4 章定理 2.2 及上述附注推出.

定理 2.7　设 $d=1$，则

$$\dim(\mathrm{Gr}(X([0,1])))=\mathrm{Dim}(\mathrm{Gr}(X([0,1])))=\frac{3}{2}\quad \text{a.s.}$$

注意：上述维数的上界是不难证明的. 因为由本章命题 1.3 和命题 2.5，我们可以推出维数的上界：

$$\dim(\mathrm{Gr}(X(E)))\leqslant(\dim(E)+\frac{1}{2})\wedge\dim(E).$$

注意而今 $d=1$，$\dim(E)=\dim([0,1])=1$.

定理 2.8　设 $d=1$，则 $\mathrm{Gr}(X([0,1]))$ 的确切 Hausdorff 测度函数为

$$\varphi(s)=s^{\frac{3}{2}}(\log\log\frac{1}{s})^{\frac{1}{2}}.$$

证明请参见[175].

最后,我们以若干附注来结束这一节.

附注 2.1 定理 2.1 中区间[0,1]可以换为[0,∞);定理 2.2 中 $E\subset[0,1]$的限制可以取消. 当 $d=1$ 时,定理 2.2 的相应结论是:∀ Borel 集 $E\subset[0,\infty)$,有

$$\dim(X(E))=2\dim(E)\wedge 1\quad \text{a.s.} \tag{2.11}$$

上述结论现已不难证明,请读者自行完成.

附注 2.2 我们已经知道 1 维 Brown 运动$\{X_t,t\geqslant 0\}$没有一致维数结果,但把问题的提法稍微改变一下,我们却有:

$$P\left(\begin{array}{l}\forall \text{ 闭集 } F\subset[0,1],\text{对几乎所有 } t>0 \text{ 成立:}\\ \dim X(F+t)=2\dim(F)\wedge 1\end{array}\right)=1.$$

这个结果的证明可见[118].

附注 2.3 设 $d=1$,则当 $\dim(E)\geqslant\frac{1}{2}$时我们有

$$\dim(X(E))=1\quad \text{a.s.},$$

即维数达到了最大值. 若我们仔细分析一下,还可提出如下问题:

(1) $X(E)$是否具有正 Lebesgue 测度?

(2) $X(E)$是否含有内点?

这当然是更深一层的问题了. 比如,我们有

$$P\left\{\begin{array}{l}\text{对一切满足 } \dim(F)>\frac{1}{2}\text{ 的闭集 } F\subset[0,1],\\ \mathscr{L}_1(X(F+t))>0 \text{ 对几乎所有 } t>0 \text{ 成立}\end{array}\right\}=1.$$

证明亦见[118].

附注 2.4 学习这一章时,要特别注意问题是怎样提出来的,提法是怎样一步一步深化发展的. 由于 Brown 运动的结果很多都是一般 Lévy 过程或稳定过程相应结果的推论,因此,除了证法有共性、有一般意义的证明以外,我们一般都不给出证明. 对那些复杂冗长、完全依赖于 Brown 运动本身的特性而无法推广到其它场合的证明,我们一概不予采用. 但是,定理 2.1、定理 2.4 及两个命题的证法具有典型意义,给出了求 Hausdorff 维数上、下界的两个

常用方法. 对读者会有启发.

§3 Brown 运动的 k 重点集与 k 重时集

关于 Brown 运动的 k 重点的研究具有相当长的历史. 设 $X=\{X_t, t\geq 0\}$ 为 d 维 Brown 运动,令 L_k 表示 X 的全体 k 重点组成的集合,即

$$L_k=\{x\in\mathbb{R}^d: \exists\ t_1<t_2<\cdots<t_k \text{ 使得 } X_{t_1}=X_{t_2}=\cdots=X_{t_k}=x\}.$$

我们关心的是两个问题. 首先是 k 重点的存在性,即何时 $L_k\neq\varnothing$; 其次是 L_k 有多大, 它的维数是多少,它的确切测度函数是什么. Dvoretzky 等人证明了

定理 3.1 若 $d=1$,则 $L_k=\mathbb{R}^1$ a. s. ,$k=1,2,\cdots,\aleph_0,c$(其中 $\aleph_0$ 表可数无穷势,c 表连续统). 若 $d=2$,则 $L_k\neq\varnothing$ a. s. ,$k=1,2,\cdots,\aleph_0,c$. 若 $d=3$,则 $L_2\neq\varnothing$,$L_3=\varnothing$ a. s. . 若 $d\geq 4$,则 $L_2=\varnothing$.

定理的证明请参见[48]、[49]、[51].

显然,我们只需研究 $d=2$、3 时 L_k 的维数和测度问题. 关于 k 重点集的 Hausdorff 维数,Taylor 证明了下述结果.

定理 3.2 若 $d=2$,则 $\dim(L_k)=2$ a. s. ,$k=1,2,\cdots,\aleph_0$、c ($\aleph_0$ 和 c 分别表可数势及连续统势). 若 $d=3$,则 $\dim(L_2)=1$ a. s. .

证明请参见[203]或下一章稳定过程的相应结论. [203]的方法实际上证明了对定理 3.2 中每一种情形均有 $\mathrm{Dim}(L_k)=\dim(L_k)$.

关于 k 重点集的测度函数问题,我们将要证明下面的定理. 设 $X=\{X_t, t\geq 0\}$ 为 2 维 Brown 运动,k 为任意正整数. 令

$$\mathscr{T}_k=\{(t_1,\cdots,t_k)\in[0,\infty)^k: 0\leq t_1<t_2<\cdots<t_k\}, \tag{3.1}$$

$$\alpha_k(A)=\int_A \delta_0(X_{t_1}-X_{t_2})\cdots\delta_0(X_{t_{k-1}}-X_{t_k})dt_1\cdots dt_k, \tag{3.2}$$

(A 为 $\mathscr{T}_k$ 的 Borel 子集),

其中 $\delta_0(x)=\mathbf{1}_{\{0\}}(x)$. 称 α_k 为 X 的 k 阶自相交局部时，它是 $\mathscr{T}_k$ 上 Radon 测度. 有关 α_k 的定义及性质可见[187]、[53]. 显然，α_k 是支撑在 k 重时集 M_k 上，这里

$$M_k=\{(t_1,\cdots,t_k):0\leqslant t_1<\cdots<t_k,X_{t_1}=\cdots=X_{t_k}\}. \qquad (3.3)$$

再令 $f:M_k\to\mathbb{R}^2$ 为

$$f(t_1,\cdots,t_k)=X_{t_1}. \qquad (3.4)$$

最后令

$$l_k(A)=\alpha_k f^{-1}(A),(A\ 为\mathbb{R}^2中\ \mathrm{Borel}\ 子集) \qquad (3.5)$$

则易见 l_k 是支撑在 L_k 上的测度，但它不再是 Radon 测度，而只是可列个有限测度之和.

定理 3.3 设 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 为 2 维 Brown 运动. $\forall\ k\geqslant 1$，令

$$h_k(x)=x^2\left(\log\frac{1}{x}\log\log\log\frac{1}{x}\right)^k \qquad (3.6)$$

则存在正常数 c_k，使得

$$P(l_k(F)=c_kh_k\text{-}m(F\cap L_k)\ 对一切\ \mathrm{Borel}\ 集\ F\ 成立)=1. \qquad (3.7)$$

证 $k=1$ 时(3.7)的证明请参见[200]. 我们只就 $k\geqslant 2$ 来证明(3.7).

$\forall\ 0\leqslant a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_k<b_k$，令

$$I=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\cdots\times(a_k,b_k) \qquad (3.8)$$

以 α_k^I 表 α_k 在 I 上的限制，以 l_k^I 表示测度 $\alpha_k^I f^{-1}$（f 亦由(3.4)定义）. 我们断言，若能证明存在正常数 c_k 使得

$$P(l_k^I(F)=c_kh_k\text{-}m(F\cap L_k^I)\ 对一切\ \mathrm{Borel}\ 集\ F\ 成立)=1 \qquad (3.9)$$

（其中 $L_k^I=\{x\in\mathbb{R}^2:\exists\ (t_1,\cdots,t_k)\in I\ 使得\ x=X_{t_1}=\cdots=X_{t_k}\}$），则(3.7)成立. 事实上，我们能找到可数多个形如(3.8)的集合 $I_n(n\geqslant 1)$，使得 $I_n\cap I_{n'}=\varnothing\,(n\neq n')$ 且 $\mathscr{T}_k-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n$ 被包含在可数多个下列形式的集合的并中：

$$H=\{(t_1,\cdots,t_k):t_i=a\},1\leqslant i\leqslant k,a\geqslant 0.$$

但对每个这样的 H，$\alpha_k(H)=0$，从而有

$$l_k(F)=\sum_{n=1}^{\infty} l_k^{I_n}(F). \tag{3.10}$$

显然，我们不难得到

$$h_k\text{-}m(L_k^{I_n}\cap L_k^{I_{n'}})=0 \quad (n\neq n').$$

从而

$$h_k\text{-}m(F\cap L_k)=\sum_{n=1}^{\infty} h_k\text{-}m(F\cap L_k^{I_n}). \tag{3.11}$$

由(3.9)、(3.10)、(3.11)立知(3.7)成立.

下面我们证明存在正常数 c_k 使得(3.9)成立. 为此，我们需要下面命题：

命题 3.1 设 μ、ν 为$\mathbb{R}^d$上两个有限 Borel 测度，且 $\nu\ll\mu$. $\forall\ x\in\mathbb{R}^d$，令

$$g(x)=\limsup_{r\to 0}\frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} \tag{3.12}$$

这里 $B(x,r)$表示以 x 为中心、以 r 为半径的开球. 则 $g=\frac{d\nu}{d\mu}$.

该命题的证明请参见[62]p. 153－155.

令 $\mu=l_k^I$，$\nu(\cdot)=h_k\text{-}m(\cdot\cap L_k^I)$. 由[139]的结论知 $\nu\ll\mu$. 现在对此 μ、ν 应用命题 3.1，易见为证(3.7)，只需证明(3.12)中的 $g(x)$关于 μ 几乎处处等于某常数 $c_k'>0$. 也就是说，我们剩下来将证明

$$\limsup_{r\to 0}\frac{h_k\text{-}m(B(x,r)\cap L_k^I)}{l_k^I(B(x,r))}=c_k' \tag{3.13}$$

对 l_k^I a.s. 的 x 及 P-a.s. 的 ω 成立. 或者等价地，要证明

$$\limsup_{r\to 0}\frac{h_k\text{-}m(B(X_{t_1},r)\cap L_k^I)}{\alpha_k^I(\{(s_1,\cdots,s_k):X_{s_1}\in B(X_{t_1},r)\})}=c_k' \tag{3.14}$$

对 α_k^I-a.s. 的$(t_1,\cdots,t_k)$及 P-a.s. 的 ω 成立.

现取 $2k$ 个始于 0 的相互独立的 2 维 Brown 运动：$\tilde{X}^1,\cdots,\tilde{X}^k$.

$\hat{X}^1,\cdots,\hat{X}^k$. $\forall\ 1\leqslant i\leqslant k$，令

$$X_t^i=\begin{cases}\tilde{X}_t^i, 0\leqslant t\leqslant 1\\ \hat{X}_{-t}^i, -1\leqslant t<0,\end{cases}$$

这 k 个独立过程 $X^1,\cdots,X^k$ 的自相交局部时为

$$\beta_k(A)=\int_A \delta_0(X_{t_1}^1-X_{t_2}^2)\cdots\delta_0(X_{t_{k-1}}^{k-1}-X_{t_k}^k)dt_1\cdots dt_k$$

它为$[-1,1]^k$ 上的 Radon 测度. $\forall\ \rho\in(0,1]$，令

$$D_k^\rho=\left\{x\in\mathbb{R}^2: \begin{matrix}\exists\ 互不相同的\ t_1,\cdots,t_k\in[-\rho,\rho)使得\\ x=X_{t_1}^1=\cdots=X_{t_k}^k\end{matrix}\right\}.$$

由[140]的推论 2.3 知(3.14)等价于

$$\limsup_{r\to 0}\frac{h_k\text{-}m(B(0,r)\cap D_k^\rho)}{\beta_k(\{(s_1,\cdots,s_k)\in[-\rho,\rho)^k: X_{s_1}^1\in B(0,r)\})}=c_k \quad P\text{-a.s.} \tag{3.15}$$

显然(3.15)左边不依赖于 ρ 的选取. 对过程

$$(\tilde{X}^1,\cdots,\tilde{X}^k,\hat{X}^1,\cdots,\hat{X}^k)$$

用 Blumenthal0 1 律(参见[27])，知(3.15)左边几乎处处等于某常数 $c_k\in[0,\infty]$. 但是由[139]的结论知(3.14)的左端有大于 0 的下界和小于无穷大的上界，从而 $c_k\in(0,\infty)$. 定理证毕.

定理 3.3 取自[141]. 对 3 维 Brown 运动有完全类似的结果，亦请参见[141]. 关于 k 重点集的 Packing 测度，目前还未见到结果. 值得指出的是，自相交局部时的理论在研究与 k 重点有关的问题中起着相当基本而重要的作用. 我们可以从定理 3.3 的证明中体会到这一点.

下面我们转而研究 k 重时集 M_k，这里

$$M_k=\{(t_1,\cdots,t_k): 0<t_1<\cdots<t_k, X_{t_1}=\cdots=X_{t_k}\}.$$

Wolpert [219]证明了 $\dim(L_k)=2\dim(M_k)$ 对 2 维 Brown 运动成立. 再由定理 3.2，我们即知 $\dim(M_k)=1\ (k\geqslant 1)$. 事实上，我们有

定理 3.4 若 $d=2$，则 $\dim(M_k)=1$ a.s. ($\forall\ k\geqslant 2$)；若 $d=3$，

则 $\dim(M_2)=\frac{1}{2}$，$M_k=\varnothing\ (k\geqslant 3)$ a. s.；若 $d>3$，则 $M_k=\varnothing$ a. s. $(k\geqslant 2)$.

当 $d>3$ 时，由定理 3.1 知 $L_k=\varnothing$ a. s.，从而 $M_k=\varnothing$ a. s. $(k\geqslant 2)$. $d=3$ 的情形可参见[191].

§4 Brown 运动的水平集与逆像集

设 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 d 维 Brown 运动 $(d\geqslant 1)$，令

$$Z(x,t)=\{s\in[0,t]:X_s=x\},\ (x\in\mathbb{R}^d,t>0)$$
$$Z(x)=\{s\geqslant 0:X_s=x\}\ (x\in\mathbb{R}^d).$$

(这些集合均称为 X 的水平集). 由定理 3.1 知，当 $d\geqslant 3$ 时，$Z(x)$ 至多只含两个点 a. s.. 由定理 2.3 知，当 $d=2$ 时，必有 $\dim(Z(x))=0$. 事实上，由一致维数定理有 $0=\dim(\{x\})=\dim(X(Z(x))=2\dim(Z(x))$. 在这一节中，我们将考虑 $d=1$ 即 1 维 Brown 运动的水平集和一般的逆像集的维数与测度问题. 以下恒设 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 为 1 维 Brown 运动. [144]、[204]证明了

定理 4.1 $\dim(Z(x,t))=\mathrm{Dim}(Z(x,t))=\frac{1}{2}$ a. s. $(\forall\ x\in\mathbb{R}^1,t>0)$.

由此结果我们可知一致维数结果(定理 2.3)对 1 维 Brown 运动不成立. 事实上，谬设一致维数结果成立，则有(参见(2.11))

$$0=\dim(X(Z(x)))=2\dim(Z(x))\wedge 1=1$$

这当然不可能.

因为我们下面要证明更一般的逆像集的维数结果(定理4.3)，所以定理 4.1 我们就不证了. 不过应当指出，直接用命题 1.3 和命题 2.1 之(3)，我们即得 $\dim(Z(x,t))\leqslant(\dim([0,t])-\frac{1}{2})\vee 0=\frac{1}{2}$ 对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^1$ 成立.

下面我们给出 1 维 Brown 运动水平集的确切测度函数，其证明请见[170].

定理 4.2 设 $s(t,x)$ 为 1 维 Brown 运动的局部时. 令

$$\varphi(t)=(2t|\log|\log t||)^{1/2}$$

则

$$P(\varphi\text{-}m(Z(x,t))=s(t,x)\text{对一切 }t\geqslant 0、x\in\mathbb{R}^1\text{成立})=1$$

(局部时的概念参见[27]).

实际上，水平集的研究和局部时密切相关. [30]利用局部时的逆是从属过程(定义见第四章定义 1.2)且此从属过程的值域即为水平集这一事实，给出了一般局部紧度量空间中马氏过程的水平集的 Hausdorff 维数.

水平集的一般化即逆像集

$$X^{-1}(B)=\{s\geqslant 0:X_s\in B\},B\subset\mathbb{R}^1,$$

我们将证明

定理 4.3 设 B 为$\mathbb{R}^1$中 Borel 集，X 为 1 维 Brown 运动，则

$$P(\dim(X^{-1}(B))=\frac{1+\dim(B)}{2})=1. \tag{4.1}$$

我们将用概率势论的方法来证明这个定理. 为此，先作些准备工作. 设 $Y=\{Y_t,t\geqslant 0\}$ 是$\mathbb{R}^1$上的 α 阶稳定过程(详细定义见下一章定义 2.2)，A 为$\mathbb{R}^1$中 Borel 子集. 称 A 为 Y 的极集，如果

$$P(T_A<\infty)=0 \tag{4.2}$$

其中 $T_A\hat{=}\inf\{t>0:Y_t\in A\}$ (约定 $\inf\varnothing=\infty$). Orey[168]证明了：$\forall\ 0<\alpha<1$，所有 α 阶稳定过程具有相同的极集. 若 $\tilde{Y}$ 为$\mathbb{R}^1$上 α 阶对称稳定过程(定义详见下章定义 2.2)($0<\alpha<1$)，则 $\tilde{Y}$ 的位势密度(见[27]p. 71)为 $g(x,y)=c|y-x|^{\alpha-1}$(其中 c 为正常数). 据[27]第 6 章第 4 节的结果和本书第一章定义 4.4 知下面结果成立：

命题 4.1 设 B 为$\mathbb{R}^1$中 Borel 子集，$0<\alpha<1$，$Y=\{Y_t,t\geqslant 0\}$ 为

α 阶稳定过程，则 B 为 Y 的极集的充要条件是 $C_{1-\alpha}(B)=0$.

下面我们证明定理 4.3. 先证明

$$P(\dim(X^{-1}(B))\leqslant\frac{1+\dim B}{2})=1. \tag{4.3}$$

$\forall\ 0<\beta<1$，取概率空间 $(\Omega^*,\mathscr{F}^*,P^*)$ 及其上的 β 阶稳定从属过程 $T=\{T_t,t\geqslant 0\}$（即 T 既为 β 阶稳定过程又为轨道非负单调增的过程，详见下一章定义 2.1）. 在乘积空间 $(\Omega\times\Omega^*,\overline{\mathscr{F}\times\mathscr{F}^*},P\times P^*)$（$\overline{\mathscr{F}\times\mathscr{F}^*}$ 表示 $\mathscr{F}\times\mathscr{F}^*$ 关于 $P\times P^*$ 的完备化）上定义新过程如下：

$$Z_t(\omega,\omega^*)\hat{=}X_{T_t(\omega^*)}(\omega),t\geqslant 0. \tag{4.4}$$

注意在乘积空间上 X 与 T 相互独立，故

$$P\times P^*(\exp\{izZ_t\})=P^*[P(\exp\{izX_{T_t(\omega^*)}(\omega)\})]$$

$$=P^*[\exp\{-T_t(\omega^*)|z|^2]\tag{4.5}$$

$$=\exp\{-t(|z|^2)^\beta\}\tag{4.6}$$

$$=\exp\{-t|z|^{2\beta}\}$$

（其中(4.5)是因为 $X_{T_t(\omega^*)}(\cdot)$ 服从正态分布 $N(0,T_t(\omega^*))$，(4.6)用的是稳定从属过程的指数表达式，见第四章定义 1.2）. 这样我们看到，Z_t 是乘积空间上的 2β 阶对称稳定过程.

现在我们证明(4.3). 若 $\dim(B)=1$，则(4.3)自然成立. 下设 $\dim(B)<1$. 取 β 满足

$$0<\beta<\frac{1-\dim(B)}{2}\leqslant 1. \tag{4.7}$$

如前定义 T_t 和 Z_t. 因为 $\dim(B)<1-2\beta$ 且 $2\beta<1$，由 Frostman 的结果（第一章定理 4.4）知 $C_{1-2\beta}(B)=0$. 用命题 4.1 知 B 为 2β 阶对称稳定过程 $\{Z_t,t\geqslant 0\}$ 的极集，即

$$P\times P^*((\omega,\omega^*):\exists\ t>0 \text{ 使得 } Z_t(\omega,\omega^*)\in B)=0.$$

由此得

$$P(\omega:P^*(\omega^*:T_t(\omega^*)\in X^{-1}(B)(\omega)\text{对某个 }t>0\text{ 成立})=0)=1$$

从而

$$P(X^{-1}(B)\text{为 } T_t \text{ 的极集})=1$$

由命题 4.1 有 $C_{1-\beta}(X^{-1}(B))=0$ a.s.. 再由第一章定理 4.5 知 $\dim(X^{-1}(B))\leqslant 1-\beta$ a.s.. 在(4.7)中令 $\beta\uparrow\frac{1-\dim B}{2}$ 知 $\dim(X^{-1}(B))\leqslant 1-\frac{1-\dim(B)}{2}=\frac{1+\dim(B)}{2}$ a.s.. 这证明了(4.3).

下面将证明

$$P\left(\dim(X^{-1}(B))\geqslant\frac{1+\dim(B)}{2}\right)=1. \tag{4.8}$$

若 $\dim(B)=0$, $\forall\ x_0\in B$. 由定理 4.1 知

$$\dim(X^{-1}(B))\geqslant\dim(Z(x_0))=\frac{1}{2}=\frac{1+\dim(B)}{2}\quad \text{a.s.},$$

故此时(4.8)成立. 下设 $\dim(B)>0$. 选取 β 满足

$$2\beta+\dim(B)>1 \text{ 且 } 2\beta<1$$

这样 $\beta<1$ 且 $0<1-2\beta<\dim(B)$. 从而由 Frostman 定理有 $C_{1-2\beta}(B)>0$, 再用命题 4.1 知 B 不是 $\{Z_t, t\geqslant 0\}$ 的极集(T_t, Z_t 按前述方法由 β 确定), 即有

$$P\times P^*((\omega,\omega^*):\exists\ t>0 \text{ 使得 } Z_t(\omega,\omega^*)\in B)>0. \tag{4.9}$$

由 Fubini 定理我们易知 B 亦不是 X 的极集(注意 $t\to T_t(\omega^*)$ 是严格增的, 见[26]). 因为 X 是常返的, 故

$$P(\omega: X_t(\omega)\in B \text{ 对某个 } t>0)=1. \tag{4.10}$$

结合(4.9)、(4.10), 用 Fubini 定理并注意到 T_t 的轨道严格增, 我们有

$$P\times P^*((\omega,\omega^*):\exists\ t>0 \text{ 使得 } Z_t(\omega,\omega^*)\in B)=1.$$

从而

$$P(\omega: P^*(\omega^*: T_t(\omega^*)\in X^{-1}(B)\text{对某个 } t>0 \text{ 成立})=1)=1,$$

即

$$P(\omega: X^{-1}(B)\text{不是 } T_t \text{ 的极集})=1.$$

由命题 4.1 知

$$P(C_{1-\beta}(X^{-1}(B))>0)=1.$$

由 Frostman 定理知

$$\dim(X^{-1}(B)) \geqslant 1-\beta \quad \text{a.s.}$$

最后令 $\beta \downarrow \frac{1-\dim B}{2}$,从上式得

$$\dim(X^{-1}(B)) \geqslant \frac{1+\dim B}{2} \quad \text{a.s.}.$$

这证明了(4.8).定理证毕.

在这个定理的证明中,我们充分利用了概率势论的结果和思想.其中的关键是命题 4.1,它起着桥梁的作用,把求一个集合的 Hausdorff 维数的问题转化为判断该集合是否为某个稳定过程的极集.其实,定理 4.3 可推广至$\mathbb{R}^1$上一般 α 阶对称稳定过程(只要 $\alpha>1$),证明的方法完全一样,读者可参见[87].

第三章

稳定过程的轨道分形理论

§1 稳定律

设$\{X_n\}$是独立同分布的实值随机变量序列，古典极限理论经常考虑$\{X_n\}$的正则化部分和：

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{A_n} - B_n \quad (A_n > 0) \tag{1.1}$$

的极限分布问题. 当X_n的二阶矩存在时，若取$A_n = \sqrt{n\mathrm{Var}(X_1)}$，$B_n = n\mathbf{E}(X_1)$（此处设$X_1$非退化，$\mathrm{Var}(X_1)$、$\mathbf{E}(X_1)$分别表$X_1$之方差与期望），则$S_n$的极限分布是标准正态分布.

现在把问题一般化，并不假设X_1存在任何阶矩，如何取A_n和B_n，(1.1)的极限分布方存在？如果存在，此极限分布属于何分布族？这就是稳定律族的问题. [100]第六章有详尽的讨论.

定义 1.1 称随机变量X是稳定的(Stable)或者称之为具有稳定律，如果对任一正整数k及任意的独立同分布随机变量列$\{X_1, \cdots, X_k\}$，只要X_i与X同分布，就存在常数$a_k > 0$及b_k，使$a_k X + b_k$与$\sum_{i=1}^{k} X_i$同分布. 特别地，若$b_k = 0$，则称X是严格稳定的，或者称之为具有严格稳定律.

称稳定的随机变量X的分布（特征函数）$F(f)$为稳定分布（特征函数）.

称特征函数族$\{f_{n,k}(u),1\leqslant k\leqslant k_n,n=1,2,\cdots\}$为一致渐近可略族，简记之为$u.a.n.$族，如果

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|1-f_{n,k}(u)|=0\quad(\forall\ u\in\mathbb{R}).$$

命题 1.1 设实值随机变量X的特征函数为$f(u)$，则下列陈述等价：

(1) X是稳定的；

(2) 对任何正整数n，总存在正的常数$c_n>0$及实数d_n，使得

$$f(u)^n=e^{id_nu}f(c_nu);$$

(3) 存在特征函数$g(u)$，及实数列$\{B_n\}$和正数列$\{A_n\}$，$A_n\to\infty$，使

$$f(u)=\lim_{n\to\infty}e^{-iB_nu}g(\frac{u}{A_n})^n;$$

(4) 对任何正数$a>0,b>0$，总存在正数$c>0$及实数d，使

$$f(au)f(bu)=e^{idu}f(cu).$$

证 当$f(u)$是退化特征函数e^{iau}时，(1)—(4)皆成立. 而且(1)⇔(2)由定义1.1立即可得. 所以为了证明命题1.1，只需在$f(u)$为非退化的条件下，证明(2)⇔(3)⇔(4).

(2)⇒(3). 设(2)成立，则

$$f(u)=e^{-id_nu/c_n}f(\frac{u}{c_n})^n,\quad(\forall\ n\geqslant1)\qquad(*)$$

若能证明$c_n\to\infty$，则取$g(u)=f(u),A_n=c_n,B_n=\dfrac{d_n}{c_n}$即可得(3). 事实上，由(*)可知$f(u)$是无穷可分特征函数从而无处为0(参见[100]p. 106). 所以由(*)得

$$\lim_{n\to\infty}|f(\frac{u}{c_n})|\equiv\lim_{n\to\infty}|f(u)|^{\frac{1}{n}}\equiv1.$$

谬设$\{c_n\}$中有子列$c_{n_k}\to c$是有限数，则

$$|f(u)|=\lim_{k\to\infty}|f(\frac{cu}{c_{n_k}})|\equiv1.$$

这与$f(u)$的非退化性矛盾. 所以$c_n\to\infty$，从而(3)成立.

(3)⇒(4). 设(3)成立. 由 $A_n\to\infty$ 知:

$$\{f_{n,k}(u)=g(\frac{u}{A_n}),1\leqslant k\leqslant k_n=n,n=1,2,\cdots\}$$

是 $u.a.n.$ 族,因此,由[100]第六章定理 2.1 得知(4)成立.

(4)⇒(2). (2)是(4)的特款. 命题 1.1 证毕.

定理 1.1 设 $f(u)$ 是稳定的特征函数,则 $f(u)$ 或者是正态的,或者是退化的,或者存在 $\alpha\in(0,2)$,使

$$f(u)=e^{\psi(u)},\tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}\psi(u)&=(i\alpha u+\int_{-\infty}^{\infty}(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2})\frac{(A+B\operatorname{sgn}x)}{|x|^{1+\alpha}}dx)\\&=i\beta u+m_1\int_0^{\infty}(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2})\frac{1}{|x|^{1+\alpha}}dx\\&\quad+m_2\int_{-\infty}^{0}(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2})\frac{1}{|x|^{1+\alpha}}dx,\end{aligned}\tag{1.3}$$

其中 $m_1,m_2>0$,β 是实数,$A>0$,$|B|\leqslant A$.

称具有(1.2)、(1.3)形式的 $f(u)$ 为 α-阶稳定特征函数. α 称为稳定特征函数 $f(u)$ 的指数(或阶).

证明可参见[100]p. 179.

下面我们进一步把(1.3)的积分算出来,使稳定特征函数具有更明显的分析表达式.

定理 1.2 特征函数 $f(u)=e^{\psi(u)}$ 是指数为 $\alpha(0<\alpha\leqslant 2)$ 的稳定特征函数的充要条件是 $\psi(u)$ 有下述表达式:

$$\psi(u)=\begin{cases}icu-d|u|^{\alpha}(1-i\theta(\operatorname{sgn}u)\tan\frac{\pi\alpha}{2}),0<\alpha\leqslant 2,\alpha\neq 1\\ icu-d|u|(1-i\theta(\operatorname{sgn}u)\frac{2}{\pi}\log|u|),\alpha=1.\end{cases}$$

由上式显然可见:指数为 2 的稳定特征函数就是正态特征函数. 上式中 c、d、θ 为常数,且 $d>0$,$|\theta|\leqslant 1$.

证明可参见[100]p. 182.

定义 1.2　设$\{X_k\}$是具有公共分布$F(x)$的独立随机变量序列. 称$\{X_k\}$(或者$F(x)$,或者其特征函数$f(u)$)在指数为$\alpha\in(0,2]$的稳定律吸引场内,如果存在实数列$\{B_n\}$和正数列$\{A_n\}$,$A_n\uparrow\infty$,使

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k}{A_n}-B_n\xrightarrow{w}X^*,\tag{1.4}$$

其中X^*具有指数为α的稳定律,(1.4)中的极限为依分布收敛,或者说是测度的弱收敛.

这时,记$F\in D(\alpha)$,或者$\{X_k\}\in D(\alpha)$,或者$f(u)\in D(\alpha)$.

定理 1.3　$\forall\ \alpha\in(0,2)$,$F\in D(\alpha)$的充要条件是:

存在常数$M^+,M^-\geqslant0$,$M^++M^->0$,使得:

(1)$\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{F(-y)}{1-F(y)}=\dfrac{M^-}{M^+}$ (约定$\dfrac{a}{0}=\infty$,当$a>0$);

(2)对每个正数$\xi>0$,有

$$M^+>0\Rightarrow\lim_{y\to\infty}\frac{1-F(\xi y)}{1-F(y)}=\frac{1}{\xi^\alpha},$$

$$M^->0\Rightarrow\lim_{y\to0}\frac{F(-\xi y)}{F(-y)}=\frac{1}{\xi^\alpha}.$$

证明请参见[31]p. 207.

读者可能已经发现上述定理没有包含$\alpha=2$的情形. 但正态分布却是很大一类独立同分布的随机变量序列的正则化部分和的极限分布. 因此很有必要补足定理1.3的遗漏部分:

定理 1.4　$F\in D(2)$的充要条件是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\int_{|y|>x}F(dy)}{\int_{|y|<x}y^2F(dy)}=0.$$

证明请参见[74]的中译本 p. 195.

§2 稳定过程的定义及基本性质

定义 2.1 称实值随机过程 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 为稳定过程，如果 X 具有平稳的独立的增量且 $X(1)$ 的特征函数是稳定的. 通常称 $X(1)$ 的特征函数是 X 的特征函数.

注意：由 X 有平稳独立增量及 $X(1)$ 的特征函数是稳定的，$X(t)$ 的特征函数由 $X(1)$ 的特征函数所唯一决定，因此称 $X(1)$ 的特征函数为 X 的特征函数是合乎逻辑的.

设 $f(u)=e^{\psi(u)}$ 是稳定过程 X 的特征函数（即 f 是 $X(1)$ 的特征函数，而且稳定），当其指数 $\alpha\in(0,1)$ 时，积分

$$\int_0^\infty (e^{iux}-1)\frac{1}{x^{1+\alpha}}dx$$

存在. 于是由定理 1.1 得知：

$$\psi(u)=iu\gamma+m\int_0^\infty (e^{iux}-1)\frac{dx}{x^{1+\alpha}},0<\alpha<1.$$

若上式中 $\gamma=0$，则 X 的几乎所有的样本轨道都是非负单调增加的，这种特殊的稳定过程 X 被称为“稳定的从属过程”（stable subordinator）（“从属过程”的定义见第四章定义 1.2）.

下面我们给出取值于 $\mathbb{R}^d$ 的稳定过程的定义.

定义 2.2 若 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是取值于 $\mathbb{R}^d$ 的具有独立平稳增量的随机过程，则称 X 是 Lévy 过程. 若还有：$X(1)$ 的特征函数为 $f(z)=e^{\psi(z)}(z\in\mathbb{R}^d)$，其中

$$\psi(z)=i\langle a,z\rangle-\lambda|z|^\alpha\int_{S_d} w_\alpha(z,\theta)\mu(d\theta), \tag{2.1}$$

$0<\alpha\leqslant 2$，a 为 $\mathbb{R}^d$ 中一固定点，$\lambda>0$，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中内积，$|\cdot|$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中范数，而且

$$w_\alpha(z,\theta)=\left[1-i\operatorname{sgn}\langle z,\theta\rangle\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right]\left|\left\langle\frac{z}{|z|},\theta\right\rangle\right|^\alpha\quad(\alpha\neq 1), \tag{2.2}$$

$$w_1(z,\theta)=\left|\left\langle\frac{z}{|z|},\theta\right\rangle\right|+\frac{2i}{\pi}\langle z,\theta\rangle\log|\langle z,\theta\rangle|. \qquad (2.3)$$

μ 是单位球表面 S_d 上的概率测度，则称 Lévy 过程 X 是$\mathbb{R}^d$中 α 阶（或指数为 α 的）稳定过程. 若 $\psi(z)=-\lambda|z|^\alpha$，则称 X 为 α 阶对称稳定过程. 当(2.1)中 $a=0$ 时，称 X 为严格稳定过程. 当(2.1)中 $\alpha=2$ 时，X 为 Brown 运动. 1 阶（指数为 1 的）稳定过程称为 Cauchy 过程.

若无特别声明，本章中讨论的稳定过程都是严格稳定过程. 设 $X(t)$的特征函数为 $e^{\psi_t(z)}$，其中 $\psi_t(z)=-t|z|^\alpha\int_{S_d}w_\alpha(z,\theta)\mu(d\theta)$. 记 $p(t,x)(x\in\mathbb{R}^d)$为 $X(t)$的分布密度（$X(t)$在上述约定下，必有密度，请参见[201]）.

若 $X(rt)$与 $r^{\frac{1}{\alpha}}X(t)$同分布，则称 X 具有乘量性质. 在前述约定下，有：$p(t,x)=p(rt,r^{\frac{1}{\alpha}}x)r^{\frac{d}{\alpha}}$（当 $r>0,t>0,\alpha\neq1$）（见[201]）. 故所有指数不为 1 的严格稳定过程具有乘量性质. 由[177]知：对称 Cauchy 过程亦有乘量性质；但不对称 Cauchy 过程无乘量性质.

定义 2.3 设 $X=\{X(t),t\geqslant0\}$为任一 Lévy 过程. 称 X 是点常返的：如果

$$Z\equiv\{t\geqslant0:X(t)=X(0)\}\text{无界}; \qquad (2.4)$$

称 X 是常返的：如果

$$\{t\geqslant0:X(t)\in G\}\text{无界}(\forall\ X(0)\text{的邻域}\ G); \qquad (2.5)$$

称 X 是暂留的：如果(2.5)不成立.

关于 Lévy 过程的常返性及点常返性有下列一般性的结果.

命题 2.1 若 X 为 Lévy 过程，$\psi(z)$是 X 的特征函数的指数部分（即：$\mathrm{E}e^{i\langle z,X(1)\rangle}=e^{\psi(z)}$），则 X 为常返的充要条件是

$$\int_{|z|<\varepsilon}\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{\psi(z)}\right)dz=\infty. \qquad (2.6)$$

这一结果来自[174].

稳定过程是 Lévy 过程的特例，由(2.6)知，指数为 $\alpha(\alpha\neq1)$的

$\mathbb{R}^d$上的稳定过程常返的充要条件是$\alpha\geqslant d$. 当$d\geqslant 2$时,$\mathbb{R}^d$上的Cauchy过程是暂留的;而当$d=1$时,不对称的Cauchy过程是暂留的,对称的Cauchy过程是常返的(见[174]).

命题 2.2 设$\psi(z)$如命题2.1所定义,再设

$$p(x)=P(\{\omega:\exists\ t>0 \text{ 使 } X(t,\omega)=x\}),$$

则X是点常返的充要条件是X是常返的且$p(x)>0$在某个具有正Lebesgue测度的集合上成立.

详细证明见[120]. Kesten在[120]中还证明了,对稳定过程X,当$d\geqslant 2$时,$p(x)\equiv 0$,因此$\mathbb{R}^d(d\geqslant 2)$中的稳定过程决不可能是点常返的. $\mathbb{R}$中的稳定过程为点常返的充要条件是过程的指数$\alpha>1$.

为便于下一节讨论暂留稳定过程的像集的测度函数,我们引进下列定义.

定义 2.3 如果$p(1,0)>0$($p(t,x)$是$X(t)$的密度函数),则对应的稳定过程称为A型,反之则称为B型.

注意,稳定从属过程总是B型的,$\mathbb{R}^d$中的指数$\alpha>1$的稳定过程总是A型的,详细讨论见[201].

下面两个命题是关于稳定过程的击中概率的. 首先设$\Phi(x,E)=P^x(\{\omega:\exists\ t>0 \text{ 使 } X(t,\omega)\in E\})$(此即过程从$x$出发击中$E$的概率),$x\in\mathbb{R}^d$,$E$是$\mathbb{R}^d$中紧集,$P^x$的定义见第四章§2.

命题 2.3 设E是$\mathbb{R}^d$中边长为s的立方体,x到E的距离为h,对任意指数为$\alpha\neq 1$,$\alpha<d$的稳定过程,存在常数$c_1>0$使

$$\Phi(x,E)\leqslant c_1\left(\frac{s}{h}\right)^{d-\alpha};$$

如果过程是A型的,则存在常数$c_2>0$,使

$$\Phi(x,E)\geqslant c_2\left(\frac{s}{h}\right)^{d-\alpha}.$$

证明见[201].

命题 2.4 如果X为$\mathbb{R}$上的稳定从属过程,则

$$P(X\text{ 击中}[a,b))\equiv P^0(\{\omega:\exists\ t>0,\text{使 }X(t,\omega)\in[a,b)\})$$
$$=c\int_1^{\frac{b}{a}}u^{-1}(u-1)^{-\beta}du, c=\pi^{-1}\sin\pi\beta, a>0.$$

证明见[52].

至于 Cauchy 过程的击中概率的结果及其它性质可以从[179]和[180]中查到.

在讨论 Brown 运动时，我们提到其重对数律. 关于稳定过程 X 也有类似结果.

定义 2.5 我们定义三个与 X 相关的过程：

(1) 首次逾越过程

$$P(a)\equiv P(a,\omega)=\inf\{t\geqslant 0:|X(t,\omega)|\geqslant a\}, 0\leqslant a<\infty;$$

(2) 逗留时过程

$$T(a)\equiv T(a,\omega)=\int_0^{\infty}\mathbf{1}_{B(0,a)}(X(t,\omega))dt, 0\leqslant a<\infty,$$

其中 $B(0,a)=\{x\in\mathbb{R}^d:|x|<a\}$;

(3) 最大位移过程

$$M(t)\equiv M(t,\omega)=\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}|X(\tau,\omega)|, 0\leqslant t<\infty.$$

定理 2.1 设 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是一个 $\mathbb{R}^d$ 中的指数为 $\alpha<d,\alpha\neq 1$ 的 A 型稳定过程，则存在常数 $c_1,c_2,c_3>0$，使：

(1) $$\limsup_{a\to 0+}\frac{P(a)}{a^{\alpha}\log\log\frac{1}{a}}=c_1\quad \text{a.s.};$$

(2) $$\limsup_{a\to 0+}\frac{T(a)}{a^{\alpha}\log\log\frac{1}{a}}=c_2\quad \text{a.s.};$$

(3) $$\liminf_{t\to 0+}\frac{M(t)(\log\log\frac{1}{t})^{\frac{1}{\alpha}}}{t^{\frac{1}{\alpha}}}=c_3=c_1^{-\frac{1}{\alpha}}\quad \text{a.s.}.$$

证明参见[201].

注意，由于 $\{\omega:P(a,\omega)<r\}=\{\omega:M(r,\omega)>a\}, a>0, r>0$，因此(1)与(3)等价.

定理 2.2　设$\{X(t),t\geqslant 0\}$为$\mathbb{R}^d$中指数为$\alpha<d,\alpha\neq 1$的B型稳定过程,则存在常数$c_1,c_5,c_6>0$,使

(1)　$$\limsup_{a\to 0+}\frac{P(a)}{a^{\alpha}(\log\log\frac{1}{a})^{1-\alpha}}=c_4\quad \text{a.s.};$$

(2)　$$\limsup_{a\to 0+}\frac{T(a)}{a^{\alpha}(\log\log\frac{1}{a})^{1-\alpha}}=c_5\quad \text{a.s.};$$

(3)　$$\liminf_{t\to 0+}\frac{M(t)(\log\log\frac{1}{t})^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{t^{\frac{1}{\alpha}}}=c_6\quad \text{a.s.}.$$

证明参见[201].

如果X为不对称Cauchy过程且(2.1)式中概率测度μ满足$\int_{S_d}\theta\mu(d\theta)=\xi\neq 0$,则称$X$为严格不对称Cauchy过程.

定理 2.3　若$\{X(t),t\geqslant 0\}$为严格不对称Cauchy过程,则存在常数$c>0$使

$$\limsup_{a\to 0+}\frac{T(a,a)}{a(\log\frac{1}{a})^{-1}}=c\quad \text{a.s.},$$

其中$T(a,a)=\int_0^a \mathbf{1}_{B(0,a)}(X(t))dt$.

证明参见[177].

§3　稳定过程像集的维数及测度

设$X=\{X(t),t\geqslant 0\}$为$\mathbb{R}^d$中的稳定过程,其指数为$0<\alpha\leqslant 2$. E为$[0,\infty)$中一个Borel子集,称$X(E)\equiv X(E,\omega)=\{X(t,\omega):t\in E\}$为$X$在$E$上的像集.在这一节中,我们专门讨论$X(E)$的Hausdorff和Packing维数以及确切Hausdorff和Packing测度函数.

早在1953年,Taylor就研究了Brown运动的像集的Haus-

dorff 维数问题，稍后，Mckean、Blumenthal 和 Getoor 等研究了一般稳定过程的像集 $X(E)$ 的 Hausdorff 维数. 1985 年，Taylor 和 Tricot([208])引进了 Packing 维数和测度的概念，并找到了 $\mathbb{R}^d$($d\geqslant 3$)中 Brown 运动的像集的 Packing 测度.

在认真考察 Mckean、Blumenthal 和 Getoor 关于 $X(E)$ 的 Hausdorff 维数的工作之后，我们发现他们的证明方法对 Packing 维数也是有效的. 于是作为他们工作的推论，我们得到了 $X(E)$ 的 Packing 维数. 现将这些结果归纳如下：

引理 3.1 设 $K_\alpha(t,x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\cos(xv)\exp\left(-\frac{1}{2}t|v|^\alpha\right)dv$, $0<\alpha\leqslant 2$，则 $x^{1+\alpha}K_\alpha(t,x)\longrightarrow tc(\alpha)$（当 $x\to\infty$ 时），其中 $c(\alpha)$ 是仅依赖于 α 的正常数.

证明见[173].

引理 3.2 设 X 为指数为 α 的稳定过程，任选 $0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n\leqslant 1$ 并定义

$$X_\beta(t_0,t_1,\cdots,t_n;\omega)=\sum_{0<i\leqslant n}|X(t_i,\omega)-X(t_{i-1},\omega)|^\beta;$$

$$X_\beta^*(\omega)=\sup_{0<t_0<t_1<\cdots<t_n\leqslant 1}X_\beta(t_0,t_1,\cdots,t_n;\omega);$$

则

$$X_\beta^*(\omega)\begin{cases}<\infty & \text{a.s.，当 } 0<\alpha<\beta<1,\\ =\infty & \text{a.s.，当 } 0<\beta\leqslant\alpha<1.\end{cases}$$

利用引理 3.1 及下列事实：在时间区间[0,1]上 X 的跳度大于 x 的期望值是 $M(\alpha)x^{-\alpha}$，其中 $M(\alpha)$ 是依赖于 α 的正常数（见[47]p. 422)，则可证得此引理. 读者亦可参看[160].

引理 3.3 设 $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ 为一单增有限函数，$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 为下列形式的闭区间：$\theta_i=[\varphi(a_i),\varphi(b_i)]$，$a_i<b_i$，$i=1,2,\cdots,n$，它们互不相交，则我们可以从有限集 $\{a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n\}$ 中选出 $0\leqslant s_0\leqslant s_1\leqslant\cdots\leqslant 1$，使每个 i 对应一个 $k(i)$ 且 $\theta_i\subset[\varphi(s_{k(i)}),\varphi(s_{k(i)+1})]$，$k(i_1)\neq k(i_2)$，若 $i_1\neq i_2$.

定理 3.1 若 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是$\mathbb{R}$ 上指数为 $\alpha\in(0,2](\alpha\neq 1)$的稳定过程，则 $P(\dim(X([0,1]))=\min(\alpha,1))=1$.

证 分两步证明该定理. 我们先证：

$$P(\dim(X([0,1]))\geqslant\min(\alpha,1))=1.$$

任取 $0<\beta<\min(\alpha,1)$ 及 $0\leqslant s<t$，利用乘量性质得

$$\int_\Omega |X(s,\omega)-X(t,\omega)|^{-\beta}dP=c_1(t-s)^{-\frac{\beta}{\alpha}},$$

其中 c_1 是仅依赖于 α 和 β 的正常数. 用 Fubini 定理得

$$\int_\Omega dP\left[\int_0^1\int_0^1|X(s,\omega)-X(t,\omega)|^{-\beta}dsdt\right]$$

$$=c_1\int_0^1\int_0^1|t-s|^{-\frac{\beta}{\alpha}}dsdt<\infty,$$

所以

$$\int_0^1\int_0^1|X(s,\omega)-X(t,\omega)|^{-\beta}dsdt<\infty\quad \text{a.s.}.$$

固定一个 ω_0 使上述积分有限且 $\{X(s,\omega_0),s\geqslant 0\}$ 右连左极（见第四章 §1 注 1.2）. 选取 $c_2<\infty$ 和可测集 $Q\subset[0,1]$ 使

$$\mathscr{L}(Q)>\frac{1}{2}\text{且}\int_0^1|X(s,\omega_0)-X(t,\omega_0)|^{-\beta}dt<c_2,s\in Q,$$

其中 $\mathscr{L}$ 表示$\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度.

以闭区间族$\{\theta_i,i>0\}$覆盖 $X(Q,\omega_0)$，其中 $\operatorname{diam}(\theta_i)<\varepsilon$. 令 $Q_i=X^{-1}(\theta_i,\omega_0)$，则 Q_i 可测且$\{Q_i\cap Q,i>0\}$覆盖 Q，这意味着

$$(\operatorname{diam}(\theta_i))^{-\beta}\mathscr{L}(Q_i\cap Q)\leqslant\sup_{s\in Q_i\cap Q}\int_{Q_i\cap Q}|X(s,\omega_0)-X(t,\omega_0)|^{-\beta}dt,$$

所以

$$\frac{1}{2}<\mathscr{L}(Q)\leqslant\sum_{i>0}\mathscr{L}(Q_i\cap Q)\leqslant c_2\sum_{i>0}(\operatorname{diam}(\theta_i))^{\beta},$$

由上式得：

$$0<(2c_2)^{-1}\leqslant\varliminf_{\varepsilon\to 0+}\inf\{\sum_{i>0}(\operatorname{diam}(\theta_i))^{\beta}:X(Q,\omega_0)\subset\bigcup_{i>0}\theta_i,\operatorname{diam}(\theta_i)<\varepsilon\}$$

$= s^{\beta}\text{-}m(X(Q,\omega_0)) \leqslant s^{\beta}\text{-}m(X([0,1],\omega_0))$.

注意 ω_0 是从一个概率为 1 的集合中任取的，所以 $P(\dim(X([0,1],\omega)) \geqslant \beta) = 1$，让 β 跑遍一个可数集并趋向于 $\min(\alpha,1)$，则完成了第一步证明.

很显然，当 $\alpha \in (1,2]$ 时，定理自然成立. 下面总设 $\alpha \in (0,1)$，往证 $P(\dim(X([0,1],\omega)) \leqslant \alpha) = 1$.

选取 $0<\alpha<\beta<1$，设闭区间列 $\{\theta_i, i>0\}$ 是 $X([0,1],\omega_0)$ 的覆盖，其中 ω_0 满足 $X_{\beta}^{*}(\omega_0)<\infty$. 假设这些区间互不重叠且对每个 i，有 $X([0,1],\omega_0)$ 中的点任意接近 θ_i 的端点，不然的话，总可找到一个更小的覆盖满足上述要求. 给定 $n>0$，按从左至右顺序排列 $\theta_1,\cdots,\theta_n$，对每个 $1\leqslant i\leqslant n$，取 $a_i<b_i$ 使

$[X(a_i,\omega_0),X(b_i,\omega_0)]\subset\theta_i$ 且

$\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\mathrm{diam}(\theta_i))^{\beta}\leqslant\varepsilon+\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|X(b_i,\omega_0)-X(a_i,\omega_0)|^{\beta}$，$\varepsilon>0$ 固定.

对 $\{[X(a_i,\omega_0),X(b_i,\omega_0)],1\leqslant i\leqslant n\}$ 用引理 3.3，我们可以找到 $0\leqslant s_0\leqslant s_1\leqslant\cdots\leqslant 1$ 使

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}(\mathrm{diam}(\theta_i))^{\beta}\leqslant\varepsilon+X_{\beta}(s_0,s_1,\cdots;\omega_0).$$

在上述不等式的右端对所有的分割 $(0\leqslant s_0<s_1<\cdots\leqslant 1)$ 取上确界，然后在左端让 $n\to\infty$，最后让 $\varepsilon\downarrow 0$，则得到

$$\sum_{i>0}(\mathrm{diam}(\theta_i))^{\beta}\leqslant X_{\beta}^{*}(\omega_0).$$

这恰好证明了

$$s^{\beta}\text{-}m(X([0,1],\omega_0))=\liminf_{\varepsilon\to 0}\Big\{\sum_{i>0}(\mathrm{diam}(\theta_i))^{\beta}\Big\}$$

$$\leqslant X_{\beta}^{*}(\omega_0)<\infty \text{（引理 3.2）}.$$

注意，ω_0 是从一个概率为 1 的集合中任意选取的，所以 $P(\dim(X([0,1],\omega))\leqslant\beta)=1$. 让 β 跑遍一个可数集并收敛于 α，则我们完成了第二步的证明. 定理证毕.

推论 3.1 若 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是$\mathbb{R}$ 上指数为 $0<\alpha\leqslant 2(\alpha\neq 1)$

的稳定过程，则 $P(\mathrm{Dim}(X([0,1]))=\min(\alpha,1))=1$，从而对几乎所有 ω，$X([0,1],\omega)$ 是分形.

证 从定理 3.1 得知：$P(\mathrm{Dim}(X([0,1]))\geqslant\min(\alpha,1))=1$. 但 $\mathrm{Dim}(X([0,1]))\leqslant 1$，所以，当 $\alpha\geqslant 1$ 时，总有

$$P(\mathrm{Dim}(X([0,1]))=\min(\alpha,1))=1. \tag{3.1}$$

又因为，定理 3.1 的第二步证明也适用于 Packing 维数的情形，故仿之有

$$P(\mathrm{Dim}(X[0,1])\leqslant\alpha)=1,\ 当\ 0<\alpha<1,$$

再用定理 3.1 并注意(3.1)式，则得我们所需的结论. 推论证毕.

定理 3.2 设 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的指数为 $\alpha\in(0,2]$ 的稳定过程，则

$$P(\dim(X(E))=\min(\alpha\ \dim(E),d),\forall\ \text{Borel 集}\ E\subset\mathbb{R}^d)=1.$$

这一结果通常被称为一致维数结果. 其证明方法完全与第二章定理 2.3 相同.

仿定理 3.1 我们得到：若 X 为 $\mathbb{R}^d$ 上指数为 $\alpha\in(0,2](\alpha\neq 1)$ 的稳定过程，则

$$P(\dim(X([0,1]))=\min(\alpha,d))=1.$$

推论 3.2 X 如定理 3.2 中所定义，则

$$P(\mathrm{Dim}(X([0,1]))=\min(\alpha,d))=1.$$

证 显然 $P(\mathrm{Dim}(X([0,1]))\geqslant\min(\alpha,d))=1$. 仿[25]中定理的证明可证得：$P(\mathrm{Dim}(X([0,1]))\leqslant\min(\alpha,d))=1$. 再结合推论 3.1 则得此推论. 推论证毕.

下面我们讨论稳定过程像集的 Hausdorff 和 Packing 测度. 先回顾一下历史.

Lévy[145]率先得出了 $\mathbb{R}^d(d\geqslant 3)$ 中 Brown 运动的轨道的 Hausdorff 测度的下界，Ciesielski 和 Taylor[40]于 1962 年得到了它的上界. 其后，Ray[182]得出了平面上 Brown 运动的轨道的 Hausdorff 测度的下界，Teylor[200]接着得到了其上界. 两年以后，Taylor 与 Wendel[210]找到了稳定从属过程的像集的确切

Hausdorff 测度函数，1967 年 Taylor 一举解决了所有$\mathbb{R}^d$中暂留稳定过程的轨道的 Hausdorff 测度问题(除不对称 Cauchy 过程外)．1977 年，Taylor 与 Pruitt[177]合作找到了不对称 Cauchy 过程轨道的确切 Hausdorff 测度函数．至此，关于稳定过程的轨道的 Hausdorff 测度问题已基本解决了．1985 年 Taylor 与 Tricot 在[208]中得到了$\mathbb{R}^d(d\geqslant 3)$中的 Brown 运动轨道的确切 Packing 测度函数，1987 年 Taylor[199]又进一步研究了$\mathbb{R}^d$中指数为$\alpha<\min(2,d)$的暂留稳定过程的轨道的 Packing 测度，发现其 Packing 测度非零即∞．事实上，平面 Brown 运动的轨道的 Packing 测度也有同样性质．

我们还是先介绍有关 Hausdorff 测度的结果．

引理 3.4　设 X 为指数为 α 的稳定过程，$P(a)$如定义 2.5(1)所定义，则存在常数 $c_1,c_2>0$ 使

$$P\left\{\sup_{\gamma<a\leqslant\delta}\frac{P(a)}{\varphi(a)}<c_1\right\}<\exp\left[-c_2\left(\log\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{8}}\right],$$

其中 $0<\gamma\leqslant\gamma_0$ 且 $\delta\geqslant\gamma^{\frac{1}{6}}$，

$$\varphi(a)=\begin{cases}a^{\alpha}\log\log\dfrac{1}{a}，如果 X 是 A 型的，\\ a^{\alpha}\left(\log\log\dfrac{1}{a}\right)^{1-\alpha}，如果 X 是 B 型的.\end{cases}$$

证明见[201]．

引理 3.5　如果 $E=\bigcup\limits_{j=1}^{m}I_j$，其中 I_j 为$\mathbb{R}^d$中的二进制立方体，则我们可找到$\{1,\cdots,m\}$的一个子集$\{j_r\}$使 $E=\bigcup\limits_{j_r}I_{j_r}$，而且 E 中没有一个点同时在 2^d 个以上的二进制立方体 I_{j_r} 中．

证明见[200]．

设 $R(t)\equiv R(t,\omega)=X([0,t],\omega)$，$\Lambda_n$ 为全体边长为 2^{-n+1}、中心为$\left(\dfrac{j_1}{2^n},\cdots,\dfrac{j_d}{2^n}\right)$且左闭右开的二进制立方体，$\Lambda_n'$ 为全体边长为 2^{-n}、中心在$\left(\dfrac{j_1}{2^n},\cdots,\dfrac{j_d}{2^r}\right)(j_1,\cdots,j_r\in\mathbb{N})$且左闭右开的二进制立方

体.

定理 3.3 设 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中指数为 $\alpha<d,\alpha\neq 1$ 的一个稳定过程，定义

$$\varphi(t)=\begin{cases} t^{\alpha}\log\log\dfrac{1}{t}, & \text{如果 } X \text{ 为 } A \text{ 型} \\ t^{\alpha}\left(\log\log\dfrac{1}{t}\right)^{1-\alpha}, & \text{如果 } X \text{ 为 } B \text{ 型,} \end{cases}$$

则总存在常数 $c>0$，使 $\forall\ t>0$，$\varphi\text{-}m(R(t))=ct$ a. s..

注 该定理的证明方法是解决这一类问题的经典方法，这一结果来自[201].

证 利用第一章定理 2.3 及本章定理 2.1(ii)、定理 2.2(ii) 以及 Fubini 定理可得：存在常数 $c_3>0$ 使 $\forall\ t>0$ 有

$$\varphi\text{-}m(R(t))\geqslant c_3 t \text{ a. s..}$$

$\forall\ \delta>0$，令 $\gamma_n=2^{-n}\leqslant\min(\delta_1^6,\gamma_0)$，其中 $\delta_1=\dfrac{\delta}{4d^{\frac{1}{2}}}$，$\gamma_0$ 如引理3.4 所定义. 考虑 Λ_n' 中的二进制立方体. 我们称 Λ_n' 中的二进制立方体 C 是坏的，如果：

(1) $R(s)$ 与 C 在时刻 $\tau\leqslant t$ 与 C 相遇，即存在 $\tau\leqslant t$ 使 $X(\tau)\in C$；

(2) 对所有满足 $\gamma_n\leqslant a\leqslant\delta_1$ 的 a，过程 X 在以 $X(\tau)$ 为中心以 a 为半径的开球中停留的时间小于 $c_1\varphi(a)$，其中 c_1 如引理 3.4 中所定义.

根据引理 3.4 我们有：在已知 $R(t)$ 与 C 相遇的条件下，C 是坏的概率至多为 $\exp(-c_2 n^{\frac{1}{8}})$，$c_2$ 如引理 3.4 中所定义. 现在我们用命题 2.3 估计 Λ_n' 中坏立方体的个数(N_n)的期望值，可证

$\mathrm{E}N_n\leqslant c_4 2^{\alpha n}\exp(-c_2 n^{\frac{1}{8}})$，$c_4>0$ 为常数. 设 $\Sigma_n=N_n\varphi(\frac{1}{2^n})$，则 $\mathrm{E}N_n\leqslant\exp(-c_5 n^{\frac{1}{10}})$，$c_5>0$ 为常数. 由 Borel-Cantelli 引理知：存在 $\Omega_0\subset\Omega$，$P(\Omega_0)=1$，使得 $\forall\ \omega\in\Omega_0$，当 $n\geqslant n_0\equiv n_0(\omega)$ 时，$\sum_n<\frac{1}{n^2}$.

令 $\mu(E)=\mathscr{L}(\{s\leqslant t: X(s)\in E\}), E\subset\mathbb{R}^d$.

$A_n=\{x\in R(t): \forall\ a\in[\gamma_n,\delta_n]$, 过程在以 $X(\tau)$ 为中心以 a 为半径的球中停留时间小于 $c_1\varphi(a)\}$,

其中 $\gamma_n<\delta_n<\gamma_{n-1}$.

由前面的推导知: $\varphi\text{-}m(A_n)=0, n\geqslant n_0(\omega)$. 现令

$$G=\left\{x\in R(t): \liminf_{r\downarrow 0}\frac{\varphi(r)}{\mu(B(x,r))}\leqslant\frac{1}{2c_1}\right\},$$

则 $R(t)-\bigcup_n A_n\subset G$, 而由密度定理知:

$$\varphi\text{-}m(G)<\infty\quad \text{a.s.}.$$

总之, 对几乎所有的 ω, $\varphi\text{-}m(R(t))<\infty$.

对固定的 $\omega\in\Omega_0$, 由于函数 $f(t)\equiv f(t,\omega)=\varphi\text{-}m(R(t,\omega))$ 是正的且有限, 根据[129]定理 V2.3 得 $f(t)=\mu t+\sigma W(t)$, μ 是常数, $W(t)$ 是 Wiener 过程(期望为 0, 方差为 1). 由 $f(t)$ 的单调性推出 $\sigma=0$, 而 $\forall\ t>0$, $f(t)>0$, 所以 $\mu>0$. 于是对 a.s. ω,

$$\varphi\text{-}m(R(t))=c_6t, c_6 \text{ 为正常数}.$$

定理证毕.

我们注意到, 上述定理所研究的稳定过程不包括 Cauchy 过程, 因为 Cauchy 过程, 尤其是不对称的 Cauchy 过程, 性质总是很特殊. 下面两个定理则是关于 Cauchy 过程的测度函数问题.

定理 3.4　$\mathbb{R}^d$ 中对称 Cauchy 过程的像集的确切 Hausdorff 测度函数为

$$\varphi(t)=\begin{cases} t\left(\log\dfrac{1}{t}\right)\left(\log\log\log\dfrac{1}{t}\right), & d=1,\\ t\log\log\dfrac{1}{t}, & d\geqslant 2.\end{cases}$$

证　当 $d\geqslant 2$ 时, 仿定理 3.3 可证; 当 $d=1$ 时, 则用[182]中方法证明之.

定理 3.5　设 X 是 $\mathbb{R}^d(d\geqslant 2)$ 中不对称 Cauchy 过程, 则存在常数 $c>0$ 使 $\forall\ t>0$ 有

$$\varphi\text{-}m(R(t))=ct \quad \text{a.s.},$$

其中

$$\varphi(t)=\begin{cases} t(\log \frac{1}{t})^{-1}, & 0<t<e^{-1} \\ t \quad , & t\geqslant e^{-1}. \end{cases}$$

注意，$d=1$ 时，易见 $R(t)$ 具有正 Lebesgue 测度，故无需考虑其 Hausdorff 测度. 上述定理的证明参见[177].

定义 3.1 令 $T(r)=T_1(r)+T_2(r)$，其中 $T_1(r)$ 为过程 X 在开球 $B(0,r)$ 中的停留时间，$T_2(r)$ 为过程 $Y=\{Y(-t),t\geqslant0\}$（$\{Y(-t)\}$ 与 $\{X(t)\}$ 独立同分布）在开球 $B(0,r)$ 中的停留时间.

由定义 3.1 知：(1) $T_1(r)$ 与 $T_2(r)$ 是独立同分布的；(2) 若令 $\mu(E)=\mathscr{L}(\{t\in[0,1]:X(t)\in E\})$，$\nu(E)=\mathscr{L}(\{t\in[0,1]:Y(-t)\in E\})$，则 $\forall\ t>0$，$\mu(B(X(t),r))$ 与 $\mu(B(0,r))+\nu(B(0,r))$ 同分布，而且对 a.s. ω，当 $r\leqslant r_0(\omega)$ 时，$T(r)=\mu(B(0,r))+\nu(B(0,r))$（见[176]）.

从现在起到本章末，我们以符号“$f(t)\approx g(t)$”表示 f 与 g 同阶，即存在常数 $c_1,c_2>0$，使

$$c_1g(t)\leqslant f(t)\leqslant c_2g(t),\ t\leqslant t_0;$$

以符号“$f(t)\sim g(t)$”表示

$f(t)/g(t)\longrightarrow c$（当 $t\downarrow 0$ 或 $t\uparrow\infty$），其中 $0<c<\infty$.

引理 3.6 设 $X=\{X(t),t\geqslant0\}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中指数为 $\alpha<\min(2,d)$ 的稳定过程，令 $h(t)=t^\alpha\psi(t)$，$\psi(t)$ 为测度函数，则我们有

$$\liminf_{t\downarrow 0}\frac{T_1(t)+T_2(t)}{h(2t)}=\begin{cases}0\\ \infty\end{cases} \text{a.s. 当且仅当}$$

$$\int_{0+}\frac{\psi^2(t)}{t}dt\begin{cases}=\infty\\ <\infty.\end{cases}$$

证 在证明引理之前，我们先给出一个分布估计式：若 $F(x)=P(|X(1)|\geqslant x)$，则

$$1-F(x)\sim x^{-\alpha},\ (x\leqslant x_0). \tag{3.2}$$

这一估计式来自[189].

为方便起见，在该引理的证明中，用 X_1 表示原过程 X，X_2 表示定义 3.1 中的 Y 过程.

首先，我们假定 $\int_{0+}\frac{\psi^2(t)}{t}dt<\infty$. 固定任一 $\lambda>0$，定义

$$E_{\lambda,n}=\{\omega:T_1(2^{-n})+T_2(2^{-n})<\lambda h(2^{-n+1})\},$$

$$D_{i,\lambda,n}=\{\omega:T_i(2^{-n})<\lambda h(2^{-n+1})\},i=1,2.$$

显然 $E_{\lambda,n}\subset D_{1,\lambda,n}\cap D_{2,\lambda,n}$. 由(3.2)有

$$P(D_{i,\lambda,n})\leqslant P(\{\omega:|X_i(\lambda h(2^{-n+1}),\omega)|\geqslant 2^{-n}\})\approx\psi(2^{-n}),\tag{3.3}$$

所以根据 $D_{1,\lambda,n}$ 与 $D_{2,\lambda,n}$ 相互独立的事实得

$$\sum_{n\geqslant 1}P(E_{\lambda,n})\leqslant c\sum_{n\geqslant 1}[\psi(2^{-n})]^2,c>0\text{ 为常数}.$$

但由假设知：$\sum_{n\geqslant 1}[\psi(2^{-n})]^2$ 收敛，而 λ 又是任意的，故根据 Borel-Cantelli 引理得：

$$\liminf_{t\downarrow 0}\frac{T_1(t)+T_2(t)}{h(2t)}=\infty\quad\text{a. s.}.$$

现设 $\int_{0+}\frac{\psi^2(t)}{t}dt=\infty$. 令

$$\begin{aligned}F^k_{i,\lambda,n}=\{\omega:&|X_i(\lambda h(2^{-n+1}))|<k(\lambda h(2^{-n}))^{\frac{1}{\alpha}},\\&|X_i(\lambda h(2^{-n+1}))-X_i(\lambda h(2^{-n}))|>(2k)2^{-n}\},\\&i=1,2,\end{aligned}$$

其中 k 充分大且固定. 易见 $F^k_{i,\lambda,n}\subset D_{i,\lambda,n}$. 由 X_i 的独立平稳增量性有

$$P(F^k_{i,\lambda,n})\geqslant\tau_k P(H^k_{i,\lambda,n}),$$

其中 $H^k_{i,\lambda,n}=\{\omega:|X_i(\lambda h(2^{-n+1}))-X_i(\lambda h(2^{-n}))|>(2k)2^{-n}\},i=1,2,\tau_k\to 1$(当 $k\to\infty$). 固定 k，由于 $\int_{0+}\frac{\psi^2(t)}{t}dt=\infty$ 及(3.3)，我们得到 $\sum_{n\geqslant 1}P(F^k_{1,\lambda,n}\cap F^k_{2,\lambda,n})=\infty$，而且对 $m\neq n$ 有

$$P(F^k_{i,\lambda,m}\cap F^k_{i,\lambda,n})\leqslant P(H^k_{i,\lambda,m}\cap H^k_{i,\lambda,n})$$

$$\leqslant \tau_k^{-2} P(F^k_{i,\lambda,m} \cap F^k_{i,\lambda,n}), i=1,2.$$

由推广的 Borel-Cantelli 引理，$P(\limsup_{n\to\infty}(F^k_{1,\lambda,n}\cap F^k_{2,\lambda,n}))\geqslant\tau_k^4$，从而 $P(\limsup_{n\to\infty}(D_{1,\lambda,n}\cap D_{2,\lambda,n}))=1$，进而 $P(\limsup_{n\to\infty} E_{\lambda,n})=1$. 令 $\lambda\to 0$，则得：

$$\liminf_{t\downarrow 0}\frac{T_1(t)+T_2(t)}{h(2t)}=0 \quad \text{a.s.}.$$

引理证毕.

定理 3.6 若 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 为$\mathbb{R}^d$上指数为 $\alpha<\min(2,d)$ 的稳定过程，令 $h(t)=t^\alpha\psi(t)$，$\psi(t)$ 为测度函数，则

$$h\text{-}p(R(1))=\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}\text{a.s.}\quad \text{当且仅当}$$

$$\int_{0+}\frac{\psi^2(t)}{t}dt\begin{cases}<\infty\\ =\infty.\end{cases}$$

证 令 $\mu(E)=\mathscr{L}(\{t\in[0,1]:X(t)\in E\})$.

注意 μ 与 $T(r)$ 的定义，再由第一章定理 3.4、引理 3.6 及 Fubini 定理得

$$h\text{-}p(R(1))=\infty \quad \text{a.s. 当}\int_{0+}\frac{\psi^2(t)}{t}dt=\infty\text{时}.$$

现设 $\int_{0+}\frac{\psi^2(t)}{t}dt<\infty$. 令

$$G=\left\{t\in(0,1):\liminf_{r\downarrow 0}\frac{\mu(B(X(t),r))}{h(2r)}=\infty\right\},$$

由第一章定理 3.4 知：$h\text{-}p(X(G))=0$. 考虑：

$$Q_n=\{t\in(0,1):\liminf_{r\downarrow 0}\frac{\mu(B(X(t),r))}{h(2r)}\leqslant n\},n\geqslant 1.$$

称 $v_k(x)$（其定义参见第一章(3.3)后）为一个坏半二进制立方体，若 $x=X(t)\in R(1)$ 且过程 X 在 $B(X(t),2^{-k-2})$ 内停留时间小于 $nh(2^{-k})$. 对每个 k，被 X 击中的边长为 2^{-k} 的半二进制立方体的个数(N_k)的期望值为 $O(2^{k\alpha})$，而且在已知某个边长为 2^{-k} 的半二进制立方体被击中的条件下它是坏的概率为 $O(\psi(2^{-k}))$. 所

以由第一章(3.4)式得:

$$\mathbf{E}(h\text{-}P^{**}(X(Q_n)))\leqslant c_1\sum_{k\geqslant k_0}\mathbf{E}N_k h(2^{-k})$$

$$\leqslant c_2\sum_{k\geqslant k_0}(\psi^2(2^{-k}))\to 0.\ \text{当}\ k_0\to\infty,$$

其中 $c_1,c_2>0$ 为常数,从而 $h\text{-}P^{**}(X(Q_n))=0$ a.s.,于是 $h\text{-}p^{**}(X(Q_n))=0$ a.s.,注意 $G\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}Q_n=(0,1)$,因此 $h\text{-}p^{**}(X([0,1]))=0$ a.s.. 定理证毕.

定理 3.7　设 X 是$\mathbb{R}^d(d\geqslant 2)$上的不对称 Cauchy 过程且

$$\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{\log\dfrac{1}{t}}, & t<e^{-1}\\ t\quad, & t\geqslant e^{-1},\end{cases}$$

则$\forall$ $\mathbb{R}^d$中 Borel 集 E,$\varphi\text{-}p(X(E))=\mathscr{L}_d(E)$　a.s..

证明参见[184].

§4　稳定过程的图集的维数及测度函数

早在 1955 年 Taylor[204]就研究了 Brown 运动的零集和图集的 Hausdorff 维数,其后 Blumenthal 和 Getoor[28]找到了直线上对称稳定过程的零集和图集的 Hausdorff 维数. Jain 和 Pruitt[110]则解决了暂留稳定过程的图集的确切 Hausdorff 测度问题,而关于直线上常返稳定过程的 Hausdorff 测度的结果来自 Pruitt 和 Taylor[175]. 不对称 Cauchy 过程的图集的 Hausdorff 测度在[91]和[177]中由 Hawkes 和 Pruitt 与 Taylor 解决. 1988 年,Rezakhanlou 和 Taylor[184]研究了稳定过程图集的 Packing 测度.

本节恒简记:

$$\mathrm{Gr}(t)\equiv\mathrm{Gr}X([0,t])=\{(s,X(s)):0\leqslant s\leqslant t\},$$

$$\mathrm{Gr}\equiv\mathrm{Gr}X([0,\infty))=\{(s,X(s)):s\geqslant 0\}.$$

$\mathrm{Gr}(t)$为 X 在时刻 t 以前的图集，Gr 则为 X 的图集.

令

$$Z_x(t)=\{0\leqslant s\leqslant t:X(s)=x\},$$
$$Z_x=\{t\geqslant 0:X(t)=x\}.$$

当 $x=0$ 时，称 Z_0 为 x 的零集. 我们记 $Z\equiv Z_0, Z(t)=Z_0(t)$. 为证明方便起见，在本节中总设 $X(0)\equiv 0$.

注意，对直线上任一指数为 α 的稳定过程 $X(1<\alpha\leqslant 2)$，概率为 1 地存在一个二元连续函数 $L(x,t)$，使得对任一给定的 Borel 集 A 有

$$\mathscr{L}(\{0\leqslant s\leqslant t:X(s)\in A\})=\int_A L(x,t)dx.$$

称 $L(x,t)$ 为 X 在点 x 的局部时（在时刻 t 以前），记 $l(t)\equiv L(0,t)$.

令 $\tau(t)=\inf\{u\geqslant 0:l(u)>t\}$，则由[195]知：$\tau$ 是一个指数为 $1-\alpha^{-1}$的稳定从属过程且 $Z(t)=\overline{\tau[0,t]}$，$\overline{\tau[0,t]}-\tau[0,t]$为一可数集，（$\overline{\tau[0,t]}$是 $\tau[0,t]$的闭包）.

定理 4.1 设 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$是直线上指数为 $\alpha\in(1,2]$的稳定过程，$\{l(t),t\geqslant 0\}$为 X 在零点的局部时过程，则存在常数 $c>0$使得$\forall\ t>0$，

$$\varphi\text{-}m(Z\cap[0,t])=cl(t)\quad \text{a.s.},$$

其中 $\varphi(s)=s^\beta\left(\log\log\dfrac{1}{s}\right)^{1-\beta}, \beta=1-\dfrac{1}{\alpha}$.

证明见[210].

由定理 3.6 我们有：

定理 4.2 设 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$如定理 4.1 所设，$h(s)=s^\alpha\psi(s)$ 如定理 3.6 所定义，则

$$h\text{-}p(Z\cap[0,1])=\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}\quad \text{a.s.}\quad 当且仅当$$

$$\int_{0+}\frac{\psi^2(s)}{s}ds\begin{cases}<\infty\\ =\infty.\end{cases}$$

定理 4.3 设 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是直线上对称稳定过程且指数为 $\alpha\in(0,1]$，则 $P(\dim(\mathrm{Gr})=1)=1$.

证明参见[28].

事实上，在 $\alpha<1$ 的情形下，上述定理的结论可以从后面的定理 4.5 导出. 我们这里真正关心的是直线上对称 Cauchy 过程的图集的分形性质.

推论 4.1 若 X 为直线上对称 Cauchy 过程，则 $\dim(\mathrm{Gr})=\mathrm{Dim}(\mathrm{Gr})=1$ a.s..

证 事实上，由定理 4.3 知，我们只需证明 $\mathrm{Dim}(\mathrm{Gr})\leqslant 1$ a.s.，而[28]中关于上述定理的证明方法实际上可用来证明 $\mathrm{Dim}(\mathrm{Gr})\leqslant 1$ a.s.，故结论成立. 推论证毕.

定理 4.4 设 X 是直线上指数为 $\alpha\in(1,2]$ 的稳定过程，则存在一个常数 $c>0$ 使 $\forall\ s>0$，

$$\varphi\text{-}m(\mathrm{Gr}(s))=cs\quad \text{a.s.},$$

其中 $\varphi(s)=s^{2-\frac{1}{\alpha}}(\log\log\frac{1}{s})^{\frac{1}{\alpha}}$.

在证明这个定理之前，我们需要下面四个引理，第一个引理来自[52]，后面三个则来自[175].

引理 4.1 设 X 是直线上指数为 $\alpha\in(1,2]$ 的稳定过程，则存在常数 $c_1>0$，使 $[u,v)$ 与 X 的零集不交的概率是

$$c_1\int_{\frac{u}{v}}^{\infty}s^{-1}(s-1)^{\frac{1}{\alpha}-1}ds,\ u>0.$$

令

$$T(a,t)=\int_0^t \mathbf{1}_{B(0,a)}(X(s))ds;\tag{4.1}$$

$$\Lambda(s,m)=\left\{C:\begin{array}{l}C\text{ 为边长为 }s\leqslant 1\text{ 的立方体且}\mathbb{R}^d\\ \text{中任一半径为 }s\text{ 的球至多与 }m\\ \text{个这样的立方体有非空交集}\end{array}\right\};\tag{4.2}$$

$M(s,t)=$ 在时刻 t 之前被 X 击中的 $\Lambda(s,m)$ 中的立方体的个数. (4.3)

引理 4.2 若 X 如引理 4.1 所设，则存在常数 $c_2,c_3>0$，使 $\forall\ t\geqslant 2a^{\alpha}, a>0$ 有：

$$c_2at^{1-\frac{1}{\alpha}}\leqslant \mathbf{E}(T(a,t))\leqslant c_3at^{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

引理 4.3 若 X 同上，则存在常数 $\lambda_0,c_4,c_5,c_6>0$，使得对 $[\lambda_0,c_4a^{-1}t^{\frac{1}{\alpha}}]$ 中任一元 λ 有

$$\exp(-c_5\lambda^{\alpha})\leqslant P(T(a,t)\geqslant \lambda at^{1-\frac{1}{\alpha}})\leqslant \exp(-c_6\lambda^{\alpha}).$$

引理 4.4 若 X 是$\mathbb{R}^d$中具有平稳独立增量的随机过程，则

$$\mathbf{E}M(a,s)\leqslant 2m[\mathbf{E}T(\frac{a}{3},s)]^{-1},$$

$a\leqslant 1$，m 如(4.2)式所定义.

现在我们来证明定理 4.4.

令 $Y(t)=(t,X(t))$，则 $T(a,a)$（$=X$ 在时刻 a 之前于开球 $B(0,a)$ 中所逗留的时间）可看作是 $Y(t)$ 在长方形 $\{(t,X(t)):0\leqslant t\leqslant a,|X(t)|\leqslant a\}$ 中逗留的时间. 由引理 4.3 得

$$\exp(-c_5\lambda^{\alpha})\leqslant P(T(a,a)\geqslant \lambda a^{2-\frac{1}{\alpha}})\leqslant \exp(-c_6\lambda^{\alpha}).$$

给定一个正整数 n，定义一列停时 $\tau_k(k=2n,\cdots,n)$ 如下：

$$\tau_{2n}=0\text{，而当 } k<2n \text{ 时，令 } \tau_k=\inf\{t\geqslant \tau_{k+1}+\frac{1}{2}a_{k+1}:X(t)=0\},$$

其中 $a_k=\exp(-k^2)$. 进而定义

$$T_k=\int_{\tau_k}^{\tau_k+\frac{1}{2}a_k}\mathbf{1}_{B(0,\frac{1}{2}a_k)}(X(t))dt,\quad n\leqslant k\leqslant 2n,$$

其中 τ_k,a_k 同上.

由[175]中引理 5.2、5.3 的证明可导出

$$P\left(\sup_{n\leqslant k\leqslant 2n}\frac{T_k}{\varphi(a_k)}<c_7\right)\leqslant \exp(-c_8n^{\frac{1}{3}}),\tag{4.4}$$

其中 $c_7,c_8>0$ 为常数. 我们设

$$R_n=\bigcup_{k=n+1}^{2n}\{\tau_k>\frac{1}{2}a_k\},$$

易见 $R_n \subset \bigcup_{k=n+1}^{2n} \{\tau_k - \tau_{k-1} > \frac{1}{2}(a_k - a_{k-1})\}$.

引理 4.1 告诉我们

$$P(R_n) < ne^{-c_9 n}, c_9 > 0 \text{ 为常数.} \tag{4.5}$$

(4.4)与(4.5)结合可导出：存在常数 $c_{10}, c_{11} > 0$ 使

$$P\left(\sup_{\gamma \leqslant a \leqslant \delta} \frac{T(a,s)}{\varphi(a)} < c_{10}\right) < \exp\left(-c_{11}\left(\log \frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{8}}\right), \tag{4.6}$$

其中 $0 < \gamma \leqslant \gamma_0, \delta \geqslant \gamma^{\frac{1}{6}}$. 由(4.6)式和引理 4.3 知：存在某个常数 $c_{12} > 0, \forall\ s > 0$，我们有

$$\limsup_{a \to 0} \frac{T(a,s)}{\varphi(a)} = c_{12} \quad \text{a.s.}.$$

再由引理 4.2 与引理 4.4 得出 $\mathbf{E}M(a,s)$ 的估计式：

$$\mathbf{E}M(a,s) \leqslant c_{13} a^{-1} s^{\frac{1}{\alpha}}, c_{13} > 0 \text{ 为常数.} \tag{4.7}$$

现在我们所需的工具已经齐备了. 仿定理 3.3 可证此定理. 定理证毕.

引理 4.5 设 S 为 $\mathbb{R}^d$ 中半径为 a 的球，X 为 $\mathbb{R}^d$ 中指数为 $\alpha < d$（不包括不对称 Cauchy 过程）的稳定过程，则存在常数 $c > 0$ 使对任意 $T > 0$ 有：

$$P(X(t) \in S, \text{对某个 } t \geqslant T) \leqslant c\left(\frac{a}{T^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{d-\alpha}.$$

证明见[110].

定理 4.5 设 X 如上述引理所定义，又设

$$\varphi(s) = \begin{cases} s, & \alpha \leqslant 1 \\ s^\alpha \log\log \frac{1}{s}, & \alpha > 1, \end{cases}$$

则存在常数 $c > 0$，使 $\forall\ t > 0$ 有

$$\varphi\text{-}m(\mathrm{Gr}(t)) = ct \quad \text{a.s.},$$

当 $\alpha < 1$ 时，$c = 1$.

证 先考虑测度的下界. 当 $\alpha \leqslant 1$ 时，把 $\mathrm{Gr}(t)$ 投影到时间轴上，则得

$$\varphi\text{-}m(\mathrm{Gr}(t))\geqslant\varphi\text{-}m([0,t])=t.$$

当 $\alpha>1$ 时，由定理 3.3 得

$$\varphi\text{-}m(\mathrm{Gr}(t))\geqslant\varphi\text{-}m(X([0,t]))=c_1t,c_1>0\text{ 为常数}.$$

至于测度的上界，则需分三种情形讨论.

(i) $\alpha<1$.

$\forall\ \varepsilon>0$，取 γ 使 $0<\gamma<\frac{\varepsilon}{4}$. 取 $\sigma_0=0$，对每个 $k\geqslant1$，定义

$$\tau_k=\tau_k(\gamma)=\inf\{s\geqslant\sigma_{k-1}:|X(s)-X(\sigma_{k-1})|>\gamma\},$$

$$\sigma_k=\sigma_k(\gamma)=\min\{\tau_k,\sigma_{k-1}+\frac{\varepsilon}{2}\}.$$

由轨道的右连续性知：$|X(\tau_k)-X(\sigma_{k-1})|\geqslant\gamma$. 设

$$M=\min\{k:\sigma_k\geqslant t\},A_k=[\sigma_{k-1},\sigma_k)\times X([\sigma_{k-1},\sigma_k)),$$

则 $\{A_k\}_{k=1}^M$ 是 $\mathrm{Gr}(t)$ 的一个覆盖. 又设

$$\Delta_k=\sup_{u,v\in[\sigma_{k-1},\sigma_k)}|X(u)-X(v)|,$$

易见 $|X(u)-X(v)|\leqslant2\gamma$（对任意的 $u,v\in[\sigma_{k-1},\sigma_k)$），因此 $\Delta_k\leqslant2\gamma$，所以 $\mathrm{diam}(A_k)\leqslant\sigma_k-\sigma_{k-1}+\Delta_k\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+2\gamma<\varepsilon$.

任取 β 使 $\alpha<\beta<1$，当 $\sigma_k=\tau_k$ 时，我们有

$$\Delta_k\leqslant2\gamma\leqslant2\gamma^{1-\beta}|X(\sigma_k)-X(\sigma_{k-1})|^\beta;$$

当 $\sigma_k=\sigma_{k-1}+\frac{\varepsilon}{2}$ 时，则有

$$\Delta_k\leqslant2\gamma=4\gamma\varepsilon^{-1}(\sigma_k-\sigma_{k-1}).$$

总之，$\Delta_k\leqslant2\gamma^{1-\beta}|X(\sigma_k)-X(\sigma_{k-1})|^\beta+4\gamma\varepsilon^{-1}(\sigma_k-\sigma_{k-1})$.

将上述关于 $\mathrm{diam}(A_k)$ 及 Δ_k 的估计式用于下面的求和式子则得：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^M\mathrm{diam}(A_k)&\leqslant\sum_{k=1}^M[(\sigma_k-\sigma_{k-1})+\Delta_k]\\&\leqslant\sum_{k=1}^M[(1+4\gamma\varepsilon^{-1})(\sigma_k-\sigma_{k-1})+2\gamma^{1-\beta}|X(\sigma_k)-\\&\quad X(\sigma_{k-1})|^\beta]\end{aligned}$$

$$\leqslant(1+4\gamma\varepsilon^{-1})(t+\frac{\varepsilon}{2})+2\gamma^{1-\beta}\sum_{k}^{M}{}_{1}|X(\sigma_k)-$$
$$X(\sigma_{k-1})|^{\beta}.$$

但由[29]中定理 4.2 知 X 在$[0,t+\frac{\varepsilon}{2}]$上的 β- 变差是 a.s. 有限的，而 γ 是任意的，故

$$\varphi\text{-}m(\mathrm{Gr}(t))\leqslant t+\frac{\varepsilon}{2}\quad \text{a.s.}.$$

让 $\varepsilon\to 0$，我们有 $\varphi\text{-}m(\mathrm{Gr}(t))=t$ a.s.（当 $\alpha<1$）.

(ii)$\alpha=1$ 且 X 是对称的 Cauchy 过程.

定义

$\sigma_0'=0,\sigma_k'=\sigma_k'(a)=\min\{\tau_k',\sigma_{k-1}'+a\},k\geqslant 1,a>0,$

$\tau_k'=\tau_k'(a)=\inf\{s\geqslant\sigma_{k-1}':|X(s)-X(\sigma_{k-1}')|>a\},k\geqslant 1,a>0,$

$Y_k=Y_k(a)=\sigma_k'(a)-\sigma_{k-1}'(a),k\geqslant 1,a>0,$

$\eta=\eta(a)=\min\{k:\sigma_k'(a)>t\},k\geqslant 1,a>0.$

令 $B_k=[\sigma_{k-1}',\sigma_k')\times X([\sigma_{k-1}',\sigma_k'))$，则$\{B_k\}_{k=1}^{\eta}$是 $\mathrm{Gr}(t)$ 的一个覆盖，且覆盖中每个集的直径至多为 $3a$. 故

$$\varphi\text{-}m(\mathrm{Gr}(t))\leqslant\liminf_{a\to 0}\ \eta(a)\cdot 3a.$$

由弱大数定律知，$\frac{\sigma_k'(1)}{k}$依概率收敛于 $\mathrm{E}Y_1(1)$. $\forall\ \varepsilon>0$，令 $\delta=\frac{\mathrm{E}Y_1(1)}{2}$，由乘量性质得：当 $k>K$ 时，

$$P\left(\left|\frac{\sigma_k'(a)}{k}-a\mathrm{E}Y_1(1)\right|\geqslant a\delta\right)=P\left(\left|\frac{\sigma_k'(1)}{k}-\mathrm{E}Y_1(1)\right|\geqslant\delta\right)<\varepsilon.$$

因为在集合$\{|\frac{\sigma_k'(a)}{k}-a\mathrm{E}Y_1(1)|\leqslant a\delta\}$上有

$$\frac{\sigma_k'(a)}{k}\geqslant a\delta\quad(\text{注意},\mathrm{E}Y_1(1)=2\delta),$$

所以对一切 $a\leqslant t(K\delta)^{-1}$，我们有

$$P(\eta(a)\leqslant t(a\delta)^{-1}+1)\geqslant P\left(\frac{\sigma_k'(a)}{k}\geqslant a\delta\right)\geqslant 1-\varepsilon.$$

取 $\epsilon_n=2^{-n}$，则存在 $a_n\to 0$ 使

$$P(\eta(a_n)\geqslant t(a_n\delta)^{-1}+1)\leqslant 2^{-n}.$$

应用 Borel-Cantelli 引理，我们得到

$$\limsup_{n\to\infty} a_n\eta(a_n)\leqslant t\delta^{-1}\quad \text{a.s.}.$$

这证明了 $\varphi\text{-}m(\mathrm{Gr}(t))$ 具有有限上界. 用定理 3.3 中的方法可证得 $\varphi\text{-}m(\mathrm{Gr}(t))=c_2t$ a.s.，$c_2>0$ 为常数.

(iii) $\alpha>1$.

考虑下述形式的立方体族：

$$\Lambda_n=\left\{\{x\in\mathbb{R}^d:\frac{j_i-1}{2^n}\leqslant x_i\leqslant\frac{j_i+1}{2^n},i=1,\cdots,d\}:j_i\in\mathbb{N},i=1,\cdots,d\right\}.$$

定理 3.3 的证明告诉我们，当 n 充分大时，存在一个 $X([0,t])$ 的覆盖 $\mathscr{G}=\{C_i\}\subset\bigcup_{j=n}^{6n}\Lambda_j$，使

$$\sum_i\varphi(\mathrm{diam}(C_i))\leqslant M,$$

其中 M 是一正常数. 现在选取正整数 k 使

$$k\cdot\frac{\alpha-1}{\alpha}(d-\alpha)>2. \tag{4.8}$$

我们称 Λ_m 中一个立方体 C 是坏的，如果 C 被 X 在时刻 $\tau\leqslant t$ 击中且 X 在 C 中所逗留的时间集(即 $\{s\geqslant 0:X(s)\in C\}$)不能被 k 个长度为 $2^{-m+1}\sqrt{d}$ 的区间所覆盖. 不是坏立方体就称之为好立方体.

现在来刻画图集 $\mathrm{Gr}(t)$ 的覆盖. 首先考虑一个来自 $X([0,t])$ 的如上的覆盖 $\mathscr{G}$ 中的好立方体 $C_i\in\Lambda_m$. 因为 C_i 是好的，所以要么 C_i 在时刻 t 之前不被 X 击中，从而可去掉，要么 X 在 C_i 中所停留的时间集可被 k 个长度为 $2^{-m+1}\sqrt{d}$ 的区间所覆盖. 记它们与 C_i 的乘积集为 $D_{i1},\cdots,D_{ik}$. 因此，X 总在某个好立方体中的那部分图集被全体 D_{ij} 所覆盖，由于 $\mathrm{diam}(D_{ij})=\sqrt{2}\,\mathrm{diam}(C_i)$，所以

$$\sum_{i,j}\varphi(\mathrm{diam}(D_{ij}))\leqslant 2^{\alpha}k\sum_i\varphi(\mathrm{diam}(C_i))\leqslant 2^{\alpha}kM.$$

令

$$\overline{D}_{i,j}^{(m)}=\left[\frac{j-1}{2^m},\frac{j}{2^m}\right]\times\overline{C}_i^{(m)},j=1,\cdots,[t2^{-m}]+1,m=n,\cdots,6n,$$

其中 $\overline{C}_i^{(m)}\in\Lambda_m$ 且 $\{\overline{C}_i^{(m)}:i,m\}\equiv\{C_i:C_i\in\mathscr{G},C_i$ 是坏的$\}$. 显然,剩下的那部分图集可由全体 $\overline{D}_{ij}^{(m)}$ 所覆盖. 我们要证明这些立方体对测度的影响是不足道的.

给定 $C\in\Lambda_m$,定义一列停时:

$$T_0\equiv\tau=\inf\{s\geqslant 0:X(s)\in C\},$$

$T_j=\inf\{s\geqslant T_{j-1}+2^{-m+1}\sqrt{d}:X(s)\in B(X(\tau),2^{-m+1}\sqrt{d})\},1\leqslant j\leqslant k$,$k$ 如(4.8)所定义. 如果 $T_{j-1}=\infty$,则定义 $T_j=\infty$. $T_k=\infty$ 意味着:X 在 C 中所停留的时间集可被 k 个长度为 $2^{-m+1}\sqrt{d}$ 的区间:$[T_j,T_j+2^{-m+1}\sqrt{d}]$,$(j=0,1,\cdots,k-1)$所覆盖. 所以

$$\{\omega:C=C(\omega)\text{是坏的}\}\subset\{\omega:T_k(\omega)<\infty\}.$$

k 次利用引理 4.5 得

$$\begin{aligned}P(C\text{ 是坏的})&=P(\{C\text{ 在时刻 }t\text{ 前被击中}\})\\&\quad\cdot P(\{C\text{ 是坏的}\mid C\text{ 在时刻 }t\text{ 前被击中}\})\\&\leqslant P(C\text{ 在时刻 }t\text{ 前被击中})\cdot c_3(2^{-m})^{k(1-\frac{1}{\alpha})(d-\alpha)},\end{aligned}$$

其中 $c_3>0$ 是常数.

设 N_m 为 Λ_m 中的坏立方体个数,M_m 为 Λ_m 中于 t 之前被击中的立方体的个数. 注意(4.8)式并用命题 2.3 则得:

$\boldsymbol{E}N_m\leqslant c_4 2^{-2m}\boldsymbol{E}M_m\leqslant c_4 2^{-2m+m\alpha}$, $c_4>0$ 为常数. 因此 $P(N_m\geqslant m^2)\leqslant\frac{c_4}{m^2}$,由 Borel-Cantelli 引理就有

$$N_m\leqslant m^2,\quad m\geqslant m_0.$$

正如前面提到的,对 $\mathscr{G}$ 中的每个坏立方体,有$[t2^m]+1$ 个直径为 $2^{-m}\sqrt{4d+1}$ 的$\mathbb{R}^{d+1}$中的 Gr(t)的覆盖中的立方体. 全体这样的立方体对测度的贡献应小于

$$([t2^m]+1)N_m\varphi(2^{-m}\sqrt{4d+1})\leqslant 2^{-\alpha_0 m},\alpha_0>0\text{ 为常数},m\geqslant m_1>0.$$

因此 Gr(t)的 φ-Hausdorff 测度是 a.s. 有限的. 仿定理 3.3 的证明方法得

$$\varphi\text{-}m(\mathrm{Gr}(t))=c_5 t \quad \text{a.s.}, c_5>0 \text{ 为常数}.$$

定理证毕.

定理 4.6 如果 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中严格不对称 Cauchy 过程，则 $\forall\ t>0$ 有

$$\varphi\text{-}m(\mathrm{Gr}(t))=ct \quad \text{a.s.},$$

其中 $c>0$ 为常数，$\varphi(t)=\begin{cases} t(\log \frac{1}{t})^{-1}, & 0<t<e^{-1} \\ t, & t\geqslant e^{-1}. \end{cases}$

证明见[177]和[91].

引理 4.6 设 X 是 $\mathbb{R}$ 上指数为 $\alpha\in(1,2]$ 的稳定过程，$L(x,s)$ 是 X 在点 x 的局部时(时刻 s 以前)，令

$$H(a)=\{\omega:\sup_x L(x,a)\leqslant 1\},$$

$$T(a,a)=\int_0^a \mathbf{1}_{B(0,a)}(X(t))dt,$$

则对任意 $0<\varepsilon<\frac{1}{4}(\alpha-2+\frac{1}{\alpha})$，存在 $a_0>0$ 及常数 $c>0$(C 不依赖于 ε)使

$$\mathbf{E}\left(\frac{|T(a,a)-2aL(0,a)|}{a^{2-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}}\mathbf{1}_{H(a)}\right)\leqslant ca^{\frac{1}{2}\varepsilon}, 0<a\leqslant a_0;$$

又若 $\beta=1-\frac{1}{\alpha}$，$h(a)$ 单调且 $s^{-\beta-\varepsilon}h(s)\to 0$(当 $s\to 0$)，则

$$\liminf_{a\downarrow 0}\frac{T_1(a,a)+T_2(a,a)}{ah(a)}=2\liminf_{a\downarrow 0}\frac{L_1(0,a)+L_2(0,a)}{h(a)} \quad \text{a.s.},$$

其中 $T_1(a,a)$，$T_2(a,a)$ 相互独立且与 $T(a,a)$ 同分布，$L_1(0,a)$ 与 $L_2(0,a)$ 相互独立且与 $L(0,a)$ 同分布.

证明见[91].

定理 4.7 设 X 是 $\mathbb{R}$ 上指数为 $\alpha\in(1,2]$ 的稳定过程，如果 $h(s)=s^{2-\frac{1}{\alpha}}\psi(s)$，$\psi(s)$ 为测度函数，则

$$h\text{-}p(\mathrm{Gr}(t))=\begin{cases}0 \\ \infty\end{cases} \quad \text{a.s.} \quad \text{当且仅当}$$

$$\int_{0+}\frac{\psi^2(s)}{s}ds\begin{cases}<\infty\\=\infty.\end{cases}$$

证 令

$$\mu(E)=\mathscr{L}(\{t\in[0,1]:(t,X(t))\in E\}),$$

E 是$\mathbb{R}^2$上 Borel 集，$\mathscr{L}$ 是$\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 测度.

给定 $t_0\geqslant 0$，令 $x=(t_0,X(t_0))$，定义

$$T_x^1(r,r)=\mathscr{L}(\{s\in(t_0,t_0+r):|X(s)-X(t_0)|<r\}),$$

$$T_x^2(r,r)=\mathscr{L}(\{s\in(t_0-r,t_0):|X(s)-X(t_0)|<r\}),$$

则有

$$T_x^1(\frac{1}{2}r,\frac{1}{2}r)+T_x^2(\frac{1}{2}r,\frac{1}{2}r)\leqslant\mu(B(x,r))\leqslant T_x^1(r,r)+T_x^2(r,r).$$

显然 $T_x^1(r,r)$ 和 $T_x^2(r,r)$ 相互独立且与 $T(r,r)$ $(=\int_0^r \mathbf{1}_{B(0,r)}(X(t))dt)$ 同分布，当 $x=(0,0)$ 时，简记 $T_x^1(r,r)$ 和 $T_x^2(r,r)$ 为 $T_1(r,r)$ 和 $T_2(r,r)$. 由引理 4.6 有：

$$\liminf_{r\downarrow 0}\frac{T_1(r,r)+T_2(r,r)}{r^{2-\frac{1}{\alpha}}\psi(r)}$$

$$=2\liminf_{r\downarrow 0}\frac{L_1(0,r)+L_2(0,r)}{r^{\beta}\psi(r)},\quad \beta=1-\frac{1}{\alpha}. \tag{4.9}$$

注意，我们不妨假定 $s^{-\frac{\varepsilon}{2}}\psi(s)\to\infty$（当 $s\downarrow 0$），其中 $0<\varepsilon<\frac{1}{4}(\alpha+\frac{1}{\alpha}-2)$. 但 $L_i(0,a)$ 可看作指数为 $\beta=1-\frac{1}{\alpha}$ 的某个稳定从属过程 Y_t 在 $(0,a)$ 中的停留时间，应用引理 4.6 有

$$\liminf_{r\downarrow 0}\frac{L_1(0,r)+L_2(0,r)}{r^{\beta}\psi(r)}=\begin{cases}0\\\infty\end{cases}\text{a.s.}\quad\text{当且仅当}$$

$$\int_{0+}\frac{[\psi(s)]^2}{s}ds\begin{cases}=\infty\\<\infty.\end{cases}$$

因此，当$\int_{0+}\frac{\psi^2(s)}{s}ds=\infty$时，对任意 $t_0\in(0,1)$，由(4.9)式得：

$$\liminf_{r\downarrow 0}\frac{\mu(B(x,r))}{h(r)}=0,x=(t_0,X(t_0)).$$

由第一章定理 3.4 及 Fubini 定理得：$h\text{-}p(\mathrm{Gr}(1))=\infty$ a.s..

现在假设$\int_{0+}\frac{\psi^2(s)}{s}ds<\infty$. 令

$$H=\left\{t\in(0,1):\liminf_{r\downarrow 0}\frac{\mu(B((t,X(t)),r))}{h(2r)}=\infty\right\},$$

则 $\varphi\text{-}p(\mathrm{Gr}(H))=0$ $(\mathrm{Gr}(H)\equiv\{(t,X(t)):t\in H\})$. 令

$$H_n=\{t\in(0,1):\liminf_{r\downarrow 0}\frac{\mu(B((t,X(t)),r))}{h(2r)}\leqslant n\}.$$

我们称一个边长为 2^{-k}的半二进制立方体 C 为坏的，如果$\{G(s)\}$击中紧邻 C 的中心的边长为 2^{-k-2}的某个二进制立方体且在 C 中所停留的时间 $\mathscr{L}(\{0\leqslant s\leqslant 1:G(s)\in C\})$小于 $cnh(2^{-k+1})$. (其中 $G(s)=(s,X(s))$)任取 $t\in H_n$, t 必在无穷多个这样的坏 C 中. 在已知 C 被击中的条件下 C 为坏的概率至多是

$$P(T(2^{-k},2^{-k})\leqslant cnh(2^{-k+1}))\text{（参见[184]）}.$$

由于 $L(x,s)$关于(x,s)二元连续且具有紧支撑，所以 $L(x,s)$一致连续(参见[184]). 定义

$$J(a)=\{\omega:|x|\leqslant a,0\leqslant t\leqslant a\Rightarrow\forall\ (y,s),\text{有}$$
$$|L(y,s)-L(y+x,s+t)|\leqslant 1\}.$$

显然,$P(J(a))\uparrow 1$(当 $a\downarrow 0$)，而 $H(a)\subset J(a)$，$H(a)$如引理 4.6 所定义.

我们先证对任意固定 a，

$$P(\{T(2^{-k},2^{-k})\leqslant c_1h(2^{-k+1})\}\cap J(a))\leqslant c_2\psi(2^{-k})\ (2^{-k}<a),\tag{4.10}$$

$c_1,c_2>0$ 均为常数.

事实上，(4.10)的左边小于等于

$$P(2^{-k+1}L(0,2^{-k})\leqslant 2c_1h(2^{-k+1}))$$
$$+P(|T(2^{-k},2^{-k})-2^{-k+1}L(0,2^{-k})|1_{J(a)}\geqslant c_1h(2^{-k+1}))\equiv I_1+I_2.$$

由[199]及乘量性质知

$$I_1=P(L(0,1)\leqslant c_1\psi(2^{-k}))\leqslant c_3\psi(2^{-k}),c_3>0\text{ 为常数};$$

由引理 4.6 和乘量性质知

$$I_2 \leqslant P\left(\frac{|T(2^{-k},2^{-k})-2^{-k+1}L(0,2^{-k})|}{2^{-k(1+\beta+\epsilon)}}\mathbf{1}_{H(a)} \geqslant c_1 \frac{\psi(2^{-k})}{2^{-k\epsilon}}\right)$$

$$\leqslant \frac{2^{-k\epsilon}}{c_1\psi(2^{-k})}\mathbf{E}\left(\frac{|T(2^{-k},2^{-k})-2^{-k+1}L(0,2^{-k})|}{2^{-k(1+\beta+\epsilon)}}\mathbf{1}_{H(a)}\right)$$

$$\leqslant c_4 \frac{2^{-\frac{3}{2}k\epsilon}}{\psi(2^{-k})}$$

$$\leqslant c_4\psi(2^{-k}),\ c_4>0 \text{ 为常数}, k\geqslant k_0, \beta=1-\frac{1}{\alpha},$$

注意，最后一个不等式来自于 $\psi(s)$ 的假设.

现在用 N_k 来记被 $\mathrm{G}(t)$ 击中的边长为 2^{-k} 的坏半二进制立方体的个数. 由引理 4.4 知被 $\mathrm{G}(t)$ 击中的边长为 2^{-k} 的半二进制立方体的个数的期望值 $\leqslant O(2^{k(2-\frac{1}{\alpha})})$. 所以，当 $2^{-k}<a$ 时，由(4.10)有

$$\mathbf{E}(N_k\mathbf{1}_{J(a)})\leqslant c_5 2^{k(2-\frac{1}{\alpha})}\psi(2^{-k}),\ c_5>0 \text{ 为常数}.$$

于是

$$\mathbf{E}(h\text{-}p^{**}(\mathrm{G}(H_n))\mathbf{1}_{J(a)})\leqslant \mathbf{E}(h\text{-}P^{**}(\mathrm{G}(H_n))\mathbf{1}_{J(a)})$$

$$\leqslant c_5\sum_{k\geqslant k_0}2^{k(2-\frac{1}{\alpha})}\psi(2^{-k})h(2^{-k})$$

$$\leqslant c_5\sum_{k\geqslant k_0}\psi^2(2^{-k}),$$

让 $k_0\to\infty$，有 $\mathbf{E}(h\text{-}p^{**}(\mathrm{G}(H_n))\mathbf{1}_{J(a)})=0$，所以

$$h\text{-}p^{**}(\mathrm{G}(\bigcup_n H_n))=0 \quad \text{a.s. } in\ J(a).$$

让 a 跑遍一个可数集 $\{a_k\}$，$a_k\downarrow 0$，则得

$$h\text{-}p^{**}(\mathrm{G}(\bigcup_n H_n))=0 \quad \text{a.s.}, \text{从而 } h\text{-}p(\mathrm{G}([0,1]))=0 \quad \text{a.s.}.$$

定理证毕.

定理 4.8 设 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上指数为 α 的稳定过程，则

(i) 当 $d\geqslant 2$，$1<\alpha<2$，$h(s)=s^\alpha\psi(s)$，$\psi(s)$ 为测度函数时，有

$$h\text{-}p(\mathrm{Gr}(1))=\begin{cases}0 & \\ \infty & \end{cases}\text{a.s.} \quad \text{当且仅当}$$

$$\int_{0+}\frac{\psi^2(s)}{s}ds\begin{cases}<\infty\\=\infty;\end{cases}$$

(ii) 当 $d\geqslant 1$ 且 $\alpha<1, h(s)=s$ 时，则对任一 Borel 集 $E\subset[0,1]$，$h\text{-}p(G(E))=\mathscr{L}(E)$ a.s.，$G(s)$如定理 4.7 所定义；

(iii) 若 $d\geqslant 3, \alpha=1, h(s)=s^2(\log\log\frac{1}{s})^{-1}$，则存在常数 $c>0$，使得对$[0,1]$中任一 Borel 集 E，有 $h\text{-}p(G(E))=c\mathscr{L}(E)$ a.s..

证 (i) 因为 $h\text{-}p(\mathrm{Gr}(1))\geqslant h\text{-}p(X([0,1]))$，所以由定理 3.6 得：当$\int_{0+}\frac{\psi^2(s)}{s}ds=\infty$时，有 $h\text{-}p(\mathrm{Gr}(1))=\infty$ a.s..[176]中定理 4告诉我们：$P(T(a,\imath)\neq T(a))\leqslant a^c$ ($c>0$ 为常数)，用 Borel-Cantelli引理可证：对 a.s. ω，存在 $a_0=a_0(\omega)$，使得 $a<a_0$ 时，有 $T(a,a)=T(a)$. 仿照定理 3.6 的证明方法可证(i).

(ii) 利用[207]中相关结论可证(ii). 详细证明参见[184].

(iii) 仿[208]中证明方法立得(iii).

定理证毕.

引理 4.7 设 X 是$\mathbb{R}^d$上严格不对称 Cauchy 过程，则存在常数 $a_0>0, c>0$ 使：当 $0<a<a_0$ 且 $0<t<a|\log a|^{-1}$时，有

(i) $P(|X(t)|\geqslant a)\leqslant cta^{-1}$；

(ii) $P(\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|X(s)|>a)\leqslant cta^{-1}$.

证明见[177].

定理 4.9 给定$\mathbb{R}^d$中一个严格不对称 Cauchy 过程 X，设

$$\varphi(s)=\begin{cases}s\log\frac{1}{s}, & s<e^{-1}\\ s, & s\geqslant e^{-1},\end{cases}$$

则存在常数 $c_1>0$，对任一 Borel 集 E 有

$$\varphi\text{-}p(G(E))=c_1\mathscr{L}(E)\quad \text{a.s.}\ (G(s)\text{定义如定理 4.7}).$$

证 在本定理的证明中，$T(a,a)$、$T_1(a,a)$、$T_2(a,a)$和 $\mu(B(x,r))$ $(x=(t,X(t)))$均如定理 4.7 中所定义.

我们首先证明对某个常数 $c_2>0$ 有

$$\liminf_{a\downarrow 0}\frac{T_1(a,a)+T_2(a,a)}{\varphi(2a)}=c_2\quad \text{a.s.}.$$

根据定理 2.3 得:

$$\limsup_{a\downarrow 0}\frac{T(a,a)}{\varphi(2a)}=c_3\quad \text{a.s.},c_3>0\text{ 为常数}.$$

故我们只需证:有某个常数 $c_4>0$ 有:

$$\liminf_{a\downarrow 0}\frac{T_1(a,a)+T_2(a,a)}{\varphi(2a)}\geqslant c_4>0\quad \text{a.s.}.$$

取 $a_k=2^{-k}$,令

$$E_k=\left\{\inf_{a_k\leqslant a\leqslant a_{k-1}}\frac{T_1(a,a)+T_2(a,a)}{\varphi(2a)}<c\right\},c>0.$$

显然

$$E_k\subset\left\{\frac{T_1(a_k,a_k)}{\varphi(2a_{k-1})}<c\right\}\cap\left\{\frac{T_2(a_k,a_k)}{\varphi(2a_{k-1})}<c\right\}.$$

由引理 4.7(ii)知,当 c 充分小时,$P(E_k)\leqslant\frac{c_5}{k^2}$,其中 $c_5>0$ 为常数.

应用 Borel-Cantelli 引理得

$$0<c\leqslant\liminf_{a\downarrow 0}\frac{T_1(a,a)+T_2(a,a)}{\varphi(2a)}<c_3<\infty\quad \text{a.s.}.$$

再由零一律([27])可知:存在某个常数 $c_7>0$ 使

$$\liminf_{a\downarrow 0}\frac{T_1(a,a)+T_2(a,a)}{\varphi(2a)}=c_7\quad \text{a.s.}.$$

用密度定理则得

$$\varphi\text{-}p(\mathrm{Gr}(1))\geqslant c_8>0\quad \text{a.s. 且 }\varphi\text{-}p(\mathrm{G}(H))\leqslant c_9<\infty\quad \text{a.s.},$$

其中

$$H=\left\{t\in[0,1]:\liminf_{a\downarrow 0}\frac{\mu(B((t,X(t)),a))}{\varphi(2a)}\geqslant\frac{1}{2}c_7\right\},$$

$c_8,c_9>0$ 为常数.

定理 3.6 的证法在此处失效,故采取某种新方法.

令 $t_{i,k}=i2^{-k}k^{-\frac{3}{2}},i=0,1,\cdots,2^k k^{-\frac{3}{2}}$. 我们称边长为 2^{-k} 的半二

进制立方体 $S_{i,k}$ 是坏的，如果 $g_{i,k}\equiv(t_{i,k},X(t_{i,k}))$ 在 $S_{i,k}$ 中一个边长为 2^{-k-2} 的二进制立方体内且 $g_{i,k}$ 与 $S_{i,k}$ 的中心的距离小于 $\sqrt{d}\,2^{-k-2}$，此外还满足

$$\frac{\mu(B(g_{i,k},2^{-k}))}{\varphi(2^{-k+1})}<\frac{1}{4}c_7. \tag{4.11}$$

令

$$\begin{aligned}N_k=\#(\{&\text{一切坏的半二进制立方体 } S_{i,k}\})\\&+\#(\{S'_{i,k}:S'_{i,k}\text{是边长为 }2^{-k}\text{ 的半二进制立方体且紧靠其中心的边长为 }2^{-k-2}\text{ 的小二进制立方体与某一个坏的 }S_{j,k}\text{ 的相应的边长为 }2^{-k-2}\text{ 的小二进制立方体相邻}\}).\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&P\left(\frac{\mu(B(g_{i,k},2^{-k}))}{\varphi(2^{-k+1})}<\frac{1}{4}C_7\right)\\&\leqslant P(E_k)\leqslant c_5/k^2,\end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{E}N_k\leqslant c_{10}k^{\frac{3}{2}}2^kk^{-2},\ c_{10}>0\ \text{为常数}. \tag{4.12}$$

又设 $M_k=$ 被 $G(t)\,(\equiv(t,X(t)))$ 击中但与某个 $g_{i,k}$ 的距离大于 2^{-k-2} 边长为 2^{-k} 的半二进制立方体的个数. 由定理 2.3 和引理 4.4 及事实：$T(a,a)=T(a)$（a 充分小）我们得到：被 $G(t)$ 击中的边长为 2^{-k} 的半二进制立方体个数的期望为 $O(k2^k)$. 设 $\{G(t),t\geqslant 0\}$ 在时刻 $\tau\in[t_{i-1,k},t_{i,k})$ 击中一个边长为 2^{-k} 半二进立方体，则

$$\begin{aligned}\mathbf{E}M_k&\leqslant c_{11}k2^kP(|X(\tau)-X(t_{i,k})|>2^{-k-2})\\&\leqslant c_{12}k2^kk^{-\frac{3}{2}},\ c_{11},c_{12}>0\ \text{为常数}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

（最后一个不等式用到引理 4.7 (i).）

上述 N_k+M_k 个半二进立方体应该包括了全部边长为 2^{-k} 的坏半二进制立方体，从而由(4.12)及(4.13)得

$$\mathbf{E}\varphi\text{-}P^{**}(G(H^c))\leqslant c_{13}\sum_{k\geqslant k_0}\mathbf{E}(M_k+N_k)\varphi(2^{-k})$$

$$\leqslant c_{14}\sum_{k\geqslant k_0}k^{-\frac{3}{2}},$$

$c_{13}, c_{14}>0$ 为常数. 让 $k_0\to\infty$, 有

$$\varphi\text{-}p(G(H^c))=0 \quad \text{a.s.}.$$

总之, $\varphi\text{-}p(G([0,1]))\leqslant c_n$ a.s.. 再用定理 3.3 的方法则得:

$$\varphi\text{-}p(G([0,t]))=c_{15}t \quad \text{a.s.}, c_{15}>0 \text{ 为常数}.$$

这意味着对任意 Borel 集 $E\subset\mathbb{R}^+$,

$$\varphi\text{-}p(G(E))=c_{15}\mathscr{L}(E) \quad \text{a.s.}.$$

定理证毕.

§5 稳定过程的 k 重点集

关于稳定过程的 k 重点集的研究在五十年代就起步了. 当然, 这项研究又是从 Brown 运动开始(见[48]、[49]、[50]和[51]). 其后, Taylor 在[203]中解决了一般对称稳定过程的 k 重点的存在性及 k 重点集的 Hausdorff 维数. 在该文中, $\mathbb{R}^3$中对称稳定过程的 k 重点集的 Hausdorff 维数未能得到解决, 后来 Fristedt 在[65]中解决了这一情形下的维数问题. 80 年代, LeGall 进一步研究了 Brown 运动的 k 重点集的 Hausdorff 测度. 在本节中, 我们总以 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$代表对称稳定过程, 有时为方便起见, 以 $X_{\alpha,d}$表示$\mathbb{R}^d$中指数为 α 的对称稳定过程. 令

$$L_k(a,b;\omega)=\{x\in\mathbb{R}^d: \text{存在 } a\leqslant t_1<\cdots<t_k\leqslant b \text{ 使 } x=X(t_1,\omega)=\cdots=X(t_k,\omega)\},$$

称 $L_k(\omega)\equiv\bigcup\limits_n L_k(0,n;\omega)$为 X 的 k 重点集. 以 $L(\omega)$记 $L_1(\omega)$.

正如本章 §4 所提到的, 当 $d=1, 1<\alpha\leqslant 2$ 时, $\dim(Z(x,t))=1-\dfrac{1}{\alpha}>0$, 所以$\forall\ x\in\mathbb{R}$, 对 P^x—a.s. 的 ω, x 都是 c 重点(此处 c 表示连续统的势), 至于其它情形, 也可能存在重点, 下面是重点的存在性定理.

定理 5.1 设 $X_{\alpha,d}$是$\mathbb{R}^d$中指数为 α 的对称稳定过程, 则存在 k

$=k(\alpha,d)$，使 $k=\max\{n: L_n\neq\varnothing \quad \text{a.s.}\}$（$k$ 为正整数或 c）. 具体而言：

(1) 设 $d\geqslant 4$. $\forall\ \alpha\in(0,2]$，总有 $k=1$.

(2) 设 $d=3$. 当 $0<\alpha\leqslant\frac{3}{2}$ 时，有 $k=1$；当 $\frac{3}{2}<\alpha\leqslant 2$ 时，有 $k=2$.

(3) 设 $d=2$. 当 $0<\alpha<1$ 时，有 $k=1$；当 $\frac{r-1}{r}<\frac{1}{2}\alpha\leqslant\frac{r}{r+1}$ 时，有 $k=r$，其中 $r=2,3,\cdots$；当 $\alpha=2$ 时，有 $k=c$.

(4) 设 $d=1$. 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时，有 $k=1$；当 $\frac{r-1}{r}<\alpha\leqslant\frac{r}{r+1}$ 时，有 $k=r$，其中 $r=2,3,\cdots$；当 $1\leqslant\alpha\leqslant 2$ 时，有 $k=c$（本定理的 c 为连续统的势）.

证明见[203].

定理 5.2 对每个正整数 k，

(1)若 $d=3$，$\frac{3}{2}<\alpha\leqslant 2$，则 $L_2(\omega)$ 的 Hausdorff 维数为 $2\alpha-3$ a.s..

(2)若 $d=2$，$2\cdot\frac{k-1}{k}<\alpha\leqslant 2$，则 $L_k(\omega)$ 的 Hausdorff 维数为 $k\alpha-2(k-1)$ a.s..

(3)若 $d=1$，$\frac{k-1}{k}<\alpha\leqslant 1$，则 $L_k(\omega)$ 的 Hausdorff 维数为 $k\alpha-(k-1)$ a.s..

(4)平面上 Brown 运动的 c 重点集的 Hausdorff 维数为 2 a.s..

(5)直线上对称 Cauchy 过程的 c 重点集的 Hausdorff 维数为 1 a.s.（本定理中的 c 同定理 5.1）.

为证该定理，我们需要下列引理：

引理 5.1 若 A 是直线或平面上的解析集，则

(1)如果 $A\subset\mathbb{R}$，则 $\dim(A)=1-\inf\{0<\alpha\leqslant 1: \Phi_{\alpha,1}(x,A)>0\}$；

(2)如果 $A\subset\mathbb{R}^2$,则 $\dim(A)=2-\inf\{0<\alpha\leqslant 2:\Phi_{\alpha,2}(x,A)>0\}$,其中 $\Phi_{\alpha,d}(x,A)=P^x(X_{\alpha,d}(t)\in A$,对某个 $t>0)$.

下述引理说明:$X_{\gamma,d}$概率为1地在正时刻击中 $X_{\alpha,d}$的 k 重点集.

引理 5.2 如果$\{X_{\alpha,d}(t),t\geqslant 0\}$和$\{X_{\gamma,d}(t),t\geqslant 0\}$是相互独立的对称稳定过程且 $k\alpha+\gamma>dk(d=1$ 或 $2)$,则概率为1地存在下列时刻:

$$0\leqslant t_1<t_2\cdots<t_k,t_{k+1}>0(t_j=t_j(\omega),1\leqslant j\leqslant k+1),$$

使 $X_{\gamma,d}(t_{k+1})=z=X_{\alpha,d}(t_i),i=1,2,\cdots,k$.

引理 5.3 设$\{X_{\alpha,3}(t),t\geqslant 0\}$为对称稳定过程,令 $\beta=2\alpha-3$ $(\frac{3}{2}<\alpha\leqslant 2)$,$\forall\ \gamma\in(4-2\alpha,1)$,对任一正整数 k,用 S_v 表示$\mathbb{R}^3$中的球,其中心为

$$x_v=(c_1+c_2(v_1/k),c_1+c_2(v_2/k),c_1+c_2(v_3/k)),$$

$v_i=1,\cdots,k(i=1,2,3)$,$v=(v_1-1)k^2+(v_2-1)k+v_3$,$S_v$ 的半径为 $c_3k^{-\delta}$,$c_1,c_2,c_3>0$ 为常数,$\delta=3/(7-2\alpha-\gamma)$. 令

$$E_v=\{\omega:\text{存在 } 0\leqslant t_1\leqslant c_4,1\leqslant t_2-t_1\leqslant c_4\text{ 使 } X_{\alpha,3}(t_1,\omega)\in S_v,X_{\alpha,3}(t_2,\omega)\in S_v\},v=1,\cdots,k^3,$$

$c_4>0$ 为常数. 再令

$$F_u=\bigcup_{\lambda=1}^{k^2}E_{\lambda+(u-1)k^2},u=1,\cdots,k,$$

$$H_u=\{\omega:\text{存在 } 0\leqslant t_3\leqslant c_4\text{ 使 } X_{\gamma,1}(t_3)\in(c_1+c_2\frac{u}{k}-c_3k^{-\delta},c_1+c_2\frac{u}{k}+c_3k^{-\delta})\}.$$

若 $G_u=H_u+F_u$,则存在常数 $c_5>0$ 使 $P(\bigcup_{u=1}^{k}G_u)\geqslant c_5$.

引理 5.4 对 $0<\gamma<1$,存在一个与 $X_{1,1}$独立的过程 $X_{\gamma,1}$概率为1地击中 $X_{1,1}$的 c 重点集 L_c.

注意,由[50]中的结果知,平面上 Brown 运动也有类似结果.

引理 5.1、5.2 和 5.4 来自[203],引理 5.3 来自[65].

现在让我们回到定理 5.2 的证明.

由引理 5.1(1) 及引理 5.4 立得(5). 类似地，我们得到(4). 对一般的对称稳定过程 $X_{\alpha,d}$(除去 $\alpha=1=d$；$\alpha=2=d$；$\alpha>1=d$). 我们先求其 k 重点集的 Hausdorff 维数的上界.

为证 $\dim L_k(0,1;\omega)\leqslant\beta\equiv k\alpha-d(k-1)$，只需证 $L_k(0,1;\omega)$的 β-Hausdorff 测度是 σ-有限的即可. 为此，我们将 $L_k(0,1;\omega)$分成可数个子集，证明每个子集具有有限的 β-Hausdorff 测度. 给出单位区间中 $2k$ 个有理点如下：

$$0\leqslant r_1<r_2<\cdots<r_{2k}\leqslant 1.$$

考虑集合 $P_k(\omega)\equiv\bigcap_{j=1}^{k}L(r_{2j-1},r_{2j};\omega)$. 显然 $L_k(0,1;\omega)$就是全体 $P_k(\omega)$的并(关于全体有理数组$(r_1,\cdots,r_{2k})$求并)，而这是一个可数并. 下面要证 $s^\beta m(P_k)\leqslant M<\infty$. 为方便起见，我们可对 $Q_k(\omega)\equiv\bigcap_{j=1}^{k}L(2j-1,2j;\omega)$证明.

对任意的正整数 m，将[1,2]分成 m 份：

$$1=t_0<t_1<\cdots<t_m=2,\ t_i=1+\frac{i}{m},\ i=0,1,\cdots,m.$$

令 $S_{i,m}$表示以 $X_{\alpha,d}(t_i)$为中心，以

$$\rho_{i,m}=\sum_{s=3}^{\infty}(1+2^{s+1})m^{-\frac{1}{\alpha}}\mathbf{1}_{\{2^s<Y_{i,m}\leqslant 2^{s+1}\}}+9m^{-\frac{1}{\alpha}}\mathbf{1}_{\{Y_{i,m}\leqslant 8\}}$$

为半径的圆球. 其中 $Y_{i,m}=m^{\frac{1}{\alpha}}\sup\limits_{t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}}|X_{\alpha,d}(t)-X_{\alpha,d}(t_i)|$.

显然 $L(t_i,t_{i+1};\omega)\subset S_{i,m}$. 又令

$$E_k(\omega)=\left\{x\in L(1,2;\omega):\begin{array}{c}x\text{ 与 }L(2j-1,2j;\omega)(j=2,\cdots,k)\\ \text{的距离均小于 }m^{-\frac{1}{\alpha}}\end{array}\right\},$$

易见 $Q_k(\omega)\subset E_k(\omega)$. 当 $L(t_i,t_{i+1};\omega)\cap E_k(\omega)$ 非空时，则 $L(2j-1,2j;\omega)\cap S_{i,m}(\omega)$也非空$(j=2,\cdots,k)$. 若令

$$p_{i,m}=P(\{\omega:L(2j-1,2j;\omega)\cap S_{i,m}(\omega)\text{非空},j=2,\cdots,k\}),$$

则由[203]中引理 3 及强马氏性知：

$$p_{i,m}\leqslant c_1\rho_{i,m}^{(k-1)(d-\alpha)},\ c_1>0\text{ 为常数}.\tag{5.1}$$

现在设

$$d_{i,m}(\omega)=\begin{cases}2\rho_{i,m}, & \text{如果 } L(2j-1,2j;\omega)\cap S_{i,m}\neq\varnothing\\ 0, & \text{反之.}\end{cases}$$

令 $l_m(\omega)=\sum_{i=0}^{m-1}[d_{i,m}(\omega)]^\beta$. 注意到 $P(Y_{i,m}>\lambda)\leqslant e^{-c_2\lambda}$, $c_2>0$ 为常数(见[203]),则由(5.1)得:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(d_{i,m}^\beta)\\ &\leqslant c_3\sum_{s=3}^{\infty}P(\rho_{i,m}=(2^s+1)m^{-\frac{1}{\alpha}})[(2^s+1)m^{-\frac{1}{\alpha}}]^{\beta+(k-1)(d-2)}\\ &\leqslant c_4/m, c_3, c_4>0 \text{ 为常数},\end{aligned}$$

从而对任意的 m, $\mathbf{E}(l_m)\leqslant c_4<\infty$. 总之,我们可找到一个子列 n_k 使 $l_{n_k}(\omega)\leqslant M(\omega)<\infty$ ($M(\omega)$ 是依赖于 ω 的有限正实数). 若令

$$q_m=\max_{0\leqslant i\leqslant m-1}\rho_{i,m},$$

则 $P(q_m>\frac{1}{3}\delta)\leqslant m\cdot\exp(-c_5\frac{1}{3}\delta m^{\frac{1}{\alpha}})$([203]),由 Borel-Cantelli 引理知,我们可假设每个 $\rho_{i,m}<\delta$,而 $S'_{i,m}$(以 $X_{\alpha,d}(t_i)$ 为中心,以 $\frac{d_{i,m}}{2}$ 为半径的球)的全体又是 Q_k 之覆盖,所以 $s^\beta\text{-}m(Q_k(\omega))\leqslant M(\omega)<\infty$. 因此 $\beta=k\alpha-d(k-1)$ ($d=3$ 时,相应的 $\alpha\geqslant\frac{3}{2}$, $k=2$) 为 $\dim(L_k(0,1;\omega))$ 的上界.

现在考虑 $\dim(L_k(0,1;\omega))$ 的下界. 由引理 5.1 和引理 5.2 知:当 $d=1$ 或 2 时, $\dim(L_k(0,1;\omega))\geqslant\beta=k\alpha-d(k-1)$; 当 $d=3$, $k=2$, $\alpha\geqslant\frac{3}{2}$ 时,由引理 5.3 可证得:存在 $X_{\gamma,1}$ 与 $X_{\alpha,3}$ 相互独立,其中 $\gamma\in(4-2\alpha,1)$,对几乎所有 ω, $X_{\gamma,1}$ 击中 $X_{\alpha,3}$ 的 k 重点集在第一坐标轴的投影集 B(见[65]),因此由引理 5.1 知 $\dim(B)\geqslant2\alpha-3$,更有 $\dim(L_2(0,1;\omega))\geqslant2\alpha-3$. 总之,(1),(2),(3)得证. 定理证毕.

定理 5.3 对几乎所有的 ω,定理 5.2 中的 $L_k(\omega)$ 都是分形集.

证 显然 $\mathrm{Dim}(L_k)\geqslant\dim(L_k)$. 而仿定理 5.2 之推理还可证明 $\mathrm{Dim}(L_k)\leqslant\dim(L_k)$. 定理证毕.

§6 附 表

本章系统地讨论了取值于$\mathbb{R}^d$的 α 阶稳定过程 $X=\{X(t),t\in[0,\infty)\}$的分形性质. 讨论了 X 的象集、图集和 k 重点集的 Hausdorff 维数、Packing 维数以及它们的确切 Hausdorff 测度函数和确切 Packing 测度函数.

对于 $\alpha\in(0,2]$,对于任意正整数 d,取值于$\mathbb{R}^d$的 α 阶稳定过程 X 的上述问题已接近全面解决. 为了读者便于查阅,便于了解哪些场合的问题尚未解决,哪些场合的问题已经解决且它们的维数及确切测度函数究竟是什么? 我们把各种不同的 α 和各种不同的 d,X 的象集、图集和 k 重点集的各种维数及各种确切测度函数,列表 5 份,以便查考. 对于某些 α 和某些 d,表中未列结果的,表示此种场合的问题尚未解决.

表 1 X 的象集的确切 Hausdorff 测度函数

($\dim(X([0,1]))=\alpha\wedge d$,($\forall$ 正整数 d,$\forall\ \alpha\in(0,2]$),
$\varphi(s)$是 $X([0,1])$的确切 Hausdorff 测度函数)

$\alpha<d$	$\alpha\neq1$	$\varphi(s)=\begin{cases}s^\alpha\log\log\frac{1}{s}, & \text{当 } X \text{ 为 } A \text{ 型};\\ s^\alpha(\log\log\frac{1}{s})^{1-\alpha}, & \text{当 } X \text{ 为 } B \text{ 型}.\end{cases}$
	$\alpha=1$	$\varphi(s)=s\log\log\frac{1}{s}$,当 X 为对称 Cauchy 过程; $\varphi(s)=\begin{cases}s(\log\frac{1}{s})^{-1}, & s<e^{-1},\\ s, & s\geqslant e^{-1},\end{cases}$ 当 X 为不对称 Cauchy 过程.

$\alpha\geqslant d$	$\alpha=d=1$	$\varphi(s)=s(\log\frac{1}{s})(\log\log\log\frac{1}{s})$, (当 X 为对称 Cauchy 过程); $\mathscr{L}(X([0,1]))>0$, (当 X 为不对称 Cauchy 过程).
	$\alpha=d=2$	$\varphi(s)=s^2(\log\frac{1}{s})(\log\log\log\frac{1}{s})$.
	其它情形	$\mathscr{L}_d(X([0,1]))>0$.

表 2 X 的象集的确切 Packing 测度函数

($\mathrm{Dim}(X([0,1]))=\alpha\wedge d$,($\forall$ 正整数 d,$\forall\ \alpha\in(0,2]$),

$\psi(s)$是 $X([0,1])$的确切 Packing 测度函数)

$\alpha<d$	$\alpha\neq 2$	令 $g(s)=s^{\alpha}f(s)$,则 $g\text{-}p(X([0,1]))=\begin{cases}0,\\ \infty,\end{cases}$ 对应于 $\int_{0+}\frac{f^2(s)}{s}ds\begin{cases}<\infty,\\ =\infty.\end{cases}$ $\psi(s)=\begin{cases}s(\log\frac{1}{s})^{-1}, & s<e^{-1}\\ s, & s\geqslant e^{-1}\end{cases}$ (当 X 是不对称的 Cauchy 过程).
	$\alpha=2$	$\psi(s)=s^2(\log\log\frac{1}{s})^{-1}$.
$\alpha\geqslant d$	$\alpha=d=1$	$\mathscr{L}(X([0,1]))>0$ (当 X 是不对称的 Cauchy 过程).
	$\alpha=d=2$	令 $g(s)=f(s)s^2\log\frac{1}{s}$,则 $g\text{-}p(X([0,1]))=\begin{cases}0,\\ \infty,\end{cases}$ 对应于 $\sum_k f(2^{-2^k})\begin{cases}<\infty\\ =\infty.\end{cases}$
	其它情形	$\mathscr{L}_d(X([0,1]))>0$.

表 3 X 的图集的确切 Hausdorff 测度函数

$$(\dim(GrX([0,1])) = \begin{cases} 1\vee\left(2-\frac{1}{\alpha}\right), & \text{当 } d=1,\ \alpha\in(0,2]; \\ 1\vee\alpha, & \text{当 } d\geqslant 2,\ \alpha\in(0,2], \end{cases}$$

$\varphi(s)$ 是 $GrX([0,1])$ 的确切 Hausdorff 测度函数)

$\alpha<d$	$\alpha<1$	$\varphi(s)=s$
	$\alpha=1$	$\varphi(s)=\begin{cases} s, & \text{当 } X \text{ 为对称的 Cauchy 过程;} \\ \varphi_1(s) & \text{当 } X \text{ 为不对称的 Cauchy 过程,} \end{cases}$ $\varphi_1(s)=\begin{cases} s\left(\log\frac{1}{s}\right)^{-1}, & \text{当 } s<e^{-1}; \\ s, & \text{当 } s\geqslant e^{-1}. \end{cases}$
	$2\geqslant\alpha>1$	$\varphi(s)=s^{\alpha}\log\log\frac{1}{s}$.
$\alpha\geqslant d$	$\alpha=d=1$	$\varphi(s)=\begin{cases} s\left(\log\frac{1}{s}\right)^{-1}, & s<e^{-1}; \\ s, & s\geqslant e^{-1}, \end{cases}$ (当 X 是不对称的 Cauchy 过程).
	$2\geqslant\alpha\geqslant d=1$	$\varphi(s)=s^{2-\frac{1}{\alpha}}\left(\log\log\frac{1}{s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.
	$\alpha=d=2$	

表 4 X 的图集的确切 Packing 测度函数

$$(\mathrm{Dim}(\mathrm{Gr}X([0,1]))=\begin{cases}1\vee(2-\frac{1}{\alpha}), & \text{当 } d=1, \alpha\in(0,2];\\ 1\vee\alpha, & \text{当 } d\geqslant 2, \alpha\in(0,2],\end{cases}$$

$\psi(s)$ 是 $\mathrm{Gr}X([0,1])$ 的确切 Packing 测度函数)

$\alpha<d$	$\alpha<1$	$\psi(s)=s$
	$\alpha=1$	$\psi(s)=\begin{cases}s(\log\frac{1}{s})^{-1}, & s<e^{-1},\\ s, & s\geqslant e^{-1}.\end{cases}$ (X 是不对称的 Cauchy 过程).
	$1<\alpha<2$	令 $g(s)=s^{\alpha}f(s)$，则 $g\text{-}p(\mathrm{Gr}X([0,1]))=\begin{cases}0,\\ \infty,\end{cases}$ 相应于 $\int_{0+}\frac{f^{2}(s)}{s}ds\begin{cases}<\infty,\\ =\infty.\end{cases}$
	$\alpha=2$	$\psi(s)=s^{2}(\log\log\frac{1}{s})^{-1}.$
$\alpha\geqslant d$	$\alpha=d=1$	$\psi(s)=\begin{cases}s(\log\frac{1}{s})^{-1}, & s<e^{-1};\\ s, & s\geqslant e^{-1},\end{cases}$ (当 X 为不对称的 Cauchy 过程).
	$2\geqslant\alpha>d=1$	令 $g(s)=s^{2-\frac{1}{\alpha}}f(s)$，则 $g\text{-}p(\mathrm{Gr}X([0,1]))=\begin{cases}0,\\ \infty,\end{cases}$ 相应于 $\int_{0+}\frac{f^{2}(s)}{s}ds\begin{cases}<\infty,\\ =\infty.\end{cases}$
	$\alpha=d=2$	

表 5 X 的 k 重点集 L_k 的维数

（k 为任一正整数，c 表连续统势）

$d=1$	$\mathrm{Dim}(L_k)=\dim(L_k)=k\alpha-(k-1)$（当 $1\geqslant\alpha>1-\frac{1}{k}$）； $\mathrm{Dim}(L_c)=\dim(L_c)=1$，当 $\alpha=1$.
$d=2$	$\mathrm{Dim}(L_k)=\dim(L_k)=k\alpha-2(k-1)$（当 $\alpha>2(1-\frac{1}{k})$）； $\mathrm{Dim}(L_c)=\dim(L_c)=2$，（当 $\alpha=2$）.
$d=3$	$\mathrm{Dim}(L_2)=\dim(L_2)=2\alpha-3$，（当 $\alpha>\frac{3}{2}$）.

注 当 $d\geqslant4$ 时，$L_k=\varnothing$ a.s.（$\forall\ k\geqslant2$）.

第四章

Lévy 过程轨道的分形性质

§1　一般从属过程的轨道的分形性质

定义 1.1　称取值于$\mathbb{R}^d$的具有平稳独立增量的过程 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$为 Lévy 过程.

注 1.1　本节恒设$X(0)\equiv 0$. 由于 Lévy 过程 X 具有平稳独立增量,所以$\forall\ t\geqslant 0$,$X(t)$是无穷可分的(称随机变量 Y 是无穷可分的,如果对任何正整数 n,存在独立同分布的随机变量列 $Y_1,\cdots,Y_n$,使 $Y=Y_1+\cdots+Y_n$). 因此,$X(t)$的特征函数有下列 Lévy－Khintchine 公式:

$$E(e^{i\langle z,X(t)\rangle})=e^{-t\psi(z)},$$

$$\psi(z)=i\langle a,z\rangle+\frac{1}{2}zSz'$$

$$+\int_{\mathbb{R}^d}\left[1-e^{i\langle x,z\rangle}+\frac{i\langle x,z\rangle}{1+|x|^2}\right]\upsilon(dx),\tag{1.1}$$

其中 a 为$\mathbb{R}^d$中常向量,S 是 d 阶对称非负定矩阵,υ 是$\mathbb{R}^d$上的 Borel 测度,z'是 z 的转置,$\langle\cdot,\cdot\rangle$表$\mathbb{R}^d$中的内积,$|\cdot|$是$\mathbb{R}^d$中的欧氏范数,$\upsilon$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|x|^2}{1+|x|^2}\upsilon(dx)<\infty,$$

不妨设 $\upsilon(\{0\})=0$.

由 Lévy－Khintchine 公式,再注意 Lévy 过程的平稳独立增

量性,Lévy 过程 X 的一切有限维联合分布由 $X(1)$的分布(或者特征函数 $e^{-\psi(z)}$)所唯一决定,或者说由 $\psi(z)$所唯一决定,因此称 $X(1)$的分布为 X 的分布.

称 υ 为 X 的 Lévy 测度;称 $\psi(z)$为 X 的指数.

注 1.2 Lévy 过程 X 的轨道总是右连续且有左极限的,进而,X 具有强马氏性.

注 1.3 若(1.1)中的 $a=0,\upsilon(\mathbb{R}^d)=0,S$ 是单位矩阵,则(1.1)对应的 Lévy 过程 X 为 Brown 运动;若 $X(1)$的分布为稳定律,则 X 是稳定过程.

关于 Lévy 过程的前述诸性质,可参见[205]和[66].

本节主要讨论一类特殊的 Lévy 过程——一般从属过程(general subordinator).

定义 1.2 称取值于$\mathbb{R}$ 的且轨道非负单增的 Lévy 过程为一般从属过程.

当 X 为一般从属过程时,S 是零矩阵,其 Lévy 测度 υ 满足:

$$\upsilon(-\infty,0]=0,\int_{\mathbb{R}}\min(1,|x|)\upsilon(dx)<\infty. \tag{1.2}$$

且 $X(1)$的 Laplace 变换

$$\mathbf{E}(e^{-uX(1)})=e^{-g(u)},$$

$$g(u)=\int_0^{\infty}(1-e^{-ux})\upsilon(dx). \tag{1.3}$$

当 $g(u)=cu^{\alpha},c$ 是正实数,$0<\alpha<1$ 时,则 X 为指数为 α 的稳定从属过程.

(参见[67]).

定理 1.1 设 X 是一般从属过程,则

$$\dim(X([0,1]))=\sigma\quad a.s.,$$

其中

$$\sigma=\sup\{\delta\leqslant 1:\lim_{x\to 0}x^{\delta-1}\int_0^x\upsilon(y,\infty)dy=\infty\},$$

证明请见[98].

下面讨论一般从属过程像集的测度函数. 当 $\upsilon(0,\infty)<\infty$ 时，由 (1.3) 知 $g(\infty)<\infty$，从而由[67]引理 1 知 $P(X(t)=0)=\exp(-tg(\infty))$，所以对 $a.s.$ $\omega, X([0,1],\omega)$ 是有限集，其确切 Hausdorff 测度函数无需讨论. 以下只讨论 $\upsilon(0,\infty)=\infty$ 的场合.

由 $g(u)$ 的严格单增性，可令 $\eta(u)=g^{-1}(u)$，再令

$$h(t)=(\log\log t^{-1})/\eta(t^{-1}\log\log t^{-1}),\tag{1.4}$$

则 $h(t)$ 亦为严增函数，(见[67])故可记 $f=h^{-1}$ 为逆函数.

定理 1.2 若 X 为一般从属过程，其 Lévy 测度 υ 满足 $\upsilon(0,\infty)=\infty$，则存在正数 $c>0$，使 $f-m(X[0,s])=cs$ $a.s.$.

为证定理 1.2，需要下面诸引理(其证明请参见[67]).

引理 1.1 令 $P(a)=inf\{t\geqslant 0:X(t)\geqslant a\}, 0\leqslant a<\infty, f$ 如前，$\upsilon(0,\infty)=\infty$，则 $\limsup\limits_{a\to 0} P(a)/f(a)=c>0, a.s.$.

引理 1.2 在引理 1.1 的条件下，$\forall$ $s>0$，有

$(1-2e^{-1})/g(a^{-1})\leqslant \mathbf{E}(R(a,s))\leqslant \mathbf{E}(P(a))<e/g(a^{-1})$，

(当 a 充分小，$R(a,s)=P(a)\wedge s$).

引理 1.3 在引理 1.1 的条件下，当 $f(\delta)\geqslant 3(f(\gamma))^{\frac{1}{6}}$，$\gamma$ 充分小，则有：

$$P\left(\sup_{\delta\leqslant a\leqslant\gamma}\frac{P(a)}{f(a)}<\frac{1}{3}\right)\leqslant e^{-|\log f(\gamma)|^{\frac{1}{9}}}.$$

现在我们开始证明定理 1.2.

由引理 1.1 及第一章定理 2.3 可证得 $f-m(X[0,s])$ 具有有限的大于零的下界(此处视 $P(a)$ 为定理 2.3 中之 $\mu([0,a])$). 下证 $f-m(X[0,s])$ 具有有限上界，其中 s 是任意固定的正数. 令 $\gamma_k=h(e^{-k})$，从而 $|\log f(\gamma_k)|=k$. 定义 δ_k 使 $f(\delta_k)=3[f(\gamma_k)]^{\frac{1}{6}}$. 任取 $I\in\Lambda_k$，令 $\tau=\inf\{t\geqslant 0: X(t)\in I\}$，称 I 是坏区间，如果：(1) $\tau\leqslant s$；(2) $\forall$ $a\in[\delta_k,\gamma_k]$，有

$$\int_0^\infty \mathbf{1}_{[X(\tau),X(\tau)+a]}(X(t))dt<\frac{f(a)}{3}$$

Λ_k 中的非“坏区间”就称为“好区间”.

令 $N_k(s)$ 为时刻 s 前(含 s)被击中的区间 $I_{n,k}$ 的个数,$B_k(s)$ 为坏区间的个数,则由引理 1.3、第三章引理 4.4 和本章引理 1.2 得:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(B_k(s)) &\leqslant (\mathbf{E}N_k(s))\cdot\exp(-k^{\frac{1}{9}})\\ &\leqslant cs\mathbf{E}[T(\frac{\gamma_k}{3},s)]^{-1}\exp(-k^{\frac{1}{9}})\\ &\leqslant csg(\frac{3}{\gamma_k})\exp(-k^{\frac{1}{9}}),\end{aligned}$$

其中 $c>0$ 为常数,$T(a,t)$ 如第三章第四节(4.1)式所定义. 总之,由 f 及 g 的定义可证:当 k 充分大时,$B_k(s)f(\gamma_k)<k^{-1}$,故坏区间的影响可忽略不计.

现在考虑在 s 前(含 s)被击中的好区间对测度的影响. 每个这样的区间均可被某个长度为 a 的区间覆盖,其中 $a\in[\delta_k,\gamma_k]$. X 在上述区间中停留时间至少为 $\frac{f(a)}{3}$,而 $X([0,s])$ 可被有限个上述区间覆盖且 $X([0,s])$ 中每个点至多被覆盖两次. 记这些区间为 $I_1,\cdots,I_n$,它们的长度为 $a_1,\cdots,a_n$. 在时刻 $s+1$ 前,设 X 在 I_i 中停留时间为 T_i,$i=1,\cdots,n$. 于是

$$\sum_{k=1}^{n} f(a_k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}3T_k\leqslant 6(s+1).$$

总之,存在 $0<c'<\infty$,使 $f-m(X[0,s])\leqslant c'$ a.s. . 由第三章定理 3.3 的证明知:存在常数 $c_0>0$ 使

$$f-m(X[0,s])=c_0 s \quad a.s. .$$

定理证毕.

在我们讨论一般从属过程轨道的 Packing 测度之前,先引进几个定义及定理,从现在起到本节结束,总设 φ 为在 0 附近严增的测度函数,ψ 为 φ 之逆. 设 x_n 是单调下降收敛于 0 的序列,x_n 还满足

$$\frac{\varphi(5x_n)}{\varphi(5x_{n+1})}\leqslant c,\ c>0\ 为常数. \tag{1.5}$$

令

$$\Gamma=\Gamma(E,\{x_n\})=$$

$$\left\{(jx_n,(j+5)x_n):\begin{array}{l}\text{存在 } E \text{ 中的一个点,}\\ \text{含于}[(j+2)x_n,(j+3)x_n],j\in\mathbb{Z}\end{array}\right\},$$

$\mathbb{Z}$表示全体整数集.

定义 1.3 令

$$\varphi\text{—}P^+(E)=$$

$$\limsup_{\delta\downarrow 0}\left\{\sum_{I\in\mathscr{M}}\varphi(\mathrm{diam}(I)):\begin{array}{l}\mathscr{M}\subset\Gamma(E,\{x_n\})\text{为一个 Packing}\\ \text{且}\sup\limits_{I\in\mathscr{M}}\mathrm{diam}(I)<\delta,\{x_n\}\text{满足(1.5)}\end{array}\right\},$$

$$\varphi\text{—}p^+(E)=\inf\{\sum_i\varphi\text{—}P^+(E_i);E\subset\bigcup_i E_i\}.$$

注 1.4 $\varphi\text{—}P^+(E)$不依赖于$\{x_n\}$的选取.

注 1.5 可以验证存在常数$c_1,c_2>0$使

$$c_1\varphi\text{—}P^+(E)\leqslant\varphi\text{—}P(E)\leqslant c_2\varphi\text{—}P^+(E),E\subseteq\mathbb{R},$$

从而

$$c_1\varphi\text{—}p^+(E)\leqslant\varphi\text{—}p(E)\leqslant c_2\varphi\text{—}p^+(E).$$

像以往一样.我们用从属过程的停留时定义$\mathbb{R}$上一个 Borel 测度:

$$\forall\ A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}),\text{定义 }\mu(A)\equiv\mathscr{L}(\{s\in(0,1):X(s)\in A\}). \tag{1.6}$$

进而定义

$$\Lambda(x)=\limsup_{r\to 0}\frac{\varphi(2r)}{\mu(x-r,x+r)},$$

φ是某个测度函数.最后,令$F(t,y)=P(X(t)\geqslant y)$.

引理 1.4 设μ如(1.6)所定义,$\Lambda(x)$为(1.7)所定义,则

$$\frac{1}{2}\Lambda(X(s))$$

$$\leqslant\limsup_{t\downarrow 0}\frac{\varphi((X(s+t)-X(s))\wedge(X(s)-X(s-t)))}{t}\leqslant\Lambda(X(s)).$$

引理 1.5 如果k满足$\int_0^1\frac{1}{t}F(t,\psi(kt))^2dt<\infty$,则

$$\limsup_{t\downarrow 0}\frac{\varphi(Y_1(t)\wedge Y_2(t))}{t}\leqslant k\quad a.s.\ ,$$

其中 φ 为一测度函数，ψ 为 φ 的逆，Y_1 和 Y_2 与 X 独立同分布，Y_1 和 Y_2 之间也相互独立.

引理 1.6 如果 k 满足 $\int_0^1 \frac{1}{t} F(t,\psi(kt))^2 dt = \infty$，则

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{\varphi(Y_1(t) \wedge Y_2(t))}{t} \geqslant \frac{1}{4}k \quad a.s..$$

引理 1.7 下面的论断是等价的：

(1) $\int_0^1 t\upsilon[\psi(t),\infty)^2 dt < \infty$；

(2) $\int_0^1 t\upsilon[c\psi(kt),\infty)^2 dt < \infty$，$c,k$ 是任意正数，其中 υ 是 Lévy 测度，ψ 是某个测度函数的逆. 注意，(1)可导出 $\lim\limits_{t\to 0} t\upsilon[c\psi(kt),\infty)=0$.

定理 1.3 如果 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 为一般从属过程，$F(t,y)\equiv P(X(t)\geqslant y)$，则

(1) $\int_0^1 \frac{1}{t} F(t,c\psi(t))dt < \infty, \forall\, c > 0$

当且仅当

$$\int_0^1 t\upsilon[\psi(t),\infty)^2 dt < \infty \text{ 且} \lim_{t\downarrow 0} \frac{t}{\psi(t)} \int_0^{\psi(t)} x\upsilon(dx) = 0;$$

(2) $\int_0^1 \frac{1}{t} F(t,c\psi(t))^2 dt < \infty$ 对某个 $c>0$ 成立

当且仅当

$$\int_0^1 t\upsilon[\psi(t),\infty)^2 dt < \infty \text{ 且 } 0 < \limsup_{t\downarrow 0} \frac{t}{\psi(t)} \int_0^{\psi(t)} x\upsilon(dx) < \infty;$$

(3) $\int_0^1 \frac{1}{t} F(t,c\psi(t))^2 dt < \infty, (\forall\, c > 0)$

当且仅当

$$\int_0^1 t\upsilon[\psi(t),\infty)^2 dt = \infty \text{ 或} \limsup_{t\downarrow 0} \frac{t}{\psi(t)} \int_0^{\psi(t)} x\upsilon(dx) = \infty.$$

注意，在定理 1.3 中可将常数 c 移进 ψ 函数，如“$\int_0^1 \frac{1}{t} F(t,$

$c\psi(t))^2dt<\infty$，对某个 $c>0$"与"$\int_0^1 \frac{1}{t}F(t,\psi(ct))^2dt<\infty$，对某个 $c>0$"等价.

由引理 1.5、1.6 和定理 1.3 及其注可证得：

定理 1.4 设 Y_1 和 Y_2 为两个相互独立同分布的一般从属过程，φ 为 0 附近严增测度函数，ψ 为其逆，记

(1) $\int_0^1 t\upsilon[\psi(t),\infty)^2dt<\infty$ 且 $\lim\limits_{t\downarrow 0}\frac{t}{\psi(t)}\int_0^{\psi(t)} x\upsilon(dx)=0$；

(1)′ $\limsup\limits_{t\downarrow 0}\frac{\varphi(Y_1(t)\Lambda Y_2(t))}{t}=0 \quad a.s.$ ；

(2) $\int_0^1 t\upsilon[\psi(t),\infty)^2dt<\infty$ 且 $0<\limsup\limits_{t\downarrow 0}\frac{t}{\psi(t)}\int_0^{\psi(t)} x\upsilon(dx)<\infty$；

(2)′ $\limsup\limits_{t\downarrow 0}\frac{\varphi(Y_1(t)\Lambda Y_2(t))}{t}=k \quad a.s.$（$k$ 为有限正数）；

(3) $\int_0^1 t\upsilon[\psi(t),\infty)^2dt=\infty$ 或 $\limsup\limits_{t\downarrow 0}\frac{t}{\psi(t)}\int_0^{\psi(t)} x\upsilon(dx)=\infty$；

(3)′ $\limsup\limits_{t\downarrow 0}\frac{\varphi(Y_1(t)\Lambda Y_2(t))}{t}=\infty \quad a.s.$ ，

其中 υ 为 Lévy 测度，则(1)⇒(1)′，(2)⇒(2)′，(3)⇒(3).

引理 1.4—1.7、定理 1.3—1.4 的证明见[68].

定理 1.5 设 φ 为测度函数（φ 在 0 附近严增），$X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 为一般从属过程，则

$$\varphi-p(X[0,1])=\begin{cases}0, & \text{当(1)成立；}\\ c, & \text{当(2)成立，其中 } c \text{ 为有限正数；}\\ \infty, & \text{当(3)成立，}\end{cases}$$

其中(1)、(2)和(3)如定理 1.4 所定义.

证 若(3)成立，由引理 1.4 知，对固定 $s\in(0,1)$，$x=X(s)$，有 $\Lambda(x)=\infty \quad a.s.$. 令 $E=\{s\in(0,1):\Lambda(X(s))=\infty\}$，由 Fubini 定理得 $\mathscr{L}(E)=1$，从而 $\mu(X(E))=1$. 对 $X(E)$ 用第一章定理 3.4 则得：

$$\varphi-p(X[0,1])\geqslant\varphi-p(X(E))=\infty \quad a.s. .$$

若(1)成立，引理 1.4 告诉我们 $\Lambda(x)=0 \quad a.s.$ ，其中 $x=$

$X(s), s\in(0,1)$固定. 令 $E_0=\{s\in(0,1):\Lambda(X(s))=0\}$, 类似地可证 $\varphi-p(X(E_0))=0$ $a.s.$. 但我们还需考虑 $\varphi-p(X(E_0^c))$. 令

$$F_\varepsilon=\Bigg\{X(s), s\in(0,1):$$

$$\limsup_{t\downarrow 0}\frac{\varphi((X(s+t)-X(s))\wedge(X(s)-X(s-t)))}{t}>4\varepsilon\Bigg\},$$

由引理 1.4 知对任意序列$\{\varepsilon_n\}, \varepsilon_n\downarrow 0$, 都有 $\bigcup_n F_{\varepsilon_n}=X(E_0^c)$. 下面只需证 $\varphi-p(X(F_\varepsilon))=0, \forall\ \varepsilon>0$. 为此, 我们证明 $\varphi-p^+(X(F_\varepsilon))=0$.

令 $x_n=\frac{1}{5}\psi(\varepsilon 2^{-n}), I_{j,n}=(jx_n,(j+5)x_n)$, 显然$\{x_n\}$是满足(1.5)式的. 称 $I_{j,n}$为 K 型坏区间, 如果 $X(t)$击中$[jx_n,(j+1)x_n]$且在 2^{-n}个单位时间内从首中位置向前移动至少 x_n 个单位距离, $X(t)$又击中$[(j+2)x_n,(j+3)x_n]$且在 2^{-n}个单位时间内从首中位置向前移动至少 $2x_n$ 个单位距离.

现在任取 $x=X(s)\in F_\varepsilon$, 则存在 $t_i\downarrow 0$, 使

$$X(s+t_i)-X(s)>\psi(4\varepsilon t_i)且 X(s)-X(s-t_i)>\psi(4\varepsilon t_i). \quad (1.8)$$

下面要证 $\Gamma(F_\varepsilon,\{x_n\})\subset$全体 K 型坏区间 $I_{j,n}$. 首先, 我们不妨设 F_ε 中每个点都是连续点, 事实上, $X(t)$单调上升, 故只有至多可数个不连续点, 而可数点集的 Packing 测度为零. 对任意的 $x\in F_\varepsilon$, 任意正整数 n, 总存在 j 使 $x\in[(j+2)x_n,(j+3)x_n]$, 取 $t_i\in[2^{-n-2},2^{-n-1}]$, 令 $\xi_n=\inf\{t\geqslant 0: X(t)\geqslant(j+2)x_n\}, \tau_n=\inf\{t\geqslant 0: X(t)\geqslant jx_n\}$, 易见 ξ_n 和 τ_n 均为停时. 下证: $X(\xi_n+2^{-n})-X(\xi_n)\geqslant 2x_n, X(\tau_n+2^{-n})-X(\tau_n)\geqslant x_n$ 且 $X(t)$击中$[(jx_n,(j+1)x_n]$. 进而, $I_{j,n}$必为 k 型坏区间. 事实上,

$$\begin{aligned}X(\xi_n+2^{-n})-X(\xi_n)&\geqslant X(\xi_n+2^{-n})-X(s)\\&=X(s+(\xi_n+2^{-n}-s))-X(s),\end{aligned}$$

其中 s 在前面已固定. 但由 $X(s)-X(\xi_n)\leqslant x_n$ 知 $\xi_n>s-t_i$, 从而 $\xi_n-s+2^{-n}>-t_i+2^{-n}\geqslant-2^{-n-1}+2^{-n}>0$, 于是 $X(\xi_n+2^{-n})-X(\xi_n)\geqslant 5x_n>2x_n$. 又由于 $X(s)-X(\tau_n)\leqslant 3x_n$, 所以 $\tau_n\geqslant s-t_i$, 进而

$\tau_n+2^{-n}-s-t_i\geqslant 2^{-n}-2t_i\geqslant 2^{-n}-2^{-n}=0$，因此我们有

$$\begin{aligned}&X(\tau_n+2^{-n})-X(\tau_n)\\&=X(\tau_n+2^{-n})-X(s)+X(s)-X(\tau_n)\\&\geqslant X(s+t_i+(\tau_n+2^{-n}-s-t_i))-X(s)\\&\geqslant X(s+t_i)-X(s)\geqslant 5x_n\geqslant x_n.\end{aligned}$$

因为 $X(t)$ 是连续的，而 $X(s-t_i)<jx_n$，故 X 必击中 $[jx_n,(j+1)x_n]$. 总之，$I_{j,n}$ 是 K 型坏区间，从而 $\Gamma(F_\varepsilon,\{x_n\})\subset\{$全体 K 型坏区间 $I_{j,n}\}$.

根据 K 型坏区间的定义有

$$\begin{aligned}&P(I_{j,n}\text{为 }K\text{ 型坏区间})\\&\leqslant P(X(\tau_n)\leqslant(j+1)x_n,X(\xi_n)-X(\tau_n)\geqslant x_n,\xi_n\leqslant\tau_n+2^{-n},\\&\qquad X(\xi_n+2^{-n})-X(\xi_n)\geqslant 2x_n)\\&+P(X(\tau_n)\leqslant(j+1)x_n,X(\tau_n+2^{-n})-X(\tau_n)\geqslant x_n,\\&\qquad \xi_n>\tau_n+2^{-n},X(\xi_n+2^{-n})-X(\xi_n)\geqslant 2x_n),\end{aligned}$$

再根据强马氏性及事实“$\{X(\tau_n+2^{-n})-X(\tau_n)\geqslant x_n,\xi_n>\tau_n+2^{-n}\}\in\mathscr{F}_{\xi_n}$”，上述不等式右端小于或等于：

$$\begin{aligned}&P(X(\xi_n+2^{-n})-X(\xi_n)\geqslant 2x_n)P(X(\tau_n)\leqslant(j+1)x_n,X(\tau_n+2^{-n})-X(\tau_n)\geqslant x_n,\xi_n\leqslant\tau_n+2^{-n})\\&+P(X(\xi_n+2^{-n})-X(\xi_n)\geqslant 2x_n)P(X(\tau_n)\leqslant(j+1)x_n,X(\tau_n+2^{-n})-X(\tau_n)\geqslant x_n,\xi_n>\tau_n+2^{-n})\\&\leqslant P(X(\xi_n+2^{-n})-X(\xi_n)\geqslant 2x_n)P(X(\tau_n)\leqslant(j+1)x_n,X(\tau_n+2^{-n})-X(\tau_n)\geqslant x_n)\\&=P(X(t)\text{击中}[jx_n,(j+1)x_n])F(2^{-n},x_n)F(2^{-n},2x_n).\end{aligned}$$

令 N_n 为被击中的全体区间 $[jx_n,(j+1)x_n]$ 的个数，则

$$\sum_j P(I_{j,n}\text{ 为 }K\text{ 型坏区间})\leqslant F(2^{-n},x_n)^2\mathbf{E}N_n,$$

由引理 1.2、第三章引理 4.4 及 $g(u)$ 之定义知：

$$\mathbf{E}N_n\leqslant c\left[\mathbf{E}P\left(\frac{1}{3}x_n\right)\right]^{-1}$$

$$\leqslant cg(\frac{3}{x_n})$$

$$\leqslant c\upsilon[\frac{1}{3}x_n,\infty) + c\int_0^{\frac{x_n}{3}} \frac{3}{x_n}x\upsilon(dx),$$

其中 $P(a)$、$g(u)$ 如本节开端所定义，υ 为 Lévy 测度，$c>0$ 为常数.

引理 1.7 告诉我们 $2^{-n}\upsilon[\frac{1}{3}x_n,\infty)\to 0$ 当 $n\to\infty$，而定理 1.4 中(1)的第二部分又保证了 $2^{-n}\int_0^{\frac{x_n}{3}} \frac{3}{x_n}x\upsilon(dx) \to 0$ 当 $n\to\infty$，因此

$$\sum_n 2^{-n}\sum_j P(I_{j,n} \text{ 是 } K \text{ 型坏区间})$$

$$\leqslant \sum_n F(2^{-n},x_n)^2 \cdot 2^{-n}\mathrm{E}N_n$$

$$\leqslant c_1\sum_n F(2^{-n},x_n)^2$$

$$\leqslant c_2\int_0^1 \frac{1}{t}F(2t,\frac{1}{5}\psi(2\varepsilon t))^2dt < \infty ,$$

其中 c_1,c_2 是常数，上述最后一个不等式成立是根据定理 1.3 之注.

注意到 $2^{-n}=\frac{1}{\varepsilon}\varphi(5x_n)=\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\mathscr{L}(I_{j,n}))$，因此

$$\varphi-P^-(F_\varepsilon) \leqslant \varepsilon\cdot\lim_{k\to\infty}\sum_{n\geqslant k}2^{-n}\sum_j P(I_{j,n} \text{ 是 } K \text{ 型坏区间}) = 0 ,$$

从而 $\varphi-P(F_\varepsilon)=0$，$\varphi-p(F_\xi)=0$.

当(2)成立，由定理 1.3 的注可知：存在 $k_0>0$，使

$$\int_0^1 \frac{1}{t}F(t,\psi(kt))^2dt\begin{cases}\text{收敛}, k\geqslant k_0\\ \text{发散}, 0<k<k_0,\end{cases}$$

由引理 1.5、1.6 得，对每个固定 $s\in(0,1)$，

$$\limsup_{t\downarrow 0}\frac{\varphi((X(s+t)-X(s))\wedge(X(s)-X(s-t)))}{t}$$

$$=c_3 \quad a.s. ,$$

$c_3>0$ 是介于 $\frac{1}{4}k_0$ 和 k_0 之间的某个数. 由 Fubini 定理及第一章定理 3.4 得：

$\varphi-p(X[0,1])\geqslant c_4>0\quad a.s.,\quad c_4$ 是常数.

现在选取 $c_5>c_3$，使

$$\int_0^1 \frac{1}{t}F(2t,\frac{1}{5}\psi(2c_5t))^2dt<\infty.$$

令

$$E_1=\{s\in(0,1):$$
$$\limsup_{t\downarrow 0}\frac{\varphi((X(s+t)-X(s))\wedge(X(s)-X(s-t)))}{t}$$
$$\leqslant 4c_5\},$$

$$E_2=(0,1)-E_1.$$

因为 $\mathscr{L}(E_1)=1$，第一章定理 3.4 告诉我们

$$\varphi-p(X(E_1))\leqslant 8c_1<\infty\quad a.s.,$$

用(1)中的证明方法可证得 $\varphi-P^+(X(E_2))=0\quad a.s.$，此处取 $x_n=\frac{1}{5}\psi(c_5 2^{-n}),n=1,2,\cdots$. 总之，对 $a.s.\quad\omega$，

$$c_6s\leqslant\varphi-p(X[0,s])\leqslant c_7s,\quad c_6,c_7>0 \text{ 为常数}.$$

但是，$W(s)\equiv\varphi-p(X[0,s])$ 是一个连续的从属过程，故存在 c 使 $W(s)=cs\quad a.s.$.

§2　Lévy 过程的像集

在这一节中，我们要研究一般 Lévy 过程的像集的分形性质. 由于 Lévy 过程这个框架比 Brown 运动、stable 过程和从属过程要宽广得多，因此所获结论就更具有一般性和普遍性. 但也正由于 Lévy 过程这种高度的概括性，使得它丧失了很多 Brown 运动、stable 过程和从属过程所具有的具体的、特殊的性质，因此所得到的结论相对于这些特殊过程来说就要少得多.

设 $X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x)$ 是$\mathbb{R}^d(d\geqslant1)$中的 $B.G.$ 意义下的 Lévy 过程，指数为 $\psi(z)$，即是：X 是具有平稳独立增量的$\mathbb{R}^d$值 Hunt 过程(Hunt 过程的定义见[27])，且

$$\mathbf{E}^{\circ}(\exp\{i\langle z,X_t\rangle\})=\exp\{-t\psi(z)\}, \tag{2.1}$$

其中

$$\psi(z)=i\langle a,z\rangle+\frac{1}{2}ySy'+\int\left[1-e^{i\langle x,z\rangle}+\frac{i\langle x,z\rangle}{1+|x|^2}\right]\upsilon(dx), \tag{2.2}$$

$\mathbf{E}^0(\cdot)$表示关于P°的期望，$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示$\mathbb{R}^d$中欧氏内积，常值向量$a\in\mathbb{R}^d$，$S$为$d$阶对称非负定矩阵，$\upsilon$为$\mathbb{R}^d$上Borel测度并满足

$$\int\frac{|x|^2}{1+|x|^2}\upsilon(dx)<\infty. \tag{2.3}$$

自此至本章末，所言Lévy过程，均系$B.G.$意义下的Lévy过程. 若$S\neq0$，则X的样本函数的性质实际上由相应于指数为$\frac{1}{2}zSz'$的过程——Brown运动所决定. 因此我们假设X没有Gauss成分，即假设$S=0$. 进一步，若

$$\int_{|x|<1}|x|\upsilon(dx)<\infty,$$

则可把(2.2)中积分分为两部分：

$$\int[1-e^{i\langle x,z\rangle}]\upsilon(dx)+i\langle\int\frac{x}{1+|x|^2}\upsilon(dx),z\rangle,$$

将后一项与(2.2)右端第一项合并后$\psi(z)$形如：

$$\psi(z)=i\langle\tilde{a},z\rangle+\int[1-e^{i\langle x,z\rangle}]\upsilon(dx)$$

此时过程X的样本轨道在$t=0$点附近的性质明显由这个线性项——非随机的线性过程所决定，因此我们移去这个线性项. 总之，自此至本章末，我们对Lévy过程X的指数$\psi(z)$（从而对X）的假设是：

$$\psi(z)=i\langle a,z\rangle+\int\left[1-e^{i\langle x,z\rangle}+\frac{i\langle x,z\rangle}{1+|x|^2}\right]\upsilon(dx), \tag{2.4}$$

如果还有$\int_{|x|<1}|x|\upsilon(dx)<\infty$，则还假设

$$\psi(z)=\int[1-e^{i\langle x,z\rangle}]\upsilon(dx). \tag{2.5}$$

以下记P°为P、记$\mathbf{E}^{\circ}$为$\mathbf{E}$.

下面我们对 X 定义几个指标，这些指标对于确定 X 的像集的分形性质是至关重要的. 这些指标最初由 Blumenthal 和 Getoor 在 60 年代初定义. 如不特别声明，本节 X 恒表 Lévy 过程.

定义 2.1 用 $Re(\psi(z))$表 $\psi(z)$的实部，令

$$\beta=\inf\left\{\alpha>0:\int_{|x|<1}|x|^{\alpha}\nu(dx)<\infty\right\}, \tag{2.6}$$

$$\beta'=\sup\left\{\alpha\geqslant 0:\int|x|^{\alpha-d}\frac{1-e^{-\mathrm{Re}\psi(x)}}{\mathrm{Re}\psi(x)}dx<\infty\right\}, \tag{2.7}$$

$$\beta''=\sup\{\alpha\geqslant 0:\text{当}|y|\to\infty\text{时}|y|^{-\alpha}\mathrm{Re}\psi(y)\to\infty\}. \tag{2.8}$$

称 β 为(Blumenthal－Getoor)上指标，称 β'、β''为(Blumenthal－Getoor)下指标.

下面命题给出了 β 的等价表示和诸指标之间的关系. 我们略去证明，有兴趣的读者可参见[29]或自行证明.

命题 2.1 我们有

(1) $\beta=\inf\{\alpha\geqslant 0:\text{当}|y|\to\infty\text{时}|y|^{-\alpha}|\psi(y)|\to 0\}$
$\quad=\inf\{\alpha\geqslant 0:\text{当}|y|\to\infty\text{时}|y|^{-\alpha}\mathrm{Re}\psi(y)\to 0\}$;

(2) $0\leqslant\beta''\leqslant\beta'\leqslant\beta\leqslant 2$;

(3) 若 X 是从属过程，$g(u)$ 由 §1(1.3)定义，令 $\sigma=\sup\left\{\alpha\leqslant 1:\int_1^{\infty}\frac{r^{\alpha-1}}{g(r)}dr<\infty\right\}$，则

$$0\leqslant\beta''\leqslant\beta'\leqslant\sigma\leqslant\beta\leqslant 1;$$

(4)若 X 为指标为 α 的 *stable* 过程，则

$$\beta''=\beta'=\beta=\alpha.$$

文[29]给出了各种例子来说明 $\beta'<\beta$、$\beta''<\beta'$、$\sigma<\beta$ 都是可能的. 这些指标和过程当 $t\to 0$ 时的极限行为之间有如下命题所述的关系.

命题 2.2 设 X 为 Lévy 过程，

(1) 若 $\alpha>\beta$，则

$$P(\lim_{t\to 0}t^{-1/\alpha}X_t=0)=1; \tag{2.9}$$

(2) 若 $\alpha<\beta'\wedge d$，则

$$\lim_{t\to 0} t\mathbf{E}(|X_t|^{-\alpha})=0;\tag{2.10}$$

(3) 若 $\alpha<\beta''$，则

$$\lim_{t\to 0}\mathbf{E}(\exp\{-t^{-1/\alpha}|X_t|\})=0.\tag{2.11}$$

这个命题的证明亦请见[29]. 为了确定像集的 Hausdorff 维数，我们需要有关过程轨道的 γ 变差的结果. 令

$$V_\gamma(X;0,t)=$$

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{m}|X_{t_i}-X_{t_{i-1}}|^\gamma:0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_m=t,m\geqslant 1\right\},\tag{2.12}$$

即 $V_\gamma(X;0,t)$ 为轨道 $s\mapsto X_s$ 在 $[0,t]$ 上的 γ 变差. 我们有(证明参见[29])：

命题 2.3　(1)若 $\gamma<\beta$，则

$$P(V_\gamma(X;0,t)=\infty)=1;\tag{2.13}$$

(2)若 $\beta<\gamma\leqslant 1$，则

$$P(V_\gamma(X;0,t)<\infty)=1.\tag{2.14}$$

上面几个命题说明了 β、β'、β'' 这几个指标与 X 的轨道性质密切相关. 下面我们将证明这些指标亦与轨道的分形性质密切相关.

定理 2.1　设 *Borel* 集 $E\subset[0,1]$，X 如前所设为 Lévy 过程.

(1) 若 $\beta'<d$，则

$$P(\dim(X(E))\geqslant\beta'\dim(E))=1;\tag{2.15}$$

若 $\beta'>d-1$，则

$$P(\dim(X(E))\geqslant\min(\beta''\dim(E),1))=1.\tag{2.16}$$

(2) $P(\dim(X(E))\leqslant\beta\dim(E))=1.$　　(2.17)

在证明这个定理之前，我们先证明下面两个引理.

引理 2.1　若 $\alpha<\min(\beta',d)$ 且 $b\leqslant 1$，则

$$\lim_{t\to 0}t^b\mathbf{E}(|X_t|^{-b\alpha})=0.\tag{2.18}$$

证　由(2.10)知 $\lim\limits_{t\to 0}t\mathbf{E}(|X_t|^{-\alpha})=0$，从而

$$\lim_{t\to 0}t^b[\mathbf{E}(|X_t|^{-\alpha})]^b=0.$$

因为 $b\leqslant 1$，$f(x)=x^b$ 为凹函数，由 Jensen 不等式有

$$t^b[\mathbf{E}(|X_t|^{-\alpha})]^b\geqslant t^b\mathbf{E}(|X_t|^{-b\alpha}).$$

由此即得(2.18).

引理 2.2 若 $\alpha<\beta'$ 且 $0<\gamma<d$，则存在常数 M 和 K（仅依赖于 α 和 γ）使得

$$E(|X_t|^{-\gamma})\leqslant M+Kt^{-\gamma/\alpha}.$$

证 首先注意到下述事实：若 $F(x)$ 为 d 维分布函数而 $\varphi(u)$ 为其特征函数，则将 $\varphi(u)$ 的定义(Fourier 变换)代入直接验证即得

$$2^{\gamma/2-1}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\int|y|^{-\gamma}F(dy)$$
$$=(2\pi)^{-d/2}\int_0^\infty u^{\gamma-1}du\int e^{-\frac{1}{2}|y|^2}\varphi(uy)dy. \tag{2.19}$$

视 $P(X_t\leqslant x)$ 为上式中 $F(x)$，则有

$$\mathbf{E}(|X_t|^{-\gamma})\leqslant A\int_0^\infty u^{\gamma-1}du\int e^{-\frac{1}{2}|y|^2}e^{-t\mathrm{Re}\psi(uy)}dy$$
$$=A'\int|y|^{\gamma-d}e^{-t\mathrm{Re}\psi(y)}dy.$$

（其中 A、A' 均为正常数）. 因为 $\alpha<\beta''$，故当 $|y|$ 充分大时 $\mathrm{Re}\psi(y)\geqslant|y|^\alpha$. 所以存在 $R>0$ 使得

$$\mathbf{E}(|X_t|^{-\gamma})\leqslant A'\int_{|y|\leqslant R}|y|^{\gamma-d}dy+A'\int_{|y|>R}|y|^{\gamma-d}e^{-t|y|^\alpha}dy$$
$$\leqslant M+A''t^{-\gamma/\alpha}\int_0^\infty u^{\gamma/\alpha-1}e^{-u}du$$
$$=M+Kt^{-\gamma/\alpha}.$$

现在我们来证明定理 2.1 之(1). 首先考虑 $\beta\leqslant d$ 的情形. 记 $c=\dim(E)$. 若 $\gamma<c\beta'$，则能选取 α、α' 使得

$$\gamma/c<\alpha'<\alpha<\beta'\leqslant d.$$

由此得 $\gamma/\alpha'<c$，从而 $S^{\gamma/\alpha'}-m(E)=\infty$. 取 E 的闭子集 F 使得 $s^{\gamma/\alpha}-m(F)>0$，由 Frostman 定理有 $C_{\gamma/\alpha}(F)>0$，故存在 F 上的概率测度 m 使得

$$\int_F\int_F|t-s|^{-\gamma/\alpha}m(dt)m(ds)<\infty \tag{2.20}$$

由引理 2.1,我们有:∃ $\delta>0$,当 $|t-s|<\delta$ 时

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(|X_t-X_s|^{-\gamma})&=\mathbf{E}(|X_{|t-s|}|^{-\gamma})\\&=\mathbf{E}(|X_{|t-s|}|^{-(\gamma/\alpha)\alpha})|t-s|^{\gamma/\alpha}|t-s|^{-\gamma/\alpha}\\&\leqslant|t-s|^{-\gamma/\alpha}\end{aligned}\tag{2.21}$$

另一方面,当 $1\geqslant|t-s|\geqslant\delta$ 时 $|t-s|\to\mathbf{E}(|X_{|t-s|}|^{-\gamma})$ 是有界函数.由 Fubini 定理及(2.21)、(2.20)知

$$\int_F\int_F|X_t-X_s|^{-\gamma}m(dt)m(ds)<\infty\quad P\text{-}a.s.\ ,$$

再由第二章命题 2.2 知 $s^\gamma-m(X(E))\geqslant s^\gamma-m(X(F))>0\quad P$-$a.s.$,从而 $P(\dim(X(E))\geqslant\gamma)=1$. 因为 $\gamma<\beta'\dim(E)$ 是任意的,故得(2.15).

至于 $\beta'>d=1$ 的情形,用完全类似于上面的方法(用引理2.2 取代引理 2.1)即可证得.这完成了定理 2.1 之(1)的证明.

下面证明(2).我们只证 $\beta<1$ 的情形.其余情形的证明参见[162,168].这样做的原因在于上、下指标的定义及 $\beta<1$ 时的证明都来自[29],反映了 Blumenthal 和 Getoor 他们最初提出和解决这个问题的思想,并且其证法也较有典型意义.

设 $\beta<1$,选取 α 满足 $\beta<\alpha\leqslant1$. 由命题 2.3 之(2)有 $V_\alpha(t)\triangleq V_\alpha(X;0,t)<\infty\quad q.s.$. 因为 $\alpha\leqslant1$,由不等式 $|a+b|^\alpha\leqslant|a|^\alpha+|b|^\alpha$ 易验证:

$$V_\alpha(t+s)-V_\alpha(s)=V_\alpha(X,s,t+s),\ \forall\ t、s\geqslant0.$$

从而过程 $V_\alpha=\{V_\alpha(t),t\geqslant0\}$ 为平稳独立增量过程. 又 $t\to V_\alpha(t)$ 显然非降,故 $V_\alpha=\{V_\alpha(t),t\geqslant0\}$ 为从属过程. 我们有下面命题:

命题 2.4 设 $\beta<\alpha\leqslant1$,则 $\beta(V_\alpha)\leqslant\beta/\alpha$(其中 $\beta(V_\alpha)$ 表示 V_α 的上指标).

证 取 α' 使得 $\beta/\alpha<\alpha'\leqslant1$,考虑表达式

$$\sum_{i=1}^n|V_\alpha(t_i)-V_\alpha(t_{i-1})|^{\alpha'}\ ,$$

其中 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$. 注意到每一个加项可由如下形式的表

达式来任意逼近：

$$\Big(\sum_{j=1}^{m_i}|X(t_{i,j})-X(t_{i,j-1})|^{\alpha}\Big)^{\alpha'}\leqslant\sum_{j=1}^{m_i}|X(t_{i,j})-X(t_{i,j-1})|^{\alpha\alpha'}$$

其中 $t_{i-1}=t_{i,0}<t_{i,1}<\cdots<t_{i,m_i}=t_i$. 于是 $V_{\alpha'}(V_\alpha)\leqslant V_{\alpha\alpha'}(X)<\infty$（因为 $\beta<\alpha\alpha'\leqslant 1$）. 再由命题 2.3 知 $\beta(V_\alpha)\leqslant\alpha'$. 最后，由 α' 的任意性知命题获证.

我们还需要下面两个引理. 我们用 $g_\alpha(u)$ 表示 α 阶稳定从属过程 $T_\alpha=\{T_\alpha(t),t\geqslant 0\}$ 中 $T_\alpha(1)$ 的分布密度，即

$$e^{-u^\alpha}=\int_0^\infty g_\alpha(r)e^{-ur}dr. \tag{2.22}$$

引理 2.3 设 $g(u)$ 为上指标是 β 的从属过程的从属指数（具体定义见 §1(1.3)），如果 $\theta>\beta,\gamma\leqslant 1,\theta\gamma<1$，则

$$\int_0^\infty (g(u))^\gamma g_{\theta\gamma}(u)du<\infty.$$

证 首先设 $\gamma=1$. 注意到当 $\beta<\alpha<1$ 时有

$$\int_0^\infty g(u)g_\alpha(u)du=\int_0^\infty\int_0^\infty(1-e^{-ru})\upsilon(dr)g_\alpha(u)du$$

$$=\int_0^\infty(1-e^{-r^\alpha})\upsilon(dr). \tag{2.23}$$

因 $\alpha>\beta$，故 $\int_0^1 r^\alpha\upsilon(dr)<\infty$，从而上述最后一个积分为有限值. 这就 $\gamma=1$ 情形证明了引理. 下设 $\gamma<1$. 注意到 $[g(u)]^\gamma$ 亦为某个从属过程的从属指数，并且该从属过程的上指标 $\tilde\beta$ 满足 $\tilde\beta\leqslant\beta\gamma$. 这是因为对从属过程来讲，其上指标 β 满足

$$\beta=\inf\{\alpha\geqslant 0:\frac{g(u)}{u^\alpha}\to 0(u\to\infty)\}, \tag{2.24}$$

（其中 $g(u)$ 为从属指数）. 因为 $\beta\gamma<\theta\gamma$，由已证的 $\gamma=1$ 情形的结论知这完成了引理的证明.

引理 2.4 设 $T=\{T(t),t\geqslant 0\}$ 为上指标 $\beta<1$ 的从属过程. 设 $\beta<\gamma<1,0<\theta\leqslant 1$，令

$$A(t)=\int_0^\infty e^{-u^{\theta\gamma}}G(t,du)$$

(其中$G(t,du)$表示$T(t)$的分布函数),则当$t\to0$时$t^{-\theta}[1-A(t)]$是有界的.

证 因为$\theta\gamma<1$,故可令

$$I(t)\equiv t^{-\theta}[1-A(t)]=t^{-\theta}\int_0^\infty[1-e^{-tg(u)}]g_{\theta\gamma}(u)du.$$

固定$t>0$,令$B=\{u:tg(u)>1\}$,记$B'=[0,\infty)-B$,则

$$\begin{aligned}I(t)&\leqslant t^{-\theta}\int_{B'}[1-\exp(-(tg(u))^{\theta})]g_{\theta\gamma}(u)du\\&\quad+t^{-\theta}\int_B g_{\theta\gamma}(u)du\\&\leqslant2\int_0^\infty(g(u))^{\theta}g_{\theta\gamma}(u)du.\end{aligned}$$

由引理 2.3 知上述最后积分是有限的.

现在我们来证明定理 2.1 之(2). 先设$\alpha=\dim(E)<1$. 取γ满足$\beta<\gamma\leqslant1$,令$V_\gamma(t)=V_\gamma(X;0,t)$,则$V_\gamma=\{V_\gamma(t),t\geqslant0\}$是从属过程,$\beta(V_\gamma)\leqslant\beta/\gamma<1$. 如果$\beta(V_\gamma)<\eta<1$,则对任意$\theta\leqslant1$,令

$$\tilde{A}(t)=\int_0^\infty\exp\{-u^{\eta\theta}\}G(t,du)=\mathbf{E}(\exp\{-V_\gamma(t)^{\eta\theta}\}),$$

其中$G(t,\cdot)$为$V_\gamma(t)$的分布. 由引理 2.4 知,当$t\to0$时,$t^{-\theta}[1-\tilde{A}(t)]$是有界的.

若令$d(t)=\operatorname{diam}(X([0,t]))$,则$(d(t))^\gamma\leqslant V_\gamma(t)$.

这样,若记

$$A(t)=e^{-B(t)}=\mathbf{E}(\exp\{-d(t)^{\gamma\eta\theta}\}),$$

则有

$$1\geqslant A(t)\geqslant\tilde{A}(t),$$

从而当$t\to0$时,$t^{-\theta}[1-A(t)]$仍然是有界的,于是存在有限正常数K使得

$$B(t)\leqslant Kt^{\theta}\qquad(0\leqslant t\leqslant1).\tag{2.25}$$

任给$E\subset[0,1]$满足$\dim(E)=\alpha<1$,取α'使得$\alpha<\alpha'<1$. 对$n\geqslant1$,令$\{E_{ni},i\geqslant1\}$为E的一个区间覆盖,其中E_{ni}均为区间,除端点外无公共点,并且满足

$$\sum_i (\mathrm{diam} E_{ni})^{\alpha'} < \frac{1}{n}.$$

(因为 $s^{\alpha'}-m(E)=0$，故这样的 $\{E_{ni}, i \geqslant 1\}$ 是存在的). 显然 $\{X(E_{ni}), i\geqslant 1\}$ 为 $X(E)$ 的一个覆盖，并且 $X(E_{ni}), i\geqslant 1$ 是相互独立的. 由(2.25)(取 $\theta=\alpha'$)有

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(\exp\{-\sum_i (\mathrm{diam} X(E_{ni}))^{\gamma\eta\alpha'}\}) \\
&= \prod_i A(\mathrm{diam} E_{ni}) = \exp\{-\sum_i B(\mathrm{diam} E_{ni})\} \\
&\geqslant \exp\{-K\sum_i (\mathrm{diam} E_{ni})^{\alpha'}\} \\
&\geqslant e^{-K/n},
\end{aligned}$$

从而

$$\sum_i (\mathrm{diam} X(E_{ni}))^{\gamma\eta\alpha'} \xrightarrow{P} 0, (n \to \infty),$$

故存在子序列满足

$$\sum_i (\mathrm{diam} X(E_{n_k i}))^{\gamma\eta\alpha'} \longrightarrow 0, (k \to \infty) \quad P-a.s..$$

由 Hausdorff 维数的定义知

$$P(\dim(X(E)) \leqslant \gamma\eta\alpha') = 1.$$

但是 $\gamma\eta<\gamma, \gamma>\beta, \alpha'>\alpha$ 是任意的，从而有

$$P(\dim(X(E)) \leqslant \alpha\beta) = 1.$$

这完成了 $\alpha=\dim(E)<1$ 时的证明. $\alpha=\dim(E)=1$ 情形的证明可直接组合命题 2.3 和下面命题得到:

命题 2.5 若函数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}^N$ 有如下性质:

(1) f 右连续;

(2) f 有左极限;

(3) f 在有界区间上是有界的,

则 $s^{\alpha}-m(f([0,1]))\leqslant 2^{\alpha}V_{\alpha}(f;0,1) \qquad (\forall\ \alpha>0)$

这个命题的证明是纯分析的，我们略去，有兴趣的读者可见[29].

定理 2.1 给出了 $\dim(X(E))$ 的最佳上、下界估计(注意在

stable 过程情形 $\beta''=\beta'=\beta$，定理 2.1 实际上告诉我们 $\dim(X(E))=\beta\dim(E)$ $a.s.$). 特别地，有

$$\beta'\leqslant\dim(X[0,1])\leqslant\beta \qquad P-a.s.$$

现在的问题是进一步要问 $\dim(X[0,1])$ 究竟等于多少，是不是 $\dim(X[0,1])$ $a.s.$ 等于某个常数？下面定理 2.2 肯定回答了这个问题. 为此，先引入一个定义（详见[178]）

定义 2.2 令

$$\gamma=\sup\{\alpha\geqslant 0:\limsup_{a\to 0}a^{-\alpha}\int_0^1 P(|X_t|\leqslant a)dt<\infty\}, \tag{2.26}$$

称 γ 为 X 的 Pruitt 指标.

下面命题给出了 γ 的等价表示.

命题 2.6 我们有

$$\gamma=\sup\{\alpha\geqslant 0:\int_0^1\mathbf{E}(|X_t|^{-\alpha})dt<\infty\}. \tag{2.27}$$

证 记 $G_t(u)=P(|X_t|\leqslant u)$，$H(u)=\int_0^1 G_t(u)dt$，则对任何 $\alpha>0$，有

$$\begin{aligned}\int_0^1\mathbf{E}(|X_t|^{-\alpha})dt&=\int_0^1\int_0^\infty u^{-\alpha}dG_t(u)dt\\&=\int_0^\infty u^{-\alpha}dH(u)=\alpha\int_0^\infty u^{-\alpha-1}H(u)du.\end{aligned} \tag{2.28}$$

$\forall\ \alpha<\gamma$，取 β 满足 $\alpha<\beta<\gamma$. 由 γ 的定义易见 $H(u)\leqslant Mu^\beta$ 对充分小的 u 成立，从而由(2.28)知积分 $\int_0^1\mathbf{E}(|X_t|^{-\alpha})dt<\infty$. 反过来，若 $\int_0^1\mathbf{E}(|X_t|^{-\alpha})dt<\infty$，则 $\forall\ a>0$，有

$$\begin{aligned}M\geqslant\alpha\int_0^\infty u^{-\alpha-1}H(u)du&\geqslant H(a)\alpha\int_a^\infty u^{-\alpha-1}du\\&=H(a)a^{-\alpha}\end{aligned}$$

从而 $\alpha\leqslant\gamma$. 命题得证.

下面我们将证明 $\dim(X[0,1])=\gamma$ $P-a.s.$. 为此，我们需要两个引理. 这两个引理取自[175,]我们略去其证明.

引理2.5 存在 $\lambda_0>0$ 使得

$$P(T(a,s)\geqslant\lambda\mathbf{E}(T(2a,s)))\leqslant e^{-\lambda/2},(\forall\ \lambda\geqslant\lambda_0),$$

其中 $T(a,s)=\int_0^s \mathbf{1}_{B(0,a)}(X_t)dt$，$\mathbf{1}_B$ 表 B 上的示性函数，$B(0,a)=\{x:|x|\leqslant a\}$.

引理2.6　设 $\Lambda(a)$ 是由一些边长为 a 的 d 维立方体组成的集类，$\Lambda(a)$ 中任何 K 个不同立方体的交集为空集. 令

$$M(a,s)=\#\{C:C\in\Lambda(a),\exists\ t\in[0,s]\text{使得}X_t\in C\},$$

则存在正常数 K' 使得

$$\mathbf{E}(M(a,s))\leqslant K'[\mathbf{E}(T(a/3,s))]^{-1}.$$

定理2.2　$\dim(X[0,1])=\gamma\quad a.s.$.

证　先证 $\dim(X[0,1])\geqslant\gamma\quad a.s.$. $\gamma=0$ 时为显然. 设 $\gamma>0$，任取 α 满足 $0<\alpha<\gamma$，任取 $\beta\in(\alpha,\gamma)$. 令 $a_k=e^{-k}(k\geqslant1)$，记

$$f(a)\triangleq\mathbf{E}(T(2a,1))=\int_0^1 P(|X_t|\leqslant 2a)dt,$$

由引理2.5，当 K 充分大时有

$$P(T(a_k,1)\geqslant 4\log|\log a_k|f(a_k))\leqslant k^{-2},$$

由 Borel－Cantelli 引理和 γ 的定义有

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{T(a_k,1)}{a_k^\beta\log|\log a_k|}\leqslant\limsup_{k\to\infty}\frac{CT(a_k,1)}{f(a_k)\log|\log a_k|}<\infty\quad a.s.$$ (C 为正常数)

从而

$$\lim_{k\to\infty}\frac{T(a_k,1)}{a_k^\alpha}=0\quad a.s.\ ,$$

又因为 $a\to T(a,1)$ 是单调的且 $\frac{a_k}{a_{k+1}}$ 有界，我们实际上证明了

$$\lim_{a\to0}\frac{T(a,1)}{a^\alpha}=0\quad P\text{-}a.s.\ .$$

再应用密度定理即知(例如，可见[40])：

$$s^\alpha-m(X[0,1])=\infty\quad a.s.\ ,$$

从而 $\dim(X[0,1])\geqslant\gamma\quad a.s.$

下面证明 $\dim(X[0,1])\leqslant\gamma\quad a.s.$. 任取 $\alpha>\gamma$，有

$$\limsup_{a\to 0}\frac{f(a)}{a^\alpha}=\infty,$$

故可取$\{a_k,k\geqslant 1\}$使得$a_k\to 0$且

$$f(a_k)\geqslant ka_k^\alpha \quad (k\geqslant 1).$$

现在用毗连的边长为$6a_k$的立方体来覆盖$\mathbb{R}^d$. 由引理2.6,有

$$\mathbf{E}(M_k)\leqslant K'[f(a_k)]^{-1}\leqslant K'k^{-1}a_k^{-\alpha} \qquad (k\geqslant 1),$$

(其中$M_k=M(6a_k,1)$. 换句话说,$X[0,1]$被含于M_k个这种立方体中),从而对$\varepsilon>0$有

$$P(M_ka_k^\alpha\geqslant\varepsilon)\leqslant k'\varepsilon^{-1}k^{-1} \qquad (k\geqslant 1).$$

所以$M_ka_k^\alpha\xrightarrow{P}0$,从而可取$\{a_l\}$的子列$\{n_k,k\geqslant 1\}$使得$M_{n_k}a_{n_k}^\alpha\to 0$ $a.s.$. 不妨设$M_ka_k^\alpha\to 0$ $a.s.$. 因$X[0,1]$被含于M_k个这种立方体中,故这M_k个立方体(记为$C_i^k,i=1,\cdots,M_k$)构成了$X[0,1]$的一个$6a_k$-覆盖,但是

$$\sum_{i=1}^{M_k}|C_i^k|^\alpha = b6^\alpha M_ka_k^\alpha \qquad (k\geqslant 1)$$

(其中b仅与$\mathbb{R}^d$有关),又已证$M_ka_k^\alpha\to 0$ $a.s.$,故

$$\sum_{i=1}^{M_k}|C_i^k|^\alpha\to 0 \quad (k\to\infty) \quad a.s. ,$$

这意味着$s^\alpha-m(X[0,1])=0$. 由$\alpha>\gamma$的任意性知$\dim(X[0,1])\leqslant\gamma$ $a.s.$.

在第三章中我们已经知道α阶稳定过程X的一致维数结果:$P(\dim(X(E))=\alpha\dim(E)$对一切$E$成立$)=1$. 对 Lévy 过程我们已证:$\forall E$有$\beta'\dim(E)\leqslant\dim(X(E))\leqslant\beta\dim(E)$ $a.s.$,自然要问对 Lévy 过程是否有下述一致维数结果:

$P(\beta'\dim(E)\leqslant\dim(X(E))\leqslant\beta\dim(E)$对一切$E$成立$)=1$?答案是:上述一致维数上界成立(见[93]),但有反例说明上述一致维数下界不成立. 关于一致维数下界,目前尚未完全解决,现在最好结果当属[95]对暂留的对称 Lévy 过程所证明的结论. 下面我们将证明一般 Lévy 过程的一致 Packing 维数的上界. 为此,我们需

要下述引理，它是[93]之引理3.1和引理3.2的综合物，我们略去其证明.

引理2.7 任意固定 $m\geqslant 1$，令

$\mathscr{C}n=\{[i2^{-n},(i+1)2^{-n}]:i=0,1,\cdots,m2^n-1\}\quad(n\geqslant 1).$

设 β 为 X 的上指标，则对任何 $\alpha>\beta$，存在正整数 k，使得

P(∃ $N\geqslant 1$，当 $n\geqslant N$、$I\in\mathscr{C}_n$ 时 $X(I)$ 能被 k 个半径为 $2^{-n/\alpha}$ 的球覆盖)$=1$.

定理2.3 设 β 为 X 的上指标，则

(1) $P(\mathrm{Dim}(X(E))\leqslant\beta\mathrm{Dim}(E)$ 对一切 E 成立$)=1$；

(2) $P(\dim(X(E))\leqslant\beta\dim(E)$ 对一切 E 成立$)=1$.

证 (1)由 Packing 维数的 σ 稳定性及熟知的事实有：

$$\mathrm{Dim}(E)=\inf\{\sup_n\Delta(E_n):E\subset\bigcup_n E_n\}$$
$$=\inf\{\lim_{n\to\infty}\Delta(E_n):E_n\uparrow E\}$$

其中 $\Delta(E_n)$ 表 E_n 的 Kolmogrov 上熵指数(亦记作 $\overline{\dim}_k(E_n)$)(参见第一章定义4.1)我们只需证明：∀ $m\geqslant 1$，有

$$P(\Delta(X(E))\leqslant\beta\Delta(E)\text{对一切 }E\subset[0,m]\text{成立})=1.\qquad(2.29)$$

∀ $\rho>\Delta(E)$，则对充分小的 ε 有

$$M(\varepsilon,E)<\varepsilon^{-\rho}\qquad(2.30)$$

设 $I_1,\cdots,I_M$ 为 $M(\varepsilon,E)$ 个长度为 ε 的区间，满足 $E\subset\bigcup_i I_i$. 取 n 使得

$$2^{-n-1}<\varepsilon\leqslant 2^{-n}.$$

这样，每个 I_i 至多被包含在 $\mathscr{C}_n$ 中的两个区间中. 由引理2.7，∀ $\alpha>\beta$，对 $a.s.\ \omega$，当 ε 充分小时，每个 $X(I_i)$ 能被$2k$ 个半径为$2^{-n/\alpha}$ $(\leqslant(2\varepsilon)^{1/\alpha})$的球覆盖，再由(2.30)，有

$$M((2\varepsilon)^{1/\alpha},X(E))\leqslant 2kM(\varepsilon,E)\leqslant 2k\varepsilon^{-\rho}.$$

所以

$$\Delta(X(E))=\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{\log M((2\varepsilon)^{1/\alpha},X(E))}{-\log(2\varepsilon)^{1/\alpha}}\leqslant\alpha\rho.$$

因为 $\alpha>\beta$ 和 $\rho>\Delta(E)$ 是任意的，故得(2.29). 这证明了定理2.3

(1).

(2)的证明请见[93]，其基本思路同(1).

对于 Packing 维数，也有类似于[95]的一致维数下界结果，详见[233]. 关于 Lévy 过程的测度函数结果，由于难度很大，目前还似不多见.

§ 3 Lévy 过程逆像集的 Hausdorff 维数

设 $X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x)$ 是$\mathbb{R}^d(d\geqslant 1)$中的 Lévy 过程，指数为 $\psi(z)$，即 X 是具有平稳独立增量的$\mathbb{R}^d$值 Hunt 过程，且

$\mathbf{E}^0(\exp\{i\langle z,X_t\rangle\})=\exp\{-t\psi(z)\}$.

任给紧集 $K\subset\mathbb{R}^d$，定义逆象集如下:

$X^{-1}(K)=\{t\geqslant 0:X_t\in K\}$.

本节的目的是要获得确定 $X^{-1}(K)$ 的 Hausdorff 维数的公式. 逆像集的一种最重要最特殊的情形是 $K=\{x\}$ 为单点集，此时 $X^{-1}(K)=\{t\geqslant 0:X_t=x\}$ 即为过程 X 在 x 点的水平集.

$\forall$ 紧集 $K\subset\mathbb{R}^d$，令

$$\mathscr{M}(K)=\{\mu:\mu \text{ 为支集含于 } K \text{ 的 Radon 测度}\}. \cdots \tag{3.1}$$

再令

$$\beta(K)=\left\{\alpha:\begin{array}{l}0<\alpha\leqslant 1,\exists\ \mu\in\mathscr{M}(K)\text{ 使得}\\ \int \mathrm{Re}[(1+\psi^{\alpha}(z))^{-1}]|\hat{\mu}(z)|^2dz<\infty\end{array}\right\} \tag{3.2}$$

(其中 $\hat{\mu}(z)$表示 μ 的 Fourier 变换. 约定 $\inf\varnothing=1$). 用 $\mathscr{L}_d$ 表示$\mathbb{R}^d$上 Lebesgue 测度. 下面我们分暂留和常返两类情形来考虑.

定理3.1 设 X 是常返的，则对任何紧集 $K\subset\mathbb{R}^d$，有

$$P^x(\dim(X^{-1}(K))=1-\beta(K))=1 \qquad \mathscr{L}_d\text{-a. s. } x\in\mathbb{R}^d. \tag{3.3}$$

证 首先，我们将证明

$$P^x(\dim(X^{-1}(K))\geqslant 1-\beta(K))=1 \qquad (\forall\ x\in\mathbb{R}^d). \tag{3.4}$$

若 $\beta(K)=1$，则上式显然成立. 设 $\beta(K)<1$. 取 $\alpha>0$，满足 $\alpha<1$ 且 $\exists\ \mu\in\mathscr{M}(K)$ 使得

$$\int \mathrm{Re}[(1+\psi^{\alpha}(z))^{-1}]|\hat{\mu}(z)|^2 dz<\infty. \tag{3.5}$$

设 $T_t(\omega')$ 是概率空间 $(\Omega',\mathscr{F}',P')$ 上的 $X_t(\omega)$ 的 α 阶稳定从属过程. 再令

$$Y_t(\omega,\omega')=X_{T_t(\omega')}(\omega),$$

则易验证 $\{Y_t,t\geqslant 0\}$ 是 $(\Omega\times\Omega',\mathscr{F}\times\mathscr{F}',P^x\times P')$ 上的指数为 $\psi^{\alpha}(z)$ 的 Lévy 过程(亦可参见[87]). 记

$$K_\alpha=\{x\in\mathbb{R}^d: P^x\times P'(\exists\ t>0 \text{使得 } Y_t\in K)=1\},$$

并以 K_α^r 表示 K 关于 $\{Y_t\}$ 的正则点集，则有

$$K_\alpha^r\subset K_\alpha.$$

由[93]和(3.5)知 K 不是 $\{Y_t\}$ 的极集，由[73]知 $\{Y_t\}$ 满足 Hunt 的假设(H)(即：每个半极集都是极集)，故 K 不是 $\{Y_t\}$ 的半极集，从而

$$K_\alpha\supset K_\alpha^r\neq\varnothing.$$

$\forall\ y\in K_\alpha$，有

$$P^y\times P'(\exists\ t>0 \text{使得 } X_{T_t}\in K)=1. \tag{3.6}$$

再由 Fubini 定理有

$$P^y(\omega: P'(\omega': T_t(\omega')\in X^{-1}(K)(\omega) \text{对某个 } t>0)=1)=1,$$

从而

$$P^y(\omega: X^{-1}(K)(\omega) \text{不是 } T_t \text{ 的极集})=1.$$

由下面 §4命题4.1知

$$P^y(\omega: \dim(X^{-1}(K))\geqslant 1-\alpha)=1 \quad (\forall\ y\in K_\alpha). \tag{3.7}$$

因为 $K-K_\alpha^r$ 是 $\{Y_t\}$ 的半极集，从而它亦是 $\{Y_t\}$ 的极集，更有 $K-K_\alpha$ 为 $\{Y_t\}$ 的极集. 由(3.6)易见

$$P^y\times P'(\exists\ t>0 \text{使得 } X_{T_t}\in K_\alpha)=1 \quad (\forall\ y\in K_\alpha).$$

任意固定 $y\in K_\alpha$，由[27]知可选取紧集 $K_0\subset K_\alpha$ 满足

$$P^y\times P'(\exists\ t>0 \text{使得 } X_{T_t}\in K_0)>0.$$

因为 $t\to T_t(\omega')$ 是严格增的，由 Fubini 定理知 K_0 不是 $\{X_t,t\geqslant 0\}$ 的极集. 由 X 的常返性，我们有

$$P^x(\exists\ t>0 \text{使得 } X_t\in K_0)=1 \quad (\forall\ x\in\mathbb{R}^d). \tag{3.8}$$

(可参见[39]). 令 $T_{K_0}=\inf\{t>0:X_t\in K_0\}$，由强马氏性及(3.7)有

$$\begin{aligned}&P^x(T_{K_0}<\infty)\\&=P^x[P^{X(T_{K_0})}(\dim(X^{-1}(K))\geqslant 1-\alpha);T_{K_0}<\infty]\\&=P^x[\dim(X^{-1}(K)(\theta_{T_{K_0}}))\geqslant 1-\alpha].\end{aligned} \tag{3.9}$$

但是

$$X^{-1}(K)(\theta_{T_{K_0}})=\{t:X_{T_{K_0}+t}\in K\},$$

故

$$T_{K_0}+X^{-1}(K)(\theta_{T_{K_0}})\subset X^{-1}(K),$$

从而

$$\dim(X^{-1}(K)(\theta_{T_{K_0}}))\leqslant\dim(X^{-1}(K)).$$

再由(3.8)、(3.9)知

$$1=P^x(T_{K_0}<\infty)\leqslant P^x(\dim(X^{-1}(K))\geqslant 1-\alpha). \tag{3.10}$$

在(3.10)中令 $\alpha\downarrow\beta(K)$ 即得(3.4)

下一步我们证明

$$P^x(\dim(X^{-1}(K))\leqslant 1-\beta(K))=1 \quad \mathscr{L}_d\text{-}a.s. \quad x\in\mathbb{R}^d \tag{3.11}$$

若 $\beta(K)=0$，上式为显然. 设 $0<\beta(K)$. 取 $0<\alpha<\beta(K)$，故对任何 $\mu\in\mathscr{M}(K)$，有

$$\int\mathrm{Re}[(1+\psi^\alpha(z))^{-1}]|\hat{\mu}(z)|^2dz=\infty.$$

由§4命题4.2知 K 是 $\{Y_t\}$ 的本性极集，即

$$P^x\times P'\{\exists\ t>0 \text{使得 } X_{T_t}\in K\}=0 \quad \mathscr{L}_d\text{-}a.s. \quad x\in\mathbb{R}^d,$$

从而

$$P^x(\omega:P'(\omega':T_t(\omega')\in X^{-1}(K)(\omega)\text{对某个 } t>0)=0)=1 \quad \mathscr{L}_d\text{-}a.s. \quad x\in\mathbb{R}^d.$$

再由§4命题4.1知

$P^x(\omega:\dim(X^{-1}(K)(\omega))\leqslant 1-\alpha)=1\quad \mathscr{L}_d-a.s.,\quad x\in\mathbb{R}^d.$

在上式中令 $\alpha\uparrow\beta(K)$ 即得(3.11).

附注　若 X 为强Feller过程(这等价于 X 有关于 $\mathscr{L}_d$ 的位势密度),则易验证 $Y_t=X_{T_t}$ 亦有关于 $\mathscr{L}_d$ 的位势密度,从而$\{Y_t\}$的每个本性极集均为极集.在此情形,我们的结论可改进为

$$P^x(\dim(X^{-1}(K))=1-\beta(K))=1,\quad (\forall\, x\in\mathbb{R}^d)\tag{3.12}$$

至于暂留情形,我们有下面定理3.2.先引入几个符号.设 $\beta(K)\leqslant\alpha<1,\alpha>0,T_t$、$Y_t$、$K_\alpha$ 如前定义.令

$$K^*=\begin{cases}\bigcap\limits_{\beta(K)\leqslant\alpha<1}K_\alpha, & 若0<\beta(K)<1\\ \mathbb{R}^d, & 若\beta(K)=1\\ \bigcap\limits_{0<\alpha<1}K_\alpha, & 若\beta(K)=0\end{cases}.$$

定理3.2　设 X 是暂留的且有关于 $\mathscr{L}_d$ 的正的位势密度,则对任何紧集 $K\subset\mathbb{R}^d$,我们有

(Ⅰ) $1-\beta(K)=\operatorname{ess.sup}\limits_{P^x}\dim(X^{-1}(K))\quad(\forall\, x\in\mathbb{R}^d)$;

(Ⅱ) $x\in K^*\Rightarrow P^x(\dim(X^{-1}(K))=1-\beta(K))=1$;

(Ⅲ) $K-K^*$ 是 X 的极集 $\Rightarrow\forall\, x\in\mathbb{R}^d$ 有

$$P^x(\dim(X^{-1}(K))=1-\beta(K)\,|\,T_K<\infty)=1.$$

证　(Ⅰ)因为 X 是暂留的,故平衡原理成立,即对任何暂留集(特别地,相对紧集) $A\exists\,\mu_A$ 使得 $P^x(T_A<\infty)=\int u(x,y)\mu_A(dy)$,其中 μ_A 的支集含于 A,$u(x,y)$ 为位势密度.又因为 $u(x,y)>0$,从而有:

A 为 X 的极集 $\Leftrightarrow\exists\, x\in\mathbb{R}^n$ 使得 $P^x(T_A<\infty)=0$.

注意在定理4.1的证明中常返性的唯一作用在于保证了(3.8)和(3.10),现在我们相应地有

$$P^x(\exists\, t>0使得X_t\in K_\alpha)>0\quad(\forall\, x\in\mathbb{R}^d),\tag{3.8'}$$

$$P^x(\dim(X^{-1}(K))\geqslant 1-\alpha)>0\quad(\forall\, x\in\mathbb{R}^d).\tag{3.10'}$$

由(3.11)的证明知

$$1-\beta(K)\geqslant\dim(X^{-1}(K))\quad P^x\text{-}a.s.\quad(\forall\ x\in\mathbb{R}^d).$$

故为证(Ⅰ)只需证明

$$P^x(\dim(X^{-1}(K))\geqslant\beta_n)>0. \tag{3.13}$$

对满足 $\beta_n<1-\beta(K)$ 且 $\beta_n\uparrow\beta(K)$ 的 β_n 成立即可. 现取 $\beta_n=1-\alpha_n$,其中 $\alpha_n>\beta(K)$,$\alpha_n\downarrow\beta(K)$ 且 $\exists\ \mu_n\in\mathscr{M}(K)$ 使

$$\int\mathrm{Re}[(1+\psi^{\alpha_n}(z))^{-1}]|\hat{\mu}_n(z)|^2dz<\infty.$$

由(3.10)′(用 α_n 代 α)知(3.13)成立.

仿定理3.1的证明可证(Ⅱ),只需用下面的(3.8)″、(3.10)″分别取代(3.8)、(3.10)即可:

$$P^x(\exists\ t>0\text{使得 }X_t\in K_\alpha)=1\quad(\forall\ x\in K^*); \tag{3.8″}$$

$$P^x(\dim(X^{-1}(K))\geqslant1-\alpha)\geqslant1\quad(\forall\ x\in K^*). \tag{3.10″}$$

(Ⅲ) 因为 $K-K^*$ 为 X 的极集且 $X_{T_K}\in K$,故有 $X_{T_K}\in K^*$ P^x-$a.s.$ $(\forall\ x\in\mathbb{R}^d)$. 由(Ⅱ)及强马氏性有

$$\begin{aligned}&P^x(T_K<\infty)\\&\quad=P^x[P^{X(T_K)}(\dim(X^{-1}(K))=1-\beta(K));T_K<\infty]\\&\quad=P^x[\dim(X^{-1}(K)(\theta_{T_K}))=1-\beta(K);T_K<\infty]\\&\quad=P^x[\dim(X^{-1}(K))=1-\beta(K);T_K<\infty],\end{aligned}$$

这证明了(Ⅲ).

我们现在来对两类特殊情形简化 $\beta(K)$.

(1) $K=\{x\}$ 为单点集. 此时 $X^{-1}(K)$ 为 X 在 x 点的水平集. 若 $\mu\in\mathscr{M}(K)=\mathscr{M}(\{x\})$,则必有 $\mu=c\mathbf{1}_A(x)$(c 为常数,$A\in\mathscr{B}^n$),故

$$\hat{\mu}(z)=\int\exp\{i\langle z,y\rangle\}\mu(dy)=c\exp\{i\langle x,z\rangle\},$$

从而

$$\begin{aligned}\beta(K)&=\beta(\{x\})\\&=\inf\left\{\alpha:0<\alpha\leqslant1,\int\mathrm{Re}[(1+\psi^\alpha(z))^{-1}]dz<\infty\right\}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

(2) X 为$\mathbb{R}^1$上的 α 阶($0<\alpha\leqslant 2$)对称稳定过程,其指数为 $\psi(z)=c|z|^\alpha$. 由[181]我们有

$$\exists\ \mu\in\mathscr{M}(K)\ \text{使得}\int \mathrm{Re}[(1+\psi^u(z))^{-1}]\hat{\mu}(z)|^2dz<\infty$$

$$\Leftrightarrow C^1(K)>0$$

其中$C^1(K)$表示K 关于$\mathbb{R}^1$上 αu 阶稳定过程的1-容度. 因为同阶稳定过程有相同的极集,再由[86]知:当 $u<1/\alpha$ 时

$$\dim(K)>1-\alpha u$$

$$\Rightarrow\exists\ \mu\in\mathscr{M}(K)\ \text{使得}\int \mathrm{Re}[(1+\psi^u(z))^{-1}]|\hat{\mathscr{M}}(z)|^2dz<\infty$$

$$\Rightarrow\dim(K)\geqslant 1-\alpha u.$$

由此易知当 $\dim(K)>1-\alpha$ 时有

$$\beta(K)=\inf\{u:0<u\leqslant 1,\dim(K)\geqslant 1-\alpha u\}$$
$$=(1-\dim(K))/\alpha. \tag{3.15}$$

本节主要取材于[147]. 关于 Lévy 过程逆像集的 Packing 维数、一致维数和测度函数方面的结果似未见报道.

§4 相关问题

在求 Hausdorff 维数的各种方法中,位势论的方法是很有特色的,Frostman 定理就是用经典的 Riesz 位势的方法来确定集合的 Hausdorff 维数. 现在自然要问,概率势论在确定 Hausdorff 维数的研究中能否助一臂之力呢?答案是肯定的,比如,我们有下面的

命题4.1 设 X 为$\mathbb{R}^1$上的 α 阶稳定过程($\alpha<1$),则

B 为 X 的极集$\Rightarrow\dim(B)\leqslant 1-\alpha$;

B 不是 X 的极集$\Rightarrow\dim(B)\geqslant 1-\alpha$.

证 因为同阶稳定过程有相同的极集,故不妨设 X 为 α 阶对称稳定过程. 此时 X 的位势密度 $u(x,y)\triangleq\int_0^\infty p_t(x,y)dt=$

$\frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}}$，这恰为$1-\alpha$阶 Riesz 位势密度. 由概率势论熟知的结果：B 为 X 的极集$\Leftrightarrow B$（关于 X）的容度为0（即 $C_{1-\alpha}(B)=0$），再由 Frostman 定理即得命题4.1.

极集是个很重要的概念. 怎样判别一般 Lévy 过程的极集呢？我们有下面的命题4.2. 回忆一下，集合 B 称为 X 的本性极集，如果

$$P^x(\exists\ t>0 \text{使得 } X_t\in B)=0, \mathscr{L}_1\text{-}a.s.\ x\in\mathbb{R}^1.$$

显然极集为本性极集. 若 X 有关于 Lebesgue 测度的位势密度，则本性极集为极集.

命题4.2 B 不是$\mathbb{R}^d$中 Lévy 过程 X 的本性极集的充要条件是存在支撑含于 B 的测度 μ 使得对某个 $\lambda>0$有

$$(2\pi)^{-d}\int \mathrm{Re}[(\lambda+\psi(z))^{-1}]|\hat{\mu}(z)|^2dz<\infty$$

（其中 $\psi(z)$为 X 的指数，$\hat{\mu}(z)$表示 μ 的 Fourier 变换）.

我们略去此命题的证明，有兴趣的读者可参见[92]

关于 Lévy 过程 X 的值域，还可以提如下问题：在什么条件下 $X([0,\infty))$有正的 Lebesgue 测度？在什么条件下 $X([0,\infty))$含有内点？对前一个问题，有如下更强的结果（证明见[56]）：

命题4.3 设 X 为实值 Lévy 过程，指数为 ψ. 则下列陈述等价：

(1) $\forall$ Borel 可测函数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}^1$，有

$P((X+f)([0,\infty))$有正 Lebesgue 测度$)=1$；

(2) $\forall$ Borel 可测函数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}^1$，有

$P((X+f)([0,\infty))$有正 Lebesgue 测度$)>0$；

(3) $\int[1+\mathrm{Re}\psi(z)]^{-1}dz<\infty$.

关于上述第二个问题，在把“值域”的概念稍拓宽一点后，[8]证明了：$\hat{X}([0,\infty))$不是包含区间就是无处稠密集，其中 $\hat{X}([0,\infty))$是拓广了的值域，即

$\hat{X}([0,\infty))=\{X_0\}\cup\{X_t,X_{t-}:t>0\}$的闭包.

Lévy 过程图集的研究本质上不会有新的困难和新的内容，这是因为$\mathbb{R}^d$中 Lévy 过程 X_t 的图集即为$\mathbb{R}^{d+1}$中 Lévy 过程(t,X_t)的像集，且当 X_t 的指数为 $\psi(z)$时(t,X_t)的指数为 $\psi(z)-iz'$.

关于 Lévy 过程 k 重点的研究，其存在性已大体解决(见下面命题4.4)，但 k 重点集的维数结果，还不多见.

命题4.4 设 X 为$\mathbb{R}^d$中 Lévy 过程.

(1) 若 X 有转移密度 $p_t(x)$，且$\exists$ ε、$T>0$使得

$$\int_{|x|\leqslant\varepsilon}\left(\int_0^T p_t(x)dt\right)^k dx<\infty,$$

$$\int_0^T p_t(0)dt>0,$$

则 k 重点集 $L_k\neq\varnothing$ a.s..

(2) 若 X 存在位势密度 $v^\alpha(x)$，且$\exists$ $\varepsilon>0$使得

$$\int_{|x|\leqslant\varepsilon}(v^\alpha(x))^k dx<\infty,$$

$$v^\alpha(0)>0,$$

则 k 重点集 $L_k\neq\varnothing$ a.s..

上述命题的证明可见[55,142].

Lévy 过程确切测度函数方面的结果目前还很少.

第五章

自相似随机过程的随机分形

§1 自相似马氏过程的定义及基本性质

自相似马氏过程是一类很重要的随机过程，有不少文献涉及这方面的研究（如[135,136,214]）. 在这一章前半部分，我们研究正半轴上自相似马氏过程的随机分形集的 Hausdorff 维数和 Packing 维数. 我们先给出自相似马氏过程的定义.

定义1.1 设 $X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x)$ 是以 $\mathbb{R}_+^1$ 为状态空间的 Hunt 过程，其转移函数为 $P_t(x,A)$. 称 X 为 α 阶($\alpha>0$)的自相似马氏过程，如果

$$P_t(x,A)=P_{at}(a^\alpha x,a^\alpha A)\quad(\forall\ a>0,x>0,A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+^1))\tag{1.1}$$

显然，(1.1)等价于：对任何 $a>0,x>0,\{X_t,t\geqslant0\}$ 在 P^x 下的分布等于 $\{a^{-\alpha}X_{at},t\geqslant0\}$ 在 $P^{a^\alpha x}$ 下的分布. 不难看出，若 $\{Y_t,t\geqslant0\}$ 为 β 阶严稳定过程，则它为 β^{-1} 阶自相似马氏过程. 如果自相似马氏过程又是 Lévy 过程，则它必为严稳定过程（参见[135]）.

从现在起，在本章前四节中我们总设 $X=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,X_t,\theta_t,P^x)$ 是 $(0,\infty)$ 上的 $\alpha>0$ 阶自相似马氏过程，且总令：

$$\varphi_t(\omega)=\int_0^t[X_s(\omega)]^{-\frac{1}{\alpha}}ds\quad(t\geqslant0),\tag{1.2}$$

则易见 $t\to\varphi_t(\omega)$ 在 $[0,\infty)$ 上是连续的和严格增的. Lamperti 在

[135]中证明了$\forall\ x>0$有$P^x(\lim\limits_{t\to\infty}\varphi_t=\infty)=1$. 这样,我们不妨假设$\lim\limits_{t\to\infty}\varphi_t(\omega)=\infty$对每个$\omega\in\Omega$成立. 令$T_t=T_t(\omega)$是$t\to\varphi_t(\omega)$的反函数,则$t\to T_t(\omega)$也是连续的、严格增的,且满足

$$t=\int_0^{T_t}X_s^{-\frac{1}{\alpha}}ds,(t\geqslant 0).$$

用概率势论的语言来讲,$\{\varphi_t,t\geqslant 0\}$是$X$的严格增的可加泛函,而$\{T_t,t\geqslant 0\}$则是它的逆,从而作时间替换得到的过程$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_{T_t},X_{T_t},\theta_{T_t},P^x)$也为Hunt过程. 现在我们定义一个新过程和概率测度族如下:

令

$$Y_t(\omega)=\log X_{T_t(\omega)}(\omega)\quad(t\geqslant 0,\omega\in\Omega); \tag{1.3}$$

$$Q^x=P^{e^x}\quad(x\in(-\infty,\infty)). \tag{1.4}$$

引理1.1 过程$Y=(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_{T_t},Y_t,\theta_{T_t},Q^x)$是以$(-\infty,\infty)$为状态空间的$B.G.$意义下的Lévy过程,其转移函数为

$$\begin{aligned}Q_t(x,A)&=P^{e^x}(X_{T_t}\in e^A)\\&=Q^x(Y_t\in A)\quad(t\geqslant 0,x\in\mathbb{R}^1,A\in\mathscr{B}^1)\end{aligned} \tag{1.5}$$

(其中$e^A=\{e^y:y\in A\}$).

这个引理实际上是[135]的主要结论. 由于它的证明涉及到较细致的马氏过程的知识而与分形理论无关,我们略去其证明. 有兴趣的读者可以参见[135].

由引理1.1$\{Y_t,t\geqslant 0\}$在Q^0下的特征函数必形如$\exp\{-t\psi(z)\}$,其中

$$\psi(z)=iaz+\frac{1}{2}\sigma^2z^2+\int[1-e^{ixz}+\frac{ixz}{1+x^2}]\upsilon(dx) \tag{1.6}$$

(这里$a\in\mathbb{R}^1$、$\sigma^2\geqslant 0$为常数,υ是$\mathscr{B}^1$上Borel测度且满足

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}\upsilon(dx)<\infty.$$

换句话说,$\psi(z)$是Lévy过程Y的指数而υ为它的Lévy测度)(见第四章§1). 由(1.4)即得

$$e^{-t}\mathbf{E}^1(\exp\{iz\log X_{T_t}\})=\exp\{-t[\psi(z)+1]\},t\geqslant 0.$$

($\mathbf{E}^x$ 是对应于概率测度 P^x 下的期望算子).

再由 Fubini 定理我们得到

$$[\psi(z)+1]^{-1}=\mathbf{E}^1\left[\int_0^\infty e^{-\varphi(s)}X_s^{iz-\frac{1}{\alpha}}ds\right] \tag{1.7}$$

§ 2　像集的维数

对 $B\subset[0,\infty)$，我们令

$X(B)=X(B)(\omega)=\{x\in(0,\infty):\exists\ t\in B$ 使得 $x=X_t(\omega)\}$，

$\varphi(B)=\varphi(B)(\omega)=\{x\in[0,\infty):\exists\ t\in B$ 使得 $x=\varphi_t(\omega)\}$，

$e^B=\{e^x:x\in B\}$.

引理2.1　设 $B\subset[0,\infty)$，则

$$\dim(X(B))=\dim(Y[\varphi(B)]). \tag{2.1}$$

证　由 T_t 的定义有

$$\begin{aligned}X(B)&=\{x:\exists\ t\in B \text{ 使得 } x=X_t\}\\&=\{x:\exists\ s\in\varphi(B)\text{使得 } x=X_{T_s}\}\\&=\{x:\exists\ s\in\varphi(B)\text{使得 } x=e^{Y_s}\}\\&=e^{Y[\varphi(B)]},\end{aligned} \tag{2.2}$$

故有

$$\dim(X(B))=\dim(e^{Y[\varphi(B)]}). \tag{2.3}$$

$\forall\ n\geqslant 1$，由于 $x\to e^x$ 为$[0,n]$上双 Lipschitz 函数，我们有

$$\dim(e^{Y[\varphi(B)]\cap[0,n]})=\dim(Y[\varphi(B)]\cap[0,n]).$$

再由 Hausdorff 维数的 σ 稳定性知：

$$\dim(e^{Y[\varphi(B)]})=\dim(Y[\varphi(B)]).$$

由上式及(2.3)知(2.1)成立.

设 β 为 Y 的上指标，即

$$\beta=\inf\{u\geqslant 0:|z|^u|\psi(z)|\to 0(|z|\to\infty)\} \tag{2.4}$$

(其中 $\psi(z)$ 由(1.7)确定). 由第四章 § 2知$0\leqslant\beta\leqslant 2$. 如果 X 是非

降过程，则 Y 的轨道亦非降，从而 Y 是从属过程. 在此情形，我们用 σ 表示 Y 的下指标，即

$$\sigma=\liminf_{\lambda\to\infty}\log g(\lambda)/\log\lambda, \tag{2.5}$$

其中 $g(\lambda)$ 为 Y 的从属指数：$e^{-tg(\lambda)}=\mathbf{E}^1(e^{-\lambda Y_t})$. 用类似于证明(1.7)的方法可得：

$$g(\lambda)^{-1}=\mathbf{E}^1\left[\int_0^\infty X_s^{(\lambda+\frac{1}{\alpha})}ds\right]. \tag{2.6}$$

此时 $0\leqslant\sigma\leqslant\beta\leqslant1$(见第四章命题2.1). 第三个指标 γ 定义为

$$\gamma=\sup\left\{u\geqslant0:\lim_{a\to0}a^{-u}\mathbf{E}^1\left[\int_0^{T_1}\mathbf{1}_{[0,a]}(|\log X_s|)X_s^{-\frac{1}{\alpha}}ds\right]=0\right\} \tag{2.7}$$

下面是本节的主要结论之一.

定理2.1 (1) 我们总有

$P^x(\dim(X(B))\leqslant\min(\beta\dim(B),1)$ 对一切 B 成立$)=1$,

$(x>0)$. (2.8)

(2) 如果 X 是非降的，则有

$P^x(\sigma\dim(B)\leqslant\dim(X(B))\leqslant\beta\dim(B)$ 对一切 B 成立$)=1$,

$(x>0)$. (2.9)

(3) 设 $R=X([0,\infty))$ 为 X 的值域，则

$P^x(\dim(R)=\gamma)=1,(\forall\ x>0)$. (2.10)

(4) 如果 X 是连续且非退化，则 $\forall\ x>0,B\in\mathscr{B}([0,\infty))$，有

$P^x(\dim(X(T(B)))=\min(2\dim(B),1))=1$.

证 $\forall\ x\in\mathbb{R}^1$，易见 $\hat{Y}\triangleq\{Y_t-x,t\geqslant0\}$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},Q^x)$ 上平稳独立增量过程，满足 $Q^x(Y_0-x=0)=1$，且其指数也为 $\psi(z)$. 因为 Hausdorff 维数是平移不变的，故 $\forall\ B\subset[0,\infty)$ 有 $\dim(Y(B))=\dim(\hat{Y}(B))$.

(1) 由第四章定理2.3，有

$Q^x(\dim(Y(B))\leqslant\beta\dim(B)$ 对一切 B 成立$)=1(x\in\mathbb{R}^1)$.

再由引理2.1知

$P^{e^x}(\dim(X(B))\leqslant\beta\dim(\varphi(B))$ 对一切 B 成立$)=1$

$(x\in\mathbb{R}^1)$. (2.12)

由 X 的拟左连续性可得(注意 $X_t(\omega)>0$):

$$\inf\{X_u:0\leqslant u\leqslant n\}>0,(\forall\ n<\infty).\quad a.s. \tag{2.13}$$

事实上,谬设(2.13)不成立. 则以正概率存在 $u_k=u_k(\omega)$ 使

$$u_k\in[0,n],X_{u_k}\in(0,\frac{1}{k}]\quad(\forall\ k\geqslant1).$$

令

$$\tau_k=\inf\{t\geqslant0:X_t\in(0,\frac{1}{k}]\}\quad(k\geqslant1),$$

则 $\{\tau_k,k\geqslant1\}$ 是单增停时列,且以正概率 $\tau_k\in[0,n](\forall\ k\geqslant1)$,令

$$\tau=\lim_{k\to\infty}\tau_k,$$

显然 τ 是停时,且以正概率 $\tau\in[0,n]$. 由 X 的拟左连续性有

$$X_\tau=\lim_{k\to\infty}X_{\tau_k}=0,a.s.\ on\{\tau<\infty\}$$

这与 $X_t>0\quad(\forall\ t\geqslant0)$ 矛盾,所以,(2.13)成立.

由(1.2)和(2.13)知 $a.s.\ t\to\varphi_t$ 在$[0,n]$上是 Lipschitz 连续的,故

$$\begin{aligned}\dim(\varphi(B))&=\lim_{n\to\infty}\dim(\varphi[B\cap[0,n]))\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\dim(B\cap[0,n])=\dim(B),\ a.s.\end{aligned}$$

由此式及(2.12)知(2.8)成立.

(2) 若 X 是非降的,则 $\hat{Y}$ 为$(\Omega,\mathscr{F},Q^x)$上的从属过程,其从属指数为 $g(\lambda)$(由(2.6)确定). 根据第四章§1结果(或见[93]),我们有

$$Q^x(\sigma\dim(B)\leqslant\dim(Y(B))\leqslant\beta\dim(B)\text{对一切 }B\text{ 成立})=1$$

$(x\in\mathbb{R}^1)$. (2.14)

因为 $t\to X_t$ 非降,由(1.2)知 $t\to\varphi_t$ 在$[0,n]$上是双方 Lipschitz 连续的,故有

$$\begin{aligned}\dim(\varphi(B))&=\lim_{n\to\infty}\dim(\varphi(B\cap[0,n]))\\&=\lim_{n\to\infty}\dim(B\cap[0,n])=\dim(B).\end{aligned}\tag{2.15}$$

由引理2.1,(2.14)和(2.15)即得(2.9).

(3) 由第四章定理2.2知

$$Q^x(\dim(Y([0,\infty)))=\gamma')=1 \quad (x\in\mathbb{R}^1),$$

其中

$$\gamma' \triangleq \sup\left\{u>0:\lim_{a\to 0} a^{-u}Q^x\left[\int_0^1 \mathbf{1}_{[0,a]}(|Y_t-x|)dt\right]=0\right\}$$

$$=\sup\left\{u>0:\lim_{a\to 0} a^{-u}\int_0^1 Q^0(\mathbf{1}_{[0,a]}(|Y_t|))dt=0\right\}.$$

由(2.7)易知 $\gamma'=\gamma$. (2.10)获证.

(4) 因为 X 是连续的非退化的，故 Y 亦是连续的非退化的，从而 Y 必是可能一个带漂移的 Brown 运动(即 Y 的 Lévy 测度 $\upsilon=0$，指数 $\psi(z)=ibz+\frac{1}{2}\sigma^2z^2$，其中 $\sigma^2>0$)，因此 Y 为一个2阶稳定过程. 由第三章定理3.2知

$$Q^x(\dim(Y(B))=\min(2\dim(B),1))=1,(x\in\mathbb{R}^1,$$
$$B\in\mathscr{B}([0,\infty)))$$

由引理2.1知(2.11)获证.

下面定理给出了 *Packing* 维数的结果.

定理2.2 (1) 我们有 $P^x(\mathrm{Dim}(X(B))\leqslant\min(\beta\mathrm{Dim}B,1)$ 对一切 B 成立$)=1(\forall\ x>0)$. (2.16)

(2) 设 $R=X([0,\infty))$，则

$$P^x(\mathrm{Dim}(R)=\gamma)=1(\forall\ x>0). \tag{2.17}$$

(3)若 X 是非降的，则

$P^x(\sigma\mathrm{Dim}(B)\leqslant\mathrm{Dim}(X(B))\leqslant\beta\mathrm{Dim}(B)$ 对一切 B 成立$)=1$ $(\forall\ x>0)$. (2.18)

证 由 Packing 维数的 σ 稳定性及在双 Lipschitz 变换下的不变性，考察引理2.1的证明即知：

$$\mathrm{Dim}(X(B))=\mathrm{Dim}(Y[\varphi(B)]). \tag{2.19}$$

沿用定理2.1证明中的符号，有

$$\mathrm{Dim}(Y(B))=\mathrm{Dim}(\hat{Y}(B)). \tag{2.20}$$

由第四章定理2.3知

$Q^x(\mathrm{Dim}(Y(B))\leqslant\beta\mathrm{Dim}(B)$ 对一切 B 成立$)=1$,

$(\forall\ x\in\mathbb{R}^1)$ (2.21)

从而,由(2.19)、(2.21)有

$$P^{e^x}(\mathrm{Dim}(X(B))\leqslant\beta\mathrm{Dim}(\varphi(B))\text{对一切 }B\text{ 成立})=1,$$

$(\forall\ x\in\mathbb{R}^1)$. (2.22)

再由 $t\to\varphi_t$ 在$[0,n]$上的 Lipschitz 连续性,有

$$\mathrm{Dim}(\varphi(B))=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Dim}(\varphi(B\cap[0,n]))$$
$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\mathrm{Dim}(B\cap[0,n])=\mathrm{Dim}(B).$$

由此不等式及(2.22)知(2.16)获证.

(2.17)和(2.18)仿定理2.1(3)、(2)的证明即得.

§3 图集和水平集的 Hausdorff 维数

$\forall\ B\subset[0,\infty)$,令

$$\mathrm{Gr}(B)=\{(t,X_t):t\in B\},$$

称之为 B 在 X 下的图集. 在这一节中我们将总假设

$$\sup\{X_u:a\leqslant u\leqslant b\}<\infty\quad(\forall\ 0<a<b<\infty).\tag{3.1}$$

显然,若 X 连续、或者非降、或者非增,则(3.1)成立.

引理3.1 设 Y_t、φ_t、$\varphi(B)$如前. 则对任何 $B\subset[0,\infty)$,有

$$\dim(G_r(B))=\dim(\{(s,y_s):s\in\varphi(B)\}).\tag{3.2}$$

证 首先有

$$\mathrm{Gr}(B)=\{(t,X(T_{\varphi_t})):t\in B\}$$
$$=\{(t,\exp\{Y_{\varphi_t}\}):t\in B\}.\tag{3.3}$$

易验证 $f(x,y)=(y,e^x)$为$\mathbb{R}^1_+\times[-n,n]$上的双 Lipschitz 变换$(\forall\ n>0)$,从而

$$\dim(f(\Lambda))=\dim(\Lambda)\quad(\forall\ \Lambda\subset\mathbb{R}^1_+\times\mathbb{R}^1).\tag{3.4}$$

由(3.3)和(3.4)得

$$\dim(\mathrm{Gr}(B))=\dim(\{(t,Y_{\varphi_t}):t\in B\})$$
$$=\dim(\{(T_s,Y_s):s\in\varphi(B)\}).\tag{3.5}$$

由(2.13)、(3.1)及(1.2)知 φ_s 在$[\frac{1}{n},n]$上是双 Lipschitz 连续的，从而 T_t 也是$[\frac{1}{n},n]$上的双 Lipschitz 变换(因为 T_t 为 φ_s 的逆). 这样即知 $g(x,y)=(x,T_y)$在$\mathbb{R}^1\times[\frac{1}{n},n]$上是双 Lipschitz 连续的. 由熟知的极限手法即得

$$\dim(\{(T_s,Y_s):s\in\varphi(B)\})$$
$$=\dim(\{(s,Y_s):s\in\varphi(B)\})\quad(\forall\ B\subset[0,\infty)).\tag{3.6}$$

(3.2)得证.

由 Lévy 过程的基本性质即得下面的

引理3.2　$\forall\ x\in\mathbb{R}^1,\hat{Y}_x\triangleq\{(s,Y_s)-(0,x):s\geq 0\}$是$(\Omega,\mathscr{F},Q^x)$上取值于$\mathbb{R}^2$的具有平稳独立增量的过程，其指数为 $\psi(z_1)-iz_2$，满足 $Q^x((0,Y_0)-(0,x)=0)=1$.

令 $\hat{Y}=\{(s,Y_s):s\geq 0\}$. 在(3.1)的假设下由(3.2)即知

$$\dim(\mathrm{Gr}(B))=\dim(\hat{Y}(\varphi(B)))$$
$$=\dim(\hat{Y}_x(\varphi(B)))\quad(\forall\ x、B).\tag{3.7}$$

定理3.1　我们有

(1) $P^x(\dim(\mathrm{Gr}(B))\leq\hat{\beta}\dim B$ 对一切 B 成立$)=1,(\forall\ x>0)$

其中 $\hat{\beta}$ 定义如下：

$$\hat{\beta}=\inf\left\{u\geq 0:\frac{|\psi(z_1)-iz_2|}{|(z_1,z_2)|^u}\to 0(|(z_1,z_2)|\to\infty)\right\}$$

(2) $P^x(\dim(\mathrm{Gr}([0,\infty)))=\hat{\gamma})=1,(\forall\ x>0)$,

其中 $\hat{\gamma}$ 由下式定义：

$$\hat{\gamma}=\sup\left\{u\geq 0:\begin{array}{l}\lim\limits_{a\to 0}a^{-u}\mathbf{E}^1\Big[\int_0^{T_1}\mathbf{1}_{[0,a^2]}[(\log X_s)^2\\ \qquad+(\varphi_s)^2]X_s^{-\frac{1}{\alpha}}ds\Big]=0\end{array}\right\}.\tag{3.9}$$

(3)若 X 是连续的且非退化，则

$$P^x(\dim(\mathrm{Gr}(B))\leq 2\dim(B)\text{对一切 }B\text{ 成立})=1,(\forall\ x>0),\tag{3.10}$$

且

$$P^x(\dim(\mathrm{Gr}([0,\infty)))=\frac{3}{2})=1,(\forall\ x>0). \tag{3.11}$$

证 (1) 由第四章定理2.3知

$$Q^x(\dim(\hat{Y}_x(\varphi(B)))\leqslant\hat{\beta}\dim(\varphi(B))\text{对一切 }B\text{ 成立})=1,$$

$(\forall\ x\in\mathbb{R}^1)$

由 φ_t 在$[\frac{1}{n},n]$上的双 Lipschitz 连续性知 $\dim(\varphi(B))=\dim(B)$，从而由(3.7)即得(1).

(2)由第四章定理2.2我们知

$$Q^x(\dim(\hat{Y}_x([0,\infty)))=\hat{\gamma}')=1\quad(\forall\ x\in\mathbb{R}^1).$$

其中

$$\hat{\gamma}'\triangleq$$

$$\sup\left\{u\geqslant 0:\lim_{a\to 0}a^{-u}Q^x\left[\int_0^1\mathbf{1}_{B(0,a)}((t,Y_t)-(0,x))dt\right]=0\right\}$$

$$=\sup\left\{u\geqslant 0:\lim_{a\to 0}a^{-u}\int_0^1 Q^0[\mathbf{1}_{B(0,a)}((t,Y_t))]dt=0\right\}$$

$$\doteq\sup\left\{u\geqslant 0:\lim_{a\to 0}a^{-u}\mathbf{E}^1\left[\int_0^{T_1}\mathbf{1}_{B(0,a)}((\varphi_s,\log X_s))X_s^{-\frac{1}{\alpha}}ds\right]=0\right\}.$$

这恰好等于 $\hat{\gamma}$，从而(2)获证.

(3) 在此情形我们已经知道必有

$$\psi(z_1)=\exp\left\{ibz_1+\frac{\sigma^2}{2}z_1^2\right\},$$

其中 $\sigma^2>0$. 由上式不难算出 $\hat{\beta}=2$，从而得(3.10).

由第三章定理4.4知

$$Q^x(dim(G_{Y_x})=\frac{3}{2})=1,$$

其中

$$G_{Y_x}=\{(t,Y_t-x):t\geqslant 0\}.$$

是过程 $Y_x=\{Y_t-x,t\geqslant 0\}$ 的图集(注意 Y_x 是$(\Omega,\mathscr{F},Q^x)$上2阶稳定过程，其指数为 $\psi(z)=ibz+\frac{\sigma^2}{2}z^2$). 显然，$\dim(G_{Y_x})=\dim(G_{Y_0})$.

由(3.2)我们有

$$\dim(\mathrm{Gr}([0,\infty)))=\dim(G_{Y_0}),$$

从而

$$Q^x(\dim(\mathrm{Gr}([0,\infty)))=\frac{3}{2})=1,(\forall\ x\in\mathbb{R}^1).$$

这证明了(3.11).

下面我们考虑水平集的 Hausdorff 维数. 令

$$Z(x)=\{t\geqslant 0:X_t=x\},(\forall\ x>0);$$

$$\hat{Z}(x)=\{t\geqslant 0:Y_t=x\},(\forall\ x\in\mathbb{R}^1).$$

引理3.3 恒有

$$\dim(Z(x))=\dim(\hat{Z}(\log x)),(\forall\ x>0). \tag{3.12}$$

证 $T(\hat{Z}(\log x))=T(\{s\geqslant 0:Y_s=\log x\})$

$=T(\{s\geqslant 0:X_{T_s}=x\})$

$=\{t\geqslant 0:X_t=x\}=Z(x)=\{T_s:0\leqslant s,X_{T_s}=x\}.$

又因为在$[\frac{1}{n},n]$上 T_t 是双 Lipschitz 连续的,故

$$\dim(Z(x))=\dim(T(\hat{Z}(log x)))$$

$$=\dim(\hat{Z}(\log x)).$$

我们对 X 定义指标 $b=b(X)$ 如下:

$$\frac{1}{b}=\inf\{u\leqslant 1:[1+\mathrm{Re}(\psi^u)]^{-1}\in L^1(\mathbb{R}^1)\}, \tag{3.13}$$

(约定 $\inf\varnothing=1$).

定理3.2 我们有

$$P^x(\dim(Z(x))=1-\frac{1}{b})=1,(\forall\ x>0). \tag{3.14}$$

证 我们已经知道,$\forall\ x\in\mathbb{R}^1,Y_x=\{Y_t-x:t\geqslant 0\}$是$(\Omega,\mathscr{F},Q^x)$上的无穷可分过程,其指数为$\psi(z)$且满足 $Q^x(Y_t-x=0)=1$. 显然 $\hat{Z}(x)$等于Y_x 的水平集 $Z_x(0)$. 由第四章(3.14),有

$$Q^x(\dim(\hat{Z}(x))=1-\frac{1}{b})=1,(\forall\ x\in\mathbb{R}^1). \tag{3.15}$$

由(3.12)及(3.15)即得(3.14).

§4 自相似马氏过程的其他相关结果

我们已经知道，Lévy 过程的位势理论与它的分形理论有密切关系，尤其是 Lévy 过程的极集与其 Hausdorff 维数直接相关（见第四章§4.）. 在这一节中，我们将看到自相似过程的值域有正 Lebesgues 测度的充要条件是它的出发点是本性极集.

引理4.1 $\forall\ A\subset\mathbb{R}^1$，有

$$\mathscr{L}(A)>0\Leftrightarrow\mathscr{L}(e^A)>0. \tag{4.1}$$

其中 $\mathscr{L}(\cdot)$ 表示$\mathbb{R}^1$上的 Lebesgue 测度.

证 $\mathscr{L}(e^A)=\int\mathbf{1}_{e^A}(x)dx$

$$=\int\mathbf{1}_A(\log x)dx=\int\mathbf{1}_A(y)e^y dy$$

由此即得(4.1).

定理4.1 设 X、Y、$\psi(z)$ 如第一节所述. 下列陈述等价：

(1) $$\int_{\mathbb{R}^1}\mathrm{Re}[(1+\psi(z))^{-1}]dz<\infty, \tag{4.2}$$

(2) $$P^x(\mathscr{L}(X([0,\infty)))>0)=1,(\forall\ x>0), \tag{4.3}$$

(3) $$P^x(\mathscr{L}(X([0,\infty)))>0)>0,(\exists\ x>0). \tag{4.4}$$

证 $\forall\ x>0,\exists\ y\in\mathbb{R}^1$使得 $x=e^y$. 因为 $Y_y=\{Y_t-y,t\geqslant0\}$是$(\Omega,\mathscr{F},Q^y)$上的无穷可分过程，其指数为 $\psi(z)$，由第四章命题4.3，知(4.2)和下面条件中任何一条等价：

$$Q^y(\mathscr{L}(Y_y([0,\infty)))>0)=1, \tag{4.5}$$

$$Q^y(\mathscr{L}(Y_y([0,\infty)))>0)>0. \tag{4.6}$$

显然，$\mathscr{L}(Y_y([0,\infty)))=\mathscr{L}(Y([0,\infty)))$，且由(2.2)知

$$X([0,\infty))=e^{Y([0,\infty))}$$

这样，(4.2)和下列陈述等价：

$$P^x(\mathscr{L}(X([0,\infty)))>0)=1, \tag{4.5$'$}$$

$$P^x(\mathscr{L}(X([0,\infty)))>0)>0. \tag{4.6$'$}$$

这证明了定理5.1.

令

$$T_x=\inf\{t>0:X_t=x\},$$
$$\hat{T}_y=\inf\{t>0:Y_t=y\}.$$

则易见

$$\hat{T}_y<\infty \Leftrightarrow T_{e^y}<\infty,(\forall\ y\in\mathbb{R}^1), \tag{4.7}$$

从而$\forall\ y\in\mathbb{R}^1$，有

$\{y\}$是Y的本性极集

$\Leftrightarrow\{e^y\}$是X的本性极集　(4.8)

由(4.8)及第四章命题4.2有

推论4.1　(4.2)、(4.3)、(4.4)都等价于：

$\forall\ x>0$，$\{x\}$不是X的本性极集.

关于暂留性和常返性，[234]证明了

定理4.2　设X、φ_t如第一节所述，则

(1) X为暂留的充要条件是

$$\int_{|\theta|\leqslant 1}\mathrm{Re}\left\{\left[\mathbf{E}^1\left(\int_0^\infty \exp\{-\varphi_t\}X_t^{i\theta-\frac{1}{\alpha}}dt\right)\right]^{-1}-1\right\}^{-1}d\theta<\infty; \tag{4.9}$$

(2) X为常返的充要条件为

$$\int_{|\theta|\leqslant 1}\mathrm{Re}\left\{\left[\mathbf{E}^1\left(\int_0^\infty \exp\{-\varphi_t\}X_t^{i\theta-\frac{1}{\alpha}}dt\right)\right]^{-1}-1\right\}^{-1}d\theta=\infty. \tag{4.10}$$

[234]还给出了X的k重点存在的两个充分条件，并得到了k重时之Hausdorff维数的下界估计. 利用第四章§3关于Lévy过程逆像集的维数结果，[234]给出了确定X之逆像集的Hausdorff维数的公式. 关于自相似过程的一致维数结果和测度函数结果还未见到. 另外，关于一般的$\mathbb{R}^d$中的自相似过程(定义完全类似于定义1.1，只需用$\mathbb{R}^d$替换$\mathbb{R}^1_+$即可)，其位势理论的研究有不少新进展(见[79,80,215])，但其分形性质的研究还未见报道.

§5. 一般自相似过程的基本性质

在前几节中，我们研究了自相似马氏过程的分形性质，下面我们将研究另一类重要的自相似过程——具有平稳增量的自相似过程——的分形性质. 这是目前研究得最多的两类自相似过程. 在这一节中，我们先给出一般自相似过程的定义及基本性质. 下面谈及的随机过程均是某个固定的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可分的非退化的随机过程.

定义5.1　设$H\in\mathbb{R}^1$. 称$\mathbb{R}^d$值随机过程$\{X_t,t\geqslant0\}$是H-自相似的，如果

$$\forall\ a>0,\{X_{at},t\geqslant0\}\overset{d}{=}\{a^HX_t,t\geqslant0\}. \tag{5.1}$$

其中$\overset{d}{=}$表示左右两个随机过程具有相同的有限维联合分布.

若$H\neq0$，则任何H-自相似过程$\{X_t,t\geqslant0\}$必满足：$X_0=0$ a.s. . 事实上，$\forall\ a>0$，由定义5.1知X_0与a^HX_0有相同的分布. 由此即知$X_0=0$　a.s. .

下面命题告诉我们H－自相似过程和平稳过程之间有着一一对应.

命题5.1　设$H\neq0$，则$\{X_t,t\geqslant0\}$是H-自相似过程的充要条件是存在平稳过程$\{Y_s,-\infty<s<\infty\}$使得

$$X_t=t^HY_{\log t},(t>0). \tag{5.2}$$

证　设$\{X_t,t\geqslant0\}$为H-自相似过程，令

$$Y_s=e^{-sH}X_{e^{-s}}.$$

由$\{X_t\}$的自相似性有

$$\begin{aligned}&(Y_{s_1+h},\cdots,Y_{s_n+h})\\&=(e^{-(s_1+h)H}X_{e^{s_1+h}},\cdots,e^{-(s_n+h)H}X_{e^{s_n+h}})\\&\overset{d}{=}(e^{-s_1H}X_{e^{s_1}},\cdots,e^{-s_nH}X_{e^{s_n}})\\&=(Y_{s_1},\cdots,Y_{s_n}).\end{aligned}$$

这意味着$\{Y_s\}$是平稳过程.

反过来,设$\{Y_s,-\infty<s<\infty\}$为平稳过程使得$X_t=t^H Y_{\log t}$,按定义5.1可直接验证$\{X_t\}$为H-自相似过程.

命题5.2 设$\{X_t,t\geqslant 0\}$为H-自相似过程,则$\{X_t,t\geqslant 0\}$在0点随机连续的充要条件是$H>0$.此处在0点随机连续是指:

$$\forall\ \varepsilon>0,\lim_{t\to 0}P(|X_t-X_0|>\varepsilon)=0. \tag{5.3}$$

证 留作练习.

定义5.2 称$\{X_t,t\geqslant 0\}$是具有平稳增量的过程,若$\forall\ b>0$,有

$$\{X_t-X_0,t\geqslant 0\}\overset{d}{=}\{X_{t+b}-X_b,t\geqslant 0\}. \tag{5.4}$$

下面命题对于检验具有指定矩条件的具有平稳增量的H-自相似过程的存在性是非常有用的.

命题5.3 设$\{X_t,t\geqslant 0\}$为具有平稳增量的H-自相似过程,$H>0$.下列陈述成立:

(1)若$\exists\ \gamma$使得$0<\gamma<1$且$\mathbf{E}(|X_1|^\gamma)<\infty$,则$H<\dfrac{1}{\gamma}$;

(2)若$\mathbf{E}(|X_1|)<\infty$,则$H\leqslant 1$;

(3)若$\mathbf{E}(|X_1|)<\infty$且$0<H<1$,则$\forall\ t\geqslant 0$有$\mathbf{E}(X_t)=0$;

(4)若$H=1$且$\mathbf{E}(|X_1|)<\infty$,则$X_t=tX_1\quad a.s.$.

证 (1):我们首先证明

$$P(X_1=0且X_2\neq 0)=0 \tag{5.5}$$

事实上,$\forall\ u>2$,我们有

$$\begin{aligned}
&P(X_1=0且X_2\neq 0)\\
&\quad=P(X_1=0,X_2\neq 0且X_u\neq 0)+P(X_1=0,X_2\neq 0且X_u=0)\\
&\quad\leqslant P(X_1=0,X_u\neq 0)+P(X_2\neq 0,X_u=0)\\
&\quad=P(X_1=0)-P(X_1=0,X_u=0)\\
&\qquad+P(X_u=0)-P(X_u=0,X_2=0)\\
&\quad=P(X_1=0)-\{P(X_1=X_u)-P(X_1=X_u\neq 0)\}\\
&\qquad+P(X_u=0)-\{P(X_2=X_u)-P(X_2=X_u\neq 0)\}
\end{aligned}$$

$$=P(X_1=X_u\neq 0)+P(X_2=X_u\neq 0)\qquad (\text{由}(5.1)\text{和}(5.4))$$
$$\leqslant P(|X_1|\geqslant M)+P(0<|X_u|<M)$$
$$+P(|X_2|\geqslant M)+P(0<|X_u|<M)$$
$$=P(|X_1|\geqslant M)+P(|X_2|\geqslant M)+2P(0<|X_1|<u^{-H}M)$$
$$\to P(|X_1|\geqslant M)+P(|X_2|\geqslant M)\qquad (\text{当 } u\to\infty)$$
$$\to 0\qquad (\text{当 } M\to\infty).$$

这证明了(5.5).现在我们有

$$P(X_1=0\text{或}X_1=X_2)$$
$$=P(X_1=X_2)+P(X_1\neq X_2,X_1=0)$$
$$=P(X_1=X_2)+P(X_2\neq 0,X_1=0)$$
$$=P(X_1=X_2)\qquad (\text{由}(5.5))$$
$$=P(X_1=0)\qquad (\text{由}(5.4))$$
$$<1\qquad (\text{由非退化性})\qquad (5.5)'$$

即证明了

$$P(X_1=0\text{或}X_1=X_2)<1\qquad (5.6)$$

注意到:$|X_1|>0,|X_2-X_1|>0,0<\gamma<1$时有

$$|X_2|^\gamma<|X_1|^\gamma+|X_2-X_1|^\gamma,$$

再由(5.1)、(5.4)和(5.5)′即得

$$2^{\gamma H}\mathbf{E}(|X_1|^\gamma)=\mathbf{E}(|X_2|^\gamma)$$
$$<\mathbf{E}(|X_1|^\gamma)+\mathbf{E}(|X_2-X_1|^\gamma)$$
$$=2\mathbf{E}(|X_1|^\gamma),$$

这意味着 $\gamma H<1$.

(2):由 Jensen 不等式,对 $\gamma<1$,有

$$\mathbf{E}(|X_1|^\gamma)\leqslant(\mathbf{E}(|X_1|))^\gamma<\infty.$$

由已证的(1)知 $H<\frac{1}{\gamma}$.由 $\gamma<1$的任意性知 $H\leqslant 1$.

(3):由自相似性(且 $H\neq 0$)和增量平稳性,有

$$\mathbf{E}(X_t)=t^H\mathbf{E}(X_1)=t^H(\mathbf{E}(X_2-X_1))$$
$$=t^H(\mathbf{E}(X_2)-\mathbf{E}(X_1))$$

$$=t^H(2^H-1)\mathbf{E}(X_1)$$
$$=(2^H-1)\mathbf{E}(X_t).$$

由此即知 $\mathbf{E}(X_t)=0$.

(4)：一般情形的证明见[214]. 若假设 $\mathbf{E}(|X_t|^2)<\infty$，则证明甚易，留作练习.

在本节的最后，我们看几个例子. 第一，α 阶 stable 过程是具有平稳增量的 $\frac{1}{\alpha}$-自相似过程. 第二，阶为 α 的自相似马氏过程是 α-自相似过程. 第三，下章将要介绍的分数 Brown 运动是具有平稳增量的 H-自相似过程. 由此可见，H-自相似随机过程的确包括了相当大一类重要的随机过程. 下一节我们将考察具有平稳增量的 H-自相似过程的分形性质.

§6　具有平稳增量的自相似过程的分形性质

我们首先证明两个一般性结果，然后将它们运用到自相似过程，得到具有平稳增量的自相似过程之像集和图集的 Hausdorff 维数. 关于 Packing 维数以及确切测度函数方面的结果目前还未见报道. 这一节和上一节的内容主要取材于[126].

定理6.1　设 $\{X_t, t\geqslant 0\}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的可分随机过程. 若存在正常数 $H<1$、β，K 使得 $\beta>\max(d,\frac{1}{H})$ 且

$$\mathbf{E}(|X_t-X_s|^\beta)\leqslant K|t-s|^{H\beta}, (0\leqslant s,t\leqslant 1) \tag{6.1}$$

则

$$\dim(\mathrm{Gr}(X([0,1])))\leqslant 1+d(1-H)\quad a.s.. \tag{6.2}$$

$$\dim(X([0,1]))\leqslant \min(d,\frac{1}{H})\quad a.s.. \tag{6.3}$$

证　$\forall\ 0<\varepsilon<1$，令 $N_\varepsilon=[\frac{1}{\varepsilon}]$，

$$M_i(\varepsilon)=\sup_{i\varepsilon\leqslant t\leqslant(i+1)\varepsilon}|X_t-X_{i\varepsilon}|, 0\leqslant i\leqslant N_\varepsilon;$$

$$B_i=\{x\in\mathbb{R}^d:|x-X_{i\varepsilon}|\leqslant M_i(\varepsilon)\},0\leqslant i\leqslant N_\varepsilon.$$

注意到

$$X([0,1])\subset\bigcup_{0\leqslant i\leqslant N_\varepsilon}B_i,$$

我们有:“若 $\beta>\gamma>\frac{1}{H}$,则

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(s^\gamma-m(X([0,1])))\\&\leqslant\sum_{i=0}^{N_\varepsilon}\mathbf{E}(M_i^\gamma(\varepsilon))\leqslant\sum_{i=0}^{N_\varepsilon}(\mathbf{E}(M_i^\beta(\varepsilon)))^{\frac{\gamma}{\beta}}\\&\leqslant c\varepsilon^{-1+H\gamma}\to0\quad(\text{当}\ \varepsilon\to0\text{时})”,\end{aligned}$$

故 $\dim(X([0,1]))\leqslant\frac{1}{H}$. 而 $\dim(X([0,1]))\leqslant d$,所以证得了(6.3)式.

(6.2)式的证明是类似的,留作练习,亦可参见[126].

注意到(6.1)实际上保证了$\{X_t,t\geqslant0\}$轨道的连续性,因此定理6.1的局限性较大. 这个结果和下一结果的进一步改进可见[232].

定理6.2　设$\{X_t,t\geqslant0\}$为$\mathbb{R}^d$中的可分随机过程. 若存在三个正常数a、H、δ使得

$$P(|X_t-X_s|\leqslant|t-s|^Hx)\leqslant ax^\delta\quad(x\geqslant0,s,t\in[0,1]),\tag{6.4}$$

则

$$\dim(Gr(X([0,1])))\geqslant\max[1,\min(1+\delta(1-H),\frac{1}{H})]\ a.s.\ ,\tag{6.5}$$

$$\dim(X([0,1]))\geqslant\min(\delta,\frac{1}{H})\ a.s.\ .\tag{6.6}$$

证　由 Frostman 定理,为证(6.5),只需证明存在 $Gr(X([0,1]))$上的概率测度μ使得对$\gamma<\max[1,\min(1+\delta(1-H),\frac{1}{H})]$有

$$\int_{GrX([0,1])\times GrX([0,1])}|x-y|^{-\gamma}\mu(dx)\mu(dy)<\infty\quad a.s.\ .$$

现取μ为$[0,1]$上 Lebesgue 测度在映射

$$t \to (t, X_t) \in \mathrm{Gr}(X([0,1])) \qquad (t \in [0,1])$$

下的像测度，亦即我们有

$$\int_{\mathrm{Gr}X([0,1]) \times \mathrm{Gr}X([0,1])} |x-y|^{-\gamma} \mu(dx)\mu(dy)$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 (|t-s|^2 + |X_t - X_s|^2)^{-\frac{\gamma}{2}} dt ds \tag{6.7}$$

令 $F_{t,s}(x) = P(|X_t - X_s| \leqslant |t-s|^H x)$，我们有

$$\mathbf{E}\left(\int_0^1 \int_0^1 (|t-s|^2 + |X_t - X_s|^2)^{-\frac{\gamma}{2}} dt ds\right)$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(\left(\int_0^\infty |t-s|^2 + |t-s|^{2H} x^2\right)^{-\frac{\gamma}{2}} dF_{t,s}(x) dt ds\right.$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 \gamma\ t-s|^{2H} \left(\int_0^\infty x(|t-s|^2 + \right.$$
$$|t-s|^{2H} x^2)^{-\frac{\gamma}{2}-1} F_{t,s}(x) dx dt ds \tag{6.8}$$

现在估计上式中内部的积分项：

$$I = |t-s|^{2H} \int_0^\infty x(|t-s|^2 + |t-s|^{2H} x^2)^{-\frac{\gamma}{2}-1} F_{t,s}(x) dx \tag{6.9}$$

我们分三种情形来估计(6.9)．

(Ⅰ)设 $H \geqslant 1$. 此时

$$I \leqslant |t-s|^{2H} \int_0^\infty x(|t-s|^2 + |t-s|^{2H} x^2)^{-\frac{\gamma}{2}-1} dx$$
$$\leqslant |t-s|^{\gamma} \int_0^\infty y(1+y^2)^{-1-\frac{\gamma}{2}} dy.$$

(Ⅱ)设 $0 < H < 1$ 且 $H\delta < 1$. 选取 $1 + \delta(1-H) > \gamma > \delta$，把 I 分为两部分：

$$I = |t-s|^{2H}\left(\int_0^{|t-s|^\eta} + \int_{|t-s|^\eta}^\infty\right) \triangleq I_1 + I_2,$$

其中 $\eta = (1-H)(\gamma - \delta)/\gamma$. 我们有

$$I_1 \leqslant a|t-s|^{2H} \int_0^{|t-s|^\eta} (|t-s|^2 + |t-s|^{2H} x^2)^{-\frac{\gamma}{2}-1} x^{1+\delta} dx$$
$$\leqslant a|t-s|^{-\gamma+\delta(1-H)} \int_0^\infty (1+y^2)^{-\frac{\gamma}{2}-1} y^{1+\delta} dy;$$
$$I_2 \leqslant |t-s|^{2H} \int_{|t-s|^\eta}^\infty x(|t-s|^2 + |t-s|^{2H} x^2)^{-\frac{\gamma}{2}-1} dx$$

$$\leqslant |t-s|^{-\gamma}\int_{|t-s|^{\eta}}^{\infty} y(1+y^2)^{-1-\frac{\gamma}{2}}dy$$

$$\leqslant c|t-s|^{-\gamma+\delta(1-H)} \qquad (\text{因 } \eta<1-H)$$

(Ⅲ)设$0<H<1$且$H\delta\geqslant 1$. 选取$\gamma<\delta$,把I分为两个部分:

$$I=|t-s|^{2H}\left(\int_0^1+\int_1^{\infty}\right)=I_1+I_2.$$

我们有

$$I_1\leqslant a|t-s|^{2H}\int_0^1(|t-s|^2+|t-s|^{2H}x^2)^{-\frac{\gamma}{2}-1}x^{1+\delta}dx$$

$$=a|t-s|^{-\gamma+\delta(1-H)}\int_0^{|t-s|^{H-1}}(1+y^2)^{-\frac{\gamma}{2}-1}y^{1+\delta}dy$$

$$\leqslant c|t-s|^{-1-\gamma},$$

$$I_2\leqslant |t-s|^{2H}\int_1^{\infty}x(|t-s|^2+|t-s|^{2H}x^2)^{-\frac{\gamma}{2}-1}dx$$

$$\leqslant |t-s|^{-\gamma}\int_{|t-s|^{H-1}}^{\infty}y(1+y^2)^{-1-\frac{\gamma}{2}}dy$$

$$\leqslant c|t-s|^{-H\gamma}.$$

在上述所有情形,选取$0<\gamma<\max[1,\min(1+\delta(1-H),\frac{1}{H})]$,我们总有(注意(6.9)、(6.8)):

$$\mathbf{E}\left[\int_0^1\int_0^1(|t-s|^2+|X_t-X_s|^2)^{-\frac{\gamma}{2}}dtds\right]<\infty.$$

由(6.7)及 Frostman 定理知(6.5)获证.

(6.6)的证法几乎是一样的. 若$\gamma<\min(\delta,\frac{1}{H})$,则

$$\mathbf{E}\left(\int_0^1\int_0^1|X_t-X_s|^{-\gamma}dtds\right)$$

$$=\int_0^1\int_0^1|t-s|^{-\gamma H}\left(\int_0^{\infty}x^{-\gamma}dF_{t,s}(x)\right)dtds$$

$$=\int_0^1\int_0^1\gamma|t-s|^{-\gamma H}\left(\int_0^{\infty}x^{-\gamma-1}F_{t,s}(x)dx\right)dtds$$

$$\leqslant c\int_0^1\int_0^1|t-s|^{-\gamma H}dtds<\infty.$$

再由 Frostman 定理即得(6.6).

由定理6.1和定理6.2立即可以得到具有平稳增量的自相似过

程的像集与图集的 Hausdorff 维数.

定理6.3　设$\{X_t,t\geqslant 0\}$为$\mathbb{R}^d$值的具有平稳增量的H-自相似过程，如果

（Ⅰ）存在$\beta>\max(d,\frac{1}{H})$使得

$$\mathbf{E}(|X_1|^\beta)<\infty,$$

（Ⅱ）存在$a>0$使得$P(|X_1|\leqslant x)\leqslant ax^d\quad(\forall\ x\geqslant 0)$，

则有

$$\dim(\mathrm{Gr}(X([0,1])))=1+d(1-H)\quad a.s.\ ,$$

$$\dim(X([0,1]))=\min(d,\frac{1}{H})\quad a.s.\ .$$

附注　关于自相似过程的分形性质，所知结果甚少，这方面还大有工作可作. 本节的进一步发展可见[232]. 关于自相似过程的其他性质可见[126].

第六章

随机场的分形理论简介

在这一章中，我们考虑随机场（又称多指标随机过程或多参数随机过程）的分形理论．设 $N\geqslant 1, d\geqslant 1$，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为概率空间．若 $\forall\ t\in\mathbb{R}^N$，有 $X(t):\Omega\to\mathbb{R}^d$，满足 $X_t\in\mathscr{F}/\mathscr{B}^d$，则称$\{X_t, t\in\mathbb{R}^N\}$是一个$(N,d)$随机场．显然，随机场的概念是通常（单指标）随机过程概念的推广（当 $N=1$ 时即为通常的随机过程）．正如在数学分析中从一元函数到多元函数的推广会带来质的飞跃一样，从随机过程到随机场的推广也必会带来本质上的新方法、新内容和新困难．在随机过程$\{X(t), t\in\mathbb{R}^1\}$情形，因$\mathbb{R}^1$为有序集，因此自然地把 t 解释为时间，有“过去”、“现在”、“将来”之分；在随机场$\{X(t), t\in\mathbb{R}^N\}$情形，因$\mathbb{R}^N(N>1)$不再是有序集，这对随机场（尤其是马氏场）的研究带来了不少麻烦，同时也由此产生了许多新的思想和方法．在本章中，我们只简单介绍几类常见随机场的分形理论，大部结论都不给出证明，但指出参考文献供有兴趣的同志进一步查阅．

§1　分数 Brown 运动和指数 Gauss 场

Brown 运动是大家都很熟悉的随机过程，本节中我们考虑它的一个自然推广——分数 Brown 运动．

定义 1.1　设 $X=\{X(t), t\in\mathbb{R}^N\}$为$(N,d)$随机场．称 X 是 Gauss 场，如果对$\mathbb{R}^N$的任一有限子集 Λ，$\{X(t), t\in\Lambda\}=\{(X_1(t),$

$\cdots, X_d(t)), t\in \Lambda\}$服从$d\times m$维正态分布(其中$m$为$\Lambda$之元素的个数,$X_i(t)$表示$X(t)$的第$i$个分量,当然每个$X_i(t)$都是实值随机变量). 若$X=\{X(t), t\in \mathbb{R}^N\}$为$(N,d)$Gauss场,$X(t)=(X_1(t), \cdots, X_d(t))$的分量$X_1(t), \cdots, X_d(t)$相互独立有相同分布,且满足

$$E(|X(t)-X(s)|^2)=d|t-s|^{2\alpha}, (0<\alpha<1) \tag{1.1}$$

则称X为$(N,d,2\alpha)$过程或d维α阶分数Brown运动(其中$|\cdot|$表示欧氏距离).

当$N=1, \alpha=\frac{1}{2}$时$(N,d,2\alpha)$过程即为通常的d维Brown运动;当$\alpha=\frac{1}{2}, d=1$时即为Lévy引进的N参数Brown运动. 由[115]可知分数Brown运动在任一立方体上满足β阶$(0<\beta<\alpha)$一致Hölder条件,并且是具有平稳增量的α阶自相似过程. 分数Brown运动和Brown运动相比,最大的缺陷是没有独立增量性,因此人们便探求独立增量性的各种近似替代物,局部不确定性(简记为LND)就是其中的一种,它是"增量近似独立性"的一种表述,在研究随机场的局部时及轨道奇异性方面起着关键作用. 下面命题说明分数Brown运动具有LND.

命题 1.1 $\forall\ 1>\varepsilon>0$,记$C_\varepsilon=\{t\in \mathbb{R}^N: \varepsilon\leqslant |t|\leqslant \varepsilon^{-1}\}$,则分数Brown运动$\{X(t), t\in \mathbb{R}^N\}$在$C_\varepsilon$上是局部不确定的,即$\exists$常数$c>0$对于满足

$$|t_{l+1}-t_l|\leqslant |t_{i+1}-t_i|, 1\leqslant i\leqslant l\leqslant m$$

的$t_1, \cdots, t_m\in C_\varepsilon$及$u_i\in \mathbb{R}^d (i=1, \cdots, m)$,有

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{l=1}^{m} \langle u_i, X(t_i)-X(t_{i-1})\rangle\right)\geqslant c\sum_{i=1}^{m} |t_i-t_{i-1}|^{2\alpha}|u_i|^2$$

(其中$t_0=0$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$表示欧氏内积).

关于LND的各种表述形式可见[21,22,43,167]. 关于分数Brown运动像集、图集和水平集的Hausdorff维数,有如下结果(证明请见[115]):

定理 1.1 设$X=\{X(t), t\in R^N\}$为d维α阶分数Brown运

动，$E\subset\mathbb{R}^N$为紧集，则

$$\dim(X(E))=\min(d,\frac{1}{\alpha}\dim(E))\ a.s. \tag{1.2}$$

$$\dim(\mathrm{Gr}(X(E)))=\min(\frac{1}{\alpha}\dim(E),\dim(E)+(1-\alpha)d)\quad a.s. \tag{1.3}$$

若 $\dim(E)>\alpha d$，则 $X(E)$ $a.s.$ 具有内点. 当 $N>\alpha d$ 时，$\forall\ u\in\mathbb{R}^d$，

$$\dim\{t\in\mathbb{R}^N: X(t)=u\}=N-\alpha d\quad a.s. \tag{1.4}$$

关于一致维数结果，[163]借助于 LND 证明了

定理 1.2 设 $X=\{X(t),t\in\mathbb{R}^N\}$为 d 维 α 阶分数 Brown 运动，若 $N\leqslant\alpha d$，则

$$P(\dim(X(E))=\frac{1}{\alpha}\dim(E)\text{对一切 Borel 集 }B\text{ 成立})=1; \tag{1.5}$$

若 $N>\alpha d$，则

$$P(\dim(X^{-1}(F))=N-\alpha d+\alpha\dim(F)\text{对一切紧集 }F\subset\mathbb{R}^d\text{成立})=1, \tag{1.6}$$

特别地，

$$P(\dim(X^{-1}(u))=N-\alpha d\text{ 对一切 }u\in\mathbb{R}^d\text{成立})=1.$$

由(1.2)可以猜测：$\forall\ \mathbf{E}\subset\mathbb{R}^N$，有

$$\mathrm{Dim}(X(E))=\min(d,\frac{1}{\alpha}\mathrm{Dim}(E))\quad a.s.. \tag{1.7}$$

文[230]就 $N\leqslant\alpha d$ 时证明了(1.7)：

定理 1.3 设 $X=\{X(t),t\in\mathbb{R}^N\}$为 d 维 α 阶分数 Brown 运动，若 $N\leqslant\alpha d$，则

$$P(\mathrm{Dim}(X(E))=\frac{1}{\alpha}\mathrm{Dim}(E)\text{对任何 Borel 集 }E\subset\mathbb{R}^N\text{成立})=1;$$

若 $N>\alpha d$，则

$$P(\mathrm{Dim}(X^{-1}(F))\leqslant N-d+\alpha\,\mathrm{Dim}F\text{ 对任何紧集 }F\subset\mathbb{R}^d\text{成立})=1, \tag{1.8}$$

$$P(\mathrm{Dim}(X^{-1}(u))=N-\alpha d\text{ 对一切 }u\in\mathbb{R}^d\text{成立})=1.$$

这里有两个问题还未解决:(1)$N>\alpha d$ 时(1.7)是否成立?(2)(1.8)式括号中等式是否成立?

对于分数 Brown 运动,测度函数问题非常困难,这方面的结果很少.关于分数 Brown 运动多重点和多重时的结果,可见[75,124,187,218,224,230].关于分数 Brown 运动的其它相关性质还可见[211,225,226]下面我们来证明关于 k 重点集的两个结果,这取材于[224],其证法较有代表性.

设 $X=\{X(t),t\in\mathbb{R}^N\}$ 为 d 维 α 阶的分数 Brown 运动.令

$$L_k=\{x\in\mathbb{R}^d: x \text{ 为 } X \text{ 的 } k \text{ 重点}\},$$

$$M_k=\{(t_1,\cdots,t_k)\in\mathbb{R}^{Nk}: X(t_1)=\cdots=X(t_k)\}.$$

[75,124]证明了:

(Ⅰ)若 $Nk<(k-1)\alpha d$,则 X a.s. 没有 k 重点;

(Ⅱ)若 $Nk>(k-1)\alpha d$,则 X a.s. 存在 k 重点.

当 $Nk=(k-1)\alpha d$ 时,问题仍未解决.现在把问题提得更细致一些.设 $A_1,\cdots,A_k$ 为 $\mathbb{R}^N$ 中内部不空的且互不相交的紧集,令

$$A=\prod_{i=1}^{k}A_i,$$

$$M_k(A)=\{(t_1,\cdots,t_k)\in A: X(t_1)=\cdots=X(t_k)\},$$

$$L_k(A)=\{x\in\mathbb{R}^d:\exists\ (t_1,\cdots,t_k)\in A \text{ 使得 } x=X(t_1)=\cdots=X(t_k)\}.$$

[218]证明了:若 $Nk>(k-1)\alpha d$,则

(a) $P(\dim(M_k(A))=Nk-(k-1)\alpha d)>0$, (1.9)

(b) $P(\dim(M_k)=Nk-(k-1)\alpha d)=1$. (1.10)

下面我们证明 k 重点集的相应结果.设 $A_1,\cdots,A_k,A$ 如上所述.

定理 1.4 设 X 是 d 维 α 阶分数 Brown 运动,若 $N\leqslant\alpha d$, $Nk>(k-1)\alpha d$,则

$$P\left(\dim(L_k(A))=\frac{Nk}{\alpha}-(k-1)d\right)>0; \tag{1.11}$$

$$P\left(\dim(L_k)=\frac{Nk}{\alpha}-(k-1)d\right)=1. \tag{1.12}$$

定理 1.5 设 X 是 d 维 α 阶分数 Brown 运动，若 $N>\alpha d$，则对任意自然数 $k\geqslant 2$，

$$P(\dim(L_k(A))=d)>0, \tag{1.13}$$

$$P(\dim(L_k)=d)=1. \tag{1.14}$$

为了证明上面两个定理，需要下面一些引理(这些引理我们只指明出处，而不给出详细证明). 对

$$n=1,2,\cdots,k=(k_1,\cdots,k_N)\in\mathbb{R}^N,k_i\in\{1,2,\cdots,2^n\},$$

令

$$I_{nk}=\{t\in[0,1]^N:(k_i-1)2^{-n}\leqslant t_i\leqslant k_i2^{-n},i=1,2,\cdots,N\}$$

引理 1.1 设 $N\leqslant\alpha d$，$0<\alpha-\varepsilon<\beta<\alpha$，则 a.s. 当 n 充分大时，对$\mathbb{R}^d$中任意一个半径为 $2^{-n\beta}$的闭球 B，$X^{-1}(B)$至多与 $2^{n\varepsilon d}$个 I_{nk}相交.

此引理的证明参见[163]

引理 1.2 设函数 $f:[0,1]^N\to\mathbb{R}^d$满足任意小于 α 阶的一致 Hölder 条件，且 f 具有有界局部时，则对任意闭集 $E\subset[0,1]^N$，有

$$\frac{1}{\alpha}\dim(E)+d-\frac{N}{\alpha}\leqslant\dim(f(E))\leqslant\frac{1}{\alpha}\dim(E) \tag{1.15}$$

此引理的证明见[115,163]. 实际上(1.15)式右边的不等式成立并不要求 f 具有有界局部时.

引理 1.3 设$\{\mu_\varepsilon,\varepsilon\in(0,1]\}$是紧集 E 上的一族正随机测度，μ_ε 的能量积分

$$I_\gamma(\mu_\varepsilon)=\iint\limits_{EE}\frac{d\mu_\varepsilon(t)d\mu_\varepsilon(s)}{|t-s|^\gamma}<\infty.$$

如果存在正常数 c_1、c_2 使得

$$\mathbf{E}(\|\mu_\varepsilon\|)\geqslant c_1,\quad \mathbf{E}(\|\mu_\varepsilon\|^2)<c_2, \tag{1.16}$$

(其中 $\|\mu_\varepsilon\|=\mu_\varepsilon(E)$)，则事件“$\{\mu_\varepsilon\}$ 中存在子列$\{\mu_{\varepsilon_n}\}$收敛到 E 上正测度 μ_0，且 $I_\gamma(\mu_0)<\infty$”的概率$\geqslant\dfrac{c_1^2}{2c_2}$.

此引理来自[211].

下面我们来证明定理 1.4 与定理 1.5. 根据分数 Brown 运动

的不变性(详见[115]),不妨设 $A_1,\cdots,A_k$ 均为$[0,1]^N$中内部不空的紧集.下面总设c为常数,每次不一定相同.

定理1.4的证明:我们只证明(1.11),(1.12)可由(1.11)及[218]的证明得到.设S_k为$M_k(A)$在A_1上的投影:

$$S_k=\{t_1\in A_1:\exists\ t_i\in A_i,i=2,\cdots,k\text{ 使}(t_1,\cdots,t_k)\in M_k(A)\}$$

则S_k为$[0,1]^N$中的闭集,$X(S_k)=L_k(A)$.$\forall\ \varepsilon>0$,X　$a.s.$满足$\alpha-\varepsilon$阶的一致Hölder条件,由(1.15)知$a.s.$有

$$\dim(X(S_k))\leqslant\frac{1}{\alpha}\dim(S_k)\leqslant\frac{1}{\alpha}\dim(M_k(A)).$$

由(1.9)知

$$\dim(L_k(A))\leqslant\frac{Nk}{\alpha}-(k-1)d\quad a.s.\ .\tag{1.17}$$

记$l=\dfrac{Nk}{\alpha}-(k-1)d$,定义

$$Z(t)=(X(t_1),\cdots,X(t_k)),t=(t_1,\cdots,t_k)\in A,\tag{1.18}$$

则

$$Z^{-1}(\tilde{L}_k)=M_k(A),$$

其中

$$\tilde{L}_k=\{(\underbrace{x,\cdots,x}_{k\text{个}}):x\in L_k(A)\}.$$

若存在$\eta>0$使得

$$\dim(L_k(A))<l-\eta,$$

则对$\forall\ \delta>0$,存在充分大的n及一列半径$\leqslant 2^{-n}$的球$\{B_i\}$使得

$$L_k(A)\subset\bigcup_i B_i,$$

且

$$\sum_i(\mathrm{diam}(B_i))^{l-\eta}<\delta.\tag{1.19}$$

取ε、β如引理1.1($\varepsilon<\beta\eta/2kd$),定义$n_i$满足

$$2^{-(n_i+1)\beta}\leqslant\mathrm{diam}(B_i)\leqslant 2^{-n_i\beta}\tag{1.20}$$

令$\hat{B}_i$是与B_i同心、半径为$2^{-n_i\beta}$的闭球,则$\{\hat{B}_i\}$是$L_k(A)$的一个覆盖.由引理1.1得

$$\dot{M}_k(A)\subset\bigcup_i Z^{-1}(\hat{B}_i^k)$$

$$\subset\bigcup_i\{至多\ 2^{n\varepsilon kd}个立方体\prod_{l=1}^{k}I_{n_ik_l}的并\} \qquad (1.21)$$

将(1.21)右端的小立方体记为 C_{ij}，则由(1.19)、(1.20)，当 n 充分大时，

$$\begin{aligned}&\sum_i\sum_j(\mathrm{diam}(C_{ij}))^{\beta(l-\frac{\eta}{2})}\\&\leqslant c\sum_i 2^{n_i\varepsilon kd}(2^{-n_i})^{\beta(l-\frac{\eta}{2})}\\&=c\sum_i 2^{n_i(d\varepsilon k-\frac{\beta\eta}{2})}(2^{-n_i})^{\beta(l-\eta)}\\&\leqslant c\sum_i(\mathrm{diam}(B_i))^{l-\eta}<\delta,\end{aligned}$$

因此

$$\dim(M_k(A))\leqslant\beta(l-\frac{\eta}{2})<\alpha(l-\frac{\eta}{2}).$$

于是我们证明了对$\forall\ \eta>0$，

$$\begin{aligned}&P(\dim(L_k(A))\geqslant l-\eta)\\&\geqslant P(\dim(M_k(A))\geqslant\alpha(l-\frac{\eta}{2})).\end{aligned} \qquad (1.22)$$

令

$$\eta_n=\frac{1}{n},\Lambda_n=\{\dim(L_k(A))\geqslant l-\frac{1}{n}\},$$

则 $\Lambda_n\downarrow\{\dim(L_k(A))\geqslant l\}$. 由(1.22)和(1.9)，令 $n\to\infty$得

$$P(\dim(L_k(A))\geqslant l)>0.$$

结合(1.17)知(1.11)成立.

定理 1.5 的证明：当 $N>\alpha d$ 时，$\forall\ x\in\mathbb{R}^d$，$\dim(X^{-1}(x))=N-\alpha d$，因此(1.14)是显然的. 下面证明(1.13). 因为 $L_k(A)\subset\mathbb{R}^d$，故显然有

$$\dim(L_k(A))\leqslant d\quad a.s.. \qquad (1.23)$$

为了证明 $\dim(L_k(A))$的下界，只需证明

$$\dim(L_k(A))\geqslant\frac{1}{\alpha}\dim(M_k(A))-\frac{Nk}{\alpha}+kd.$$

定义 $Z(t)(t\in A)$ 如(1.18)，它是 $\mathbb{R}^{Nk}\to\mathbb{R}^{dk}$ Gauss 场，且对 $\forall\ \varepsilon>0$，$Z(t)$ a.s. 满足 $\alpha-\varepsilon$ 阶的一致 Hölder 条件，由引理 1.2 只需证明 $Z(t)(t\in A)$ 具有有界局部时. 对任意 $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^{dk})$，$Z(t)(t\in A)$ 在 B 中的逗留时间为

$$\Phi(\omega,B)=\mathscr{L}_{Nk}(t\in A: Z(t,\omega)\in B),$$

($\mathscr{L}_{Nk}$ 表 $\mathbb{R}^{Nk}$ 上 Lebesgue 测度). 由[245]的结果，当 $N>\alpha d$ 时，对任意内部不空的紧集 J，$X(t)(t\in J)$ 具有连续局部时 $\alpha(J,x)$，因此对 $\forall\ B=\prod_{i=1}^{k}B_i, B_i\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$，有

$$\begin{aligned}\Phi(\omega,B)&=\mathscr{L}_{Nk}(t\in A: X(t_i)\in B_i, i=1,\cdots,k)\\&=\prod_{i=1}^{k}\mathscr{L}_N(t_i\in A_i: X(t_i)\in B_i)\\&=\prod_{i=1}^{k}\int_{B_i}\alpha(A_i,x)dx_i\\&=\int_B\prod_{i=1}^{k}\alpha(A_i,x)dx_1\cdots dx_k.\end{aligned}\tag{1.24}$$

由测度扩张定理知(1.24)对 $\forall\ B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^{dk})$ 成立. 因此 $Z(t)(t\in A)$ 有连续局部时 $\prod_{i=1}^{k}\alpha(A_i,x_i)$. 显然当 $|x|$ 充分大时，$\alpha(A_i,x)\equiv 0(i=1,\cdots,k)$，从而 $Z(t)(t\in A)$ 具有有界局部时，由引理 1.2 得

$$\frac{1}{\alpha}\dim(M_k(A))+kd-\frac{kN}{\alpha}\leqslant\dim(Z(M_k(A)))=\dim(L_k(A)),$$

结合(1.9)及(1.23)得到(1.13). 证毕.

下面我们考虑 k 重时集. 设 $E_1,\cdots,E_k$ 为 $\mathbb{R}^N-\{0\}$ 中互不相交的紧集，内部可能为空集，$E=\prod_{i=1}^{k}E_i$.

定理 1.6 设 X 是 d 维 α 阶分数Brown 运动，若 $\dim(E_1\times E_2\times\cdots\times E_k)>(k-1)\alpha d$，则

$$\dim(M_k(E))\leqslant\dim(E_1\times\cdots\times E_k)-(k-1)\alpha d\quad a.s..\tag{1.25}$$

当 $k=2$ 时,$\forall\ \varepsilon>0$,有

$$P(\dim(M_2(E))\geqslant\dim(E_1\times E_2)-\alpha d-\varepsilon)>0. \tag{1.26}$$

证 定义

$$Y_t=(X(t_1)-X(t_i),2\leqslant i\leqslant k),t=(t_1,\cdots,t_k)\in\prod_{i=1}^{k}E_i,$$

则

$$M_k(E)=\{t\in\prod_{i=1}^{k}E_i:Y_t=0\}.$$

显然对$\forall\ \varepsilon>0$,Y_t a. s. 满足 $\alpha-\varepsilon$ 阶的一致 Hölder 条件,即存在常数 K 及正随机变量 δ,使得当$|s-t|<\delta$ 时

$$|Y_t-Y_s|<K|t-s|^{\alpha-\varepsilon}. \tag{1.27}$$

对$\forall\ \gamma>\dim(E_1\times\cdots\times E_k)-(k-1)\alpha d$,取 $\varepsilon>0$,使

$$\gamma>\dim(E_1\times\cdots\times E_k)-(k-1)(\alpha-\varepsilon)d,$$

则对$\forall\ n>0$,存在 $E_1\times\cdots\times E_k$ 的一列半径$\leqslant 2^{-n}$的球$\{B_{nj}\}$使得

$$E_1\times\cdots\times E_k\subset\bigcup_j B_{nj},\quad \varliminf_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\mathrm{diam}B_{nj})^{\gamma+(k-1)(\alpha-\varepsilon)d}<\infty. \tag{1.28}$$

记 B_{nj}的球心为 u_{nj},我们可要求 $u_{nj}\in E_1\times\cdots\times E_k$,令

$$B_{nj}(0)=\begin{cases}B_{nj}, & \text{若 } 0\in Y(B_{nj})\\ \varnothing, & \text{其它;}\end{cases}$$

则$\{B_{nj}(0)\}$是 $M_k(E)$ 的一个覆盖. 由(1.27),当 n 充分大时,$0\in Y(B_{nj})$蕴含

$$|Y(u_{nj})|\leqslant K(\mathrm{diam}B_{nj})^{\alpha-\varepsilon},$$

因此

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\mathrm{diam}B_{nj}(0))^{\gamma}\leqslant\sum_{j\in\Gamma_n}(\mathrm{diam}B_{nj})^{\gamma}, \tag{1.29}$$

其中

$$\Gamma_n=\{j:|Y(u_{nj})|\leqslant K(\mathrm{diam}B_{nj})^{\alpha-\varepsilon}\}.$$

于是由 Fatou 引理及(1.28)、(1.29)有

$$\mathbf{E}(\underline{\lim}_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\mathrm{diam}B_{nj}(0))^{\gamma})$$
$$\leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\mathbf{E}(\sum_{j\in\Gamma_n}(\mathrm{diam}B_{nj})^{\gamma})$$
$$=\underline{\lim}_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\mathrm{diam}B_{nj})^{\gamma}P(|Y(u_{nj})|\leqslant K(\mathrm{diam}B_{nj})^{\alpha-\varepsilon})$$
$$\leqslant c\,\underline{\lim}_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\mathrm{diam}B_{nj})^{\gamma+(k-1)(\alpha-\varepsilon)d}<\infty,$$

从而

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\mathrm{diam}B_{nj}(0))^{\gamma}<\infty,\quad a.s..$$

这便证得(1.25).

为了证明(1.26)，只需证对$\forall\, \upsilon<\dim(E_1\times E_2)-\alpha d$，在$M_2(E)$上存在正随机测度$\mu$，使得

$$\iint_{(E_1\times E_2)^2}\frac{1}{|t-s|^{\upsilon}}d\mu(t)d\mu(s)<\infty. \tag{1.30}$$

因为$\upsilon+\alpha d<\dim(E_1\times E_2)$，所以存在$E_1\times E_2$上的正测度$\sigma$，使得

$$\iint_{(E_1\times E_2)^2}\frac{1}{|t-s|^{\upsilon+\alpha d}}d\sigma(t)d\sigma(s)<\infty. \tag{1.31}$$

对$\forall\ \varepsilon>0$，定义$E_1\times E_2$上的随机测度如下

$$d\mu_{\varepsilon}(t)=\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}\right)^{\frac{d}{2}}\exp(-\frac{|X_{t_1}-X_{t_2}|^2}{2\varepsilon})d\sigma(t)$$
$$=\int_{\mathbb{R}^d}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^2\right)\exp(i\langle\xi,X(t_1)-X(t_2)\rangle)d\xi d\sigma(t).$$

如果当$\varepsilon\to 0$时$\{\mu_{\varepsilon}\}$有子列弱收敛到某一测度μ，则μ是支撑在$M_2(E)$上的测度. 由引理1.3，只需证明存在$c_1>0$、$c_2>0$，使得

$$\mathbf{E}(\|\mu_{\varepsilon}\|)\geqslant c_1,\mathbf{E}(\|\mu_{\varepsilon}\|^2)\leqslant c_2,$$

及

$$\mathbf{E}(I_{\upsilon}(\mu_{\varepsilon}))<\infty.$$

具体验证留作练习或参见[44]. 证毕.

附注. 当 $\dim(E_1\times\cdots\times E_k)<(k-1)\alpha d$ 时,[211]证明了

$$M_k(E)=\varnothing \quad a.s..$$

分数 Brown 运动 $X=(X_1(t),\cdots,X_d(t))$ 的分量 $X_1(t),\cdots,X_d(t)$ 是独立同分布的,但在实际应用中(如统计学、物理学及湍流理论等方面)中会遇到更多分量不独立的 Gauss 场. 指数 Gauss 场就是其中的一类(详见[1,41]).

定义 1.2 设 $X=\{X(t),t\in\mathbb{R}^N\}$ 为 (N,d)Gauss 场, $\mathbf{E}(X(t))\equiv 0$, X_t 的协方差函数连续, 且 X 具有平稳增量, 即 $\forall\ b\in\mathbb{R}^N$, $\{X_t-X_0,t\in\mathbb{R}^N\}$ 与

$$\{X(t+b)-X(b),t\in\mathbb{R}^N\}$$

具有相同的有限维分布. 记

$$\sigma_i^2(t)=\mathbf{E}(|X_i(t+s)-X_i(s)|^2),i=1,\cdots,d,$$

$$\underline{\alpha}_i=\sup\{\alpha>0:\lim_{t\to 0}|t|^{-\alpha}\sigma_i(t)=0\},$$

$$\bar{\alpha}_i=\inf\{\alpha>0:\lim_{t_i\to 0}|t|^{-\alpha}\sigma_i(t)=\infty\}$$

(显然 $0\leqslant\underline{\alpha}_i\leqslant\bar{\alpha}_i\leqslant\infty$). 若 $\bar{\alpha}_i=\underline{\alpha}_i=\alpha_i$, 则称 $\{X_i(t),t\in\mathbb{R}^N\}$ 为指数是 α_i 的 Gauss 场; 若对 $i=1,\cdots,d$, $\{X_i(t),t\in\mathbb{R}^N\}$ 均为指数是 α_i 的 *Gauss* 场, 则称 $X-\{(X_1(t),\cdots,X_d(t)),t\in\mathbb{R}^N\}$ 是指数为 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)$ 的 Gauss 场. 在不混淆的情况下, 简称为指数 Gauss 场.

显然, 分数 Brown 运动为指数 Gauss 场. 关于指数 *Gauss* 场的像集、图集和水平集的 Hausdorff 维数, 可见[3,41,218,231]. 关于指数 Gauss 场的 Packing 维数和一致维数结果, 似未见报道.

§2 Brown 单

本节简介 Brown 单的分形性质. 由下面定义可知 Brown 单亦是 Brown 运动的自然推广.

定义 2.1 设 $W=\{W(t),t\in\mathbb{R}_+^N\}=\{(W_1(t),\cdots,W_d(t)),$

$t\in\mathbb{R}_+^N\}$为(N,d)Gauss 场. 若$W_1(t),\cdots,W_d(t)$独立同分布，且$\forall\ k=1,\cdots,d$, $\mathbf{E}(W_k(t))=0$,

$$\mathbf{E}(W_k(t)W_k(s)) = \prod_{i=1}^{N}(t_i\wedge s_i) \tag{2.1}$$

(其中$t=(t_1,\cdots,t_N),s=(s_1,\cdots,s_N)$)，则称$W$为$d$维 Brown 单或$N$参数 Wiener 过程.

显然，当$N=1$时 Brown 单即为 Brown 运动. 虽然 Lévy Brown 运动和 Brown 单都是 Brown 运动在多参数情形的推广，且在随机场理论中都担当了非常重要的角色，但它们之间有着非常大的差异. Brown 单不具有通常意义下的增量平稳性，不具有LND，也不能归结到指数 *Gauss* 场中.

将W在$A\subset\mathbb{R}_+^N$上的增量写成

$$W(A) = \int_A dW(t) \tag{2.2}$$

则可将它看成$\mathbb{R}_+^N$上的一个随机测度. 由(2.1)和(2.2)有

$$\mathbf{E}(W(A)W(B))=\mathscr{L}_N(A\cap B)$$

其中$\mathscr{L}_N$为$\mathbb{R}^N$中 Lebesgue 测度. 因此当$A\cap B=\varnothing$时，$W(A)$与$W(B)$独立，增量$W(A)$的方差为$\mathscr{L}_N(A)$. 在这种意义下，W具有平稳独立增量. 这一性质使 Brown 单在多指标鞅论中起着核心作用.

关于 Brown 单的像集和图集的维数结果，[212]证明了

定理 2.1 $\dim(W([0,1]^N))=\mathrm{Dim}(W([0,1]^N))=\min(d,2N)$ *a.s.*

$\dim(\mathrm{Gr}(W([0,1]^N)))=\mathrm{Dim}(\mathrm{Gr}(W([0,1]^N)))=\min(2N,N+\frac{d}{2})$ *a.s.*

由于 Brown 单不具有LND，在研究一致维数结果时遇到困难. [229]证明了

定理 2.2 设$W=\{W(t),t\in\mathbb{R}_+^N\}$为$d$维 Brown 单，$N>\frac{1}{2}d$，则以概率 1，对任何紧集$F\subset\mathbb{R}^d$，有

$$\dim(W^{-1}(F))=N-\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}\dim(F).$$

关于 Brown 单进一步的分形性质，可参见[2,54,137,165,187,216,242].

§3 Stable 场

在这一节中，我们考虑一类比 Gauss 场更广的随机场——stable 场的分形性质. 称实值（或复值）随机变量 Y 为对称 p-stable 随机变量（$0<p\leqslant 2$），若 $\exists\ \sigma>0$ 使得 $\mathbf{E}(\exp\{izY\})=\exp\{-\sigma|z|^p\}$（或 $\mathbf{E}(\exp\{i\mathrm{Re}\bar{z}Y\})=\exp\{-\sigma|z|^p\}$. 显然，2－*stable* 随机变量即为 Gauss 随机变量.

定义 3.1 设 $T\subset\mathbb{R}^N$，称实值随机场 $X=\{X(t),t\in T\}$ 为 $(N,1,p)$stable 场，若对任意 $m\geqslant 1,t_1,\cdots,t_m\in T$ 及 $a_k\in\mathbb{R}^1(k=1,\cdots,m)$，线性组合 $\sum\limits_{k=1}^{m}a_kX(t_k)$ 是对称 p－*stable* 随机变量.

显然，stable 场是 Gauss 场的一种推广. 第三章中讨论的 stable 过程是 stable 场中十分重要的一类，其研究已比较完善，但一般 stable 场的样本性质较之 Gauss 场而言结果显得非常少，并且研究起来也困难得多.

文献[166,167]研究了 stable 场的轨道正则性及奇异性. 在[166]中 Nolan 试图将[41,1]关于 Gauss 场的像集和图集的 Hausdorff 维数结果推广到具有平稳增量的 $(N,d,\bar{p})$stable 场（其中 $\bar{p}=(p_1,\cdots,p_d)$），但其结论是错误的. 文[231]改正了这一错误，证明了：

定理 3.1 在[166]的定理 4.1 的假设下，$\forall\ E\subset\mathbb{R}^N$，有

$\dim(X(E))=$

$$\min\left\{d;\frac{\dim(E)+\sum\limits_{i=1}^{k}(\alpha_k-\alpha_i)}{\alpha_k},1\leqslant k\leqslant d\right\}\quad a.s.$$

$$\dim(\mathrm{Gr}(X(E)))=\min\left\{\frac{\dim(E)+\sum_{i=1}^{k}(\alpha_k-\alpha_i)}{\alpha_k},1\leqslant k\leqslant d;\dim(E)+\sum_{i=1}^{d}(1-\alpha_i)\right\}\quad a.s.\ ,$$

其中 $0<\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\leqslant\alpha_d\leqslant1$ 同[166].

文[166,167]对stable场定义了 LND，讨论了某些stable场具有 LND 的条件，并对 $LND(N,d,\overline{p})$stable场得到了水平集的一致维数. 关于 k 重点，有

定理3.2 设 $X=\{X(t),t\in[0,1]^N\}$是 $LND(N,d,\overline{p})$stable场，若 $Nk<(k-1)\sum_{i=1}^{d}\alpha_i$，则 X $a.s.$ 没有 k 重点；若 $Nk>(k-1)\sum_{i=1}^{d}\alpha_i$，则 X 以正概率有 k 重点，且 $P(\dim(M_k)=Nk-(k-1)\sum_{i=1}^{d}\alpha_i)>0$.

证明详见[231]. 这是LND Gauss场 k 重点集结果在stable场情形的推广.

定理3.3 设 $X=\{X(t),t\in[0,1]^N\}$是 $LND(N,d,\overline{p})$stable场，$N>\sum_{i=1}^{d}\alpha_i$，则 X 具有联合连续局部时 $\alpha(x,t)(x\in\mathbb{R}^d,t\in[0,1]^N)$，且 $a.s.$ 对任意 $x\in\{y\in\mathbb{R}^d:\alpha(y,[0,1]^N)>0\}$都有

$$\dim(X^{-1}(x))=N-\sum_{i=1}^{d}\alpha_i.$$

此定理给出了水平集的一致维数结果，其证明详见[166,167].

在stable场中，很重要的一类是[54]研究的多参数stable单，它包含了Brown单为其特例. 关于stable场的进一步的分形性质，可参见[231,54,238,242,232].

§4 二参数 O-U 过程

多参数 Ornstein－Uhlenbeck 过程已有不少文献进行研究，这也是一类很重要的随机过程. 本节我们考察二参数 d 维 Ornstein－Uhlenbeck 过程像集的分形性质，主要取材于[227].

称平面上的实值随机过程 $Y=\{Y_t, t=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}_+^2\}$ 为二参数(1 维)Ornstein－Uhlenbeck 过程，如果

$$Y_t = e^{-\alpha t_1-\beta t_2}\left(Y_0+\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} e^{a\alpha+b\beta}dW(a,b)\right) \quad t=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}_+^2,$$

其中 $\alpha>0$，$\beta>0$ 为常数，$W(a,b)$ 为二参数 Brown 单，Y_0 与 $W(a,b)$ 独立，$Y_0\sim N(0,1)$.

设 $Y^{(1)},\cdots,Y^{(d)}$ 均为二参数(1 维)Ornstein－Uhlenbeck 过程，若它们相互独立且具有相同的有限维分布，则称

$$X_t=(Y_t^{(1)},\cdots,Y_t^{(d)}),t\in\mathbb{R}_+^2$$

为二参数 d 维 Ornstein－Uhlenbeck 过程.

下设 $X=\{X_t,t\in\mathbb{R}_+^2\}$ 为二参数 d 维 Ornstein－Uhlenbeck 过程. 下面用 c 表常数，每次不一定相同.

定理 4.1 对任意紧集 $E\subset\mathbb{R}_+^2$，

$$\dim(X(E))=\min(d,2\dim(E)) \quad a.s..$$

证 因为 X $a.s.$ 满足指数 $<\frac{1}{2}$ 的一致 Hölder 条件，由[115]第 10 章定理 6 知对任意紧集 $E\subset\mathbb{R}_+^2$，有 $\dim(X(E))\leqslant\min(d,2\dim(E))$ $a.s.$.

下面证明相反的不等式. $\forall\ \gamma<\min(d,2\dim$ [illegible] ostman 定理知在 E 上存在有限测度 σ 使得

$$\iint_{EE}\frac{1}{|z-z'|^{\gamma/2}}\sigma(dz)\sigma(dz')<\infty. \tag{4.1}$$

我们考虑

$$\mathbf{E}\left(\iint_{EE}\frac{1}{|X_t-X_{t'}|^{\gamma}}\sigma(dt)\sigma(dt')\right)$$

$$=\iint_{EE}\mathbf{E}(|X_t - X_{t'}|^{-\gamma})\sigma(dt)\sigma(dt'). \tag{4.2}$$

$$\mathbf{E}(|X_t-X_{t'}|^{-\gamma})$$
$$=\{\mathbf{E}(|Y_t^{(1)}-Y_{t'}^{(1)}|)\}^{-\gamma/2}\mathbf{E}(\chi^2(d))^{-\gamma/2},$$

其中 $\chi^2(d)$ 服从自由度为 d 的 χ^2 分布. 当 $\gamma<d$ 时, $\mathbf{E}(\chi^2(d))^{-\gamma/2}<\infty$. 由[34]命题 6,

$$\mathbf{E}(|Y_t^{(1)}-Y_{t'}^{(1)}|^2)\geqslant c|t-t'|. \tag{4.3}$$

所以由(4.1)、(4.2)、(4.3)知

$$\mathbf{E}(\iint_{EE}\frac{1}{|X_t - X_{t'}|^{\gamma}}\sigma(dt)\sigma(dt')$$
$$\leqslant c\iint_{EE}\frac{1}{|t - t'|^{\gamma/2}}\sigma(dt)\sigma(dt') < \infty.$$

这便证得

$$\dim(X(E))\geqslant\min(d,2\dim(E)) \quad a.s. .$$

当 $2\dim(E)>d$ 时, $\dim(X(E))=d \quad a.s.$,此时我们可以证得更强的结论.

定理 4.2 若 $\dim(E)>\frac{1}{2}d$,则 $X(E)$ $a.s.$ 具有正 Lebesgue 测度.

证 因为 $\frac{d}{2}<\dim(E)$,故在 E 上存在有限正测度 σ,使得

$$\iint_{EE}\frac{1}{|t - t'|^{d/2}}\sigma(dt)\sigma(dt') < \infty. \tag{4.4}$$

记 μ 是 σ 在 X 下的诱导测度,则 μ 是 $X(E)$ 上的随机测度,其 Fourier 变换为

$$\hat{\mu}(u) = \int_E e^{i\langle u,X_t\rangle}\sigma(dt).$$

由(4.3)、(4.4)得

$$\mathbf{E}(\int_{\mathbb{R}^d}|\hat{\mu}(u)|^2du)$$
$$=\int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{E}(|\hat{\mu}(u)|^2)du$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \iint_{E\,E} \mathbf{E}(e^{i\langle u, X_t - X_{t'}\rangle}) \sigma(dt)\sigma(dt')du$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \iint_{E\,E} e^{-\frac{c}{2}|u|^2 |t-t'|} \sigma(dt)\sigma(dt')du$$

$$= c\iint_{E\,E} \frac{1}{|t-t'|^{d/2}} \sigma(dt)\sigma(dt') < \infty,$$

所以 $\hat{\mu} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ $a.s.$. 由[57]引理 6.7 知 $X(E)$ $a.s.$ 具有正 Lebesgue 测度.

对于 Brown 运动和分数 Brown 运动,[115]证明了更强的结论:若 $\dim(E) > \frac{d}{2}$,则 $X(E)$ $a.s.$ 具有内点. 对于二参数 d 维 Ornstein—Uhlenbeck 过程,我们只能证明下面稍弱些的结论.

对 $\theta \in [0, 2\pi]$, $E \subset \mathbb{R}^2$,我们记 $\theta(E)$ 是 E 旋转 θ 角度得到的集合.

定理 4.3 设 E 为 $\mathbb{R}^2$ 中紧集, $\dim(E) > \frac{1}{2}d$,则几乎所有的 $\theta \in [0, 2\pi]$ 具有下列性质:若 $\theta(E) \subset \mathbb{R}^2_+$,则 $X(\theta(E))$ $a.s.$ 具有内点.

这个定理的证明需要下列两个引理.

记 $S(k)$ 为 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 的所有排列的集合. 若 $\pi \in S(k)$,记

$$\Gamma_\pi = \{(s_1, t_1, \cdots, s_k, t_k) : s_1 < \cdots < s_k, t_{\pi(1)} < \cdots < t_{\pi(k)}\}.$$

由[164]中引理 1.3.4 即得:

引理 4.1 设紧集 $E \subset \mathbb{R}^2$, $\alpha = \dim(E) > \frac{1}{2}d$,则对几乎所有的 $\theta \in [0, 2\pi]$,在 $\theta(E)$ 上存在有限正测度 σ,使得对任意 $k \geqslant 2$ 及任意排列 $\pi \in S(k)$,

$$I_\pi = \int_{\Gamma_\pi} \left\{ \prod_{i=1}^{k-1} |s_{i+1} - s_i|^{\frac{\alpha}{2}} \right\}^{-1} \left\{ \prod_{i=1}^{k-1} |t_{\pi(i+1)} - t_{\pi(i)}|^{\alpha/2} \right\}^{-1} \cdot \prod_{i=1}^{k} \sigma(ds_i, dt_i) < \infty.$$

引理 4.2 设 $E \subset \mathbb{R}^2_+$ 为紧集,若存在 $\gamma > \frac{1}{2}d$ 及 E 上的有限

正测度 σ 使得：$\forall\ k\geqslant 1$ 及 $\forall\ \pi\in S(2k)$，$I_\pi<\infty$，则二参数 Ornstein—Uhlenbeck 过程 X 的像集 $X(E)$ a.s. 包含内点.

现在证明定理 4.3. 不妨设 $E\subset[\varepsilon,\infty)^2(\varepsilon>0)$. 由[71]§6 注 6，只须证明随机测度

$$\mu(A)=\sigma(X^{-1}(A)),A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$$

具有密度函数 $\alpha(x,E)$，且 $x\to\alpha(x,E)$ 连续. 在定理 4.2 的证明中我们给出了 $\alpha(x,E)$ 存在且 $\alpha(x,E)\in L^2(\mathbb{R}^d)$ 的条件，为证 $\alpha(\cdot,E)$ 的连续性，由[245]命题 6.1，只需证明 $\forall\ k\geqslant 1$，有

$$\int_{E^{2k}}\int_{(\mathbb{R}^d)^{2k}}\prod_{i=1}^{2k}|u_i|^{\frac{1}{2}(\alpha-\frac{1}{2}d)}\exp\Big(-\mathrm{Var}\big(\sum_{i=1}^{2k}\langle u_i,X(s_i,t_i)\rangle\big)\Big)\cdot\prod_{i=1}^{2k}du_i\prod_{i=1}^{2k}\sigma(ds_i,dt_i)<\infty. \tag{4.5}$$

若记 $W=(W^{(1)},\cdots,W^{(d)})$ 为 d 维 Brown 单，则由[217]§2 中引理 1 之(Ⅱ)知在 Γ_π 上，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\big(\sum_{i=1}^{2k}\langle u_i,X(s_i,t_i)\rangle\big)\\
&=\mathrm{Var}\Big[\sum_{i=1}^{2k}\langle u_i,e^{-\alpha s_i-\beta t_i}X_0\rangle\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{2k}\langle u_i,e^{-\alpha s_i-\beta t_i}W\Big(\frac{e^{2\alpha s_i}-1}{2\alpha},\frac{e^{2\beta t_i}-1}{2\beta}\Big)\Big]\\
&\geqslant\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{2k}\langle u_i',W\Big(\frac{e^{2\alpha s_i}-1}{2\alpha},\frac{e^{2\beta t_i}-1}{2\beta}\Big)\rangle\Big)\ (u_i'=u_ie^{-\alpha s_i-\beta t_i})\\
&\geqslant c\sum_{i=1}^{2k}\Big|\sum_{j=1}^{2k}u_j'\Big|^2\Big|\frac{e^{2\alpha s_i}-e^{2\alpha s_{i-1}}}{2\alpha}\Big|+\\
&\quad c\sum_{i=1}^{2k}\Big|\sum_{j=1}^{2k}u_{\pi(j)}'\Big|^2\Big|\frac{e^{2\beta t_{\pi(i)}}-e^{2\beta t_{\pi(i-1)}}}{2\beta}\Big|
\end{aligned}$$

其中 $s_0=t_{\pi(0)}=\varepsilon$. 根据拉格朗日中值定理，

$$\begin{aligned}
\text{上式}\geqslant&\ c\sum_{i=1}^{2k}\Big|\sum_{j=1}^{2k}u_j'\Big|^2|s_i-s_{i-1}|\\
&+c\sum_{i=1}^{2k}\Big|\sum_{j=1}^{2k}u_{\pi(j)}'\Big|^2|t_{\pi(i)}-t_{\pi(i-1)}|.
\end{aligned}$$

进行变量代换及 Cauchy--Schwartz 公式知：

(4.5)式左端积分

$$\leqslant (2k)! \sum_{\pi \in S(2k)} \int_{\Gamma_\pi} \prod_{i=1}^{2k} \sigma(ds_i, dt_i) \cdot$$

$$\left\{ \int_{(\mathbf{R}^d)^{2k}} \prod_{i=1}^{2k} |u_i|^{\frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{2}d)} exp(-c \sum_{i=1}^{2k} |\sum_{j=1}^{2k} u_j'|^2 |s_i - s_{i-1}|) \prod_{i=1}^{2k} du_i \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\left\{ \int_{(\mathbf{R}^d)^k} \prod_{i=1}^{2k} |u_i|^{\frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{2}d)} exp(-c \sum_{i=1}^{2k} |\sum_{j=1}^{2k} u_{\pi(j)}'|^2 |t_{\pi(i)} - t_{\pi(i-1)}| \prod_{i=1}^{2k} du_i \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant c(2k)! \int_{\Gamma_\pi} \left\{ \prod_{i=1}^{2k-1} |s_{i+1} - s_i|^{\frac{\alpha}{2}} \right\}^{-1} \left\{ \prod_{i=1}^{2k-1} |t_{\pi(i+1)} - t_{\pi(i)}|^{\frac{\alpha}{2}} \right\}^{-1} \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{2k} \sigma(ds_i, dt_i) < \infty.$$

综合引理 4.1 及引理 4.2 便证明了定理 4.3.

第七章

随机徘徊中的离散分形

本章沿用第一章§5的符号. 例如,$\mathbb{Z}^d$表d维整数格子点集,$\mathbb{R}^d$表d维欧氏空间,$\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^1$,$\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$,$\mathbb{Z}_+^d=\{x\in\mathbb{Z}^d: x\geqslant 0\}$,$\mathbb{R}_+^d=\{x\in\mathbb{R}^d: x\geqslant 0\}$,$d\in\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$. $\forall\ x\in\mathbb{R}^d$,$A\subset\mathbb{R}^d$,$\alpha\in\mathbb{R}$,定义$\alpha A=\{\alpha y: y\in A\}$,$A+x=\{y+x: y\in A\}$. $\mathbb{R}^d$(特别地,其中的子集$\mathbb{Z}^d$)中的元素x有时记为$x=(x_1,\cdots,x_d)$.

对任何$x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{Z}^d$,$n\in\mathbb{N}$,记

$$C(x,n)=\{y\in\mathbb{Z}^d: x_i\leqslant y_i<x_i+n, 1\leqslant i\leqslant d\},$$

$$V(x,n)=\{y\in\mathbb{Z}^d: x_i-\frac{n}{2}\leqslant y_i<x_i+\frac{n}{2}, 1\leqslant i\leqslant d\}.$$

$\mathscr{E}$、$\mathscr{E}_d$、$\mathscr{E}_s$分别为下面定义的全体立方体、全体二进制立方体、全体半二进制立方体:

$$\mathscr{E}=\{C(x,n): x\in\mathbb{Z}^d, n\in\mathbb{N}\},$$

$$\mathscr{E}_d=\{C(x,2^n): x\in 2^n\mathbb{Z}^d, n\in\{0\}\cup\mathbb{N}\},$$

$$\mathscr{E}_s=\{C(x,2^n): x\in 2^{n-1}\mathbb{Z}^d, n\in\mathbb{N}\},$$

再记

$$s(A)\equiv\min\{r\in\mathbb{N}: 存在\ x\in\mathbb{Z}^d, 使\ C(x,r)\supset A\}$$

为A的边长($A\subset\mathbb{Z}^d$),

$\mathscr{E}_d^k$、$\mathscr{E}_s^k$分别为边长为2^k的二进制立方体全体和半二进制立方体全体,即

$$\mathscr{E}_d^k=\{C(x,2^k): x\in 2^k\mathbb{Z}^d\}, k\in\{0\}\cup\mathbb{N},$$

$$\mathscr{E}_s^k=\{C(x,2^k): x\in 2^{k-1}\mathbb{Z}^d\}, k\in\mathbb{N}.$$

$\forall\, x\in\mathbb{Z}^d, k\in\{0\}\cup\mathbb{N}$，记 $Q_k(x)$ 是 $\mathscr{E}_d^k$ 中含 x 的唯一的那个边长为2^k 的二进制立方体. $\forall\, x\in\mathbb{Z}^d, k\in\mathbb{N}$，记 $\tilde{V}(x,2^k)$是 $\mathscr{E}_*^k$ 中含 x 的其中心与 x 最近的边长为2^k 的唯一的半二进制立方体.

§1 暂留的随机徘徊的分形集

定义1.1 设$\{U_n,n\geqslant 1\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的取值于$\mathbb{Z}^d$的独立同分布的随机变量序列，则称$\{X_n=\sum\limits_{k=1}^{n}U_k,n\geqslant 1\}$为$\mathbb{Z}^d$上的随机徘徊. 称随机徘徊是暂留的，如果$|X_n|\to\infty$(当 $n\to\infty$ 时)$a.s.$，此处$|\cdot|$表$\mathbb{R}^d$中的欧氏范数.

设 U_n 的公共分布函数为 $F(x)$，$(n\geqslant 1)$，称 $F(x)$(或者$\{U_n\}$，或者 $F(x)$的特征函数，或者随机徘徊$\{X_n,n\geqslant 1\}$)属于指数为$\alpha\in(0,2]$的稳定律吸引场，如果存在实数序列$\{A_n,n\geqslant 1\}$和正实数序列$\{B_n,n\geqslant 1\}$，使 $B_n\uparrow\infty$(当$n\uparrow\infty$时)，且$(X_n-A_n)/B_n$ 当 $n\uparrow\infty$ 时其极限分布为指数为 α 的稳定律.(指数为 α 的稳定律的定义请参见本书第三章§1或[100]第六章§2).

称随机徘徊$\{X_n,n\geqslant 1\}$是常返的. 如果$\forall\, x\in\mathbb{Z}^d,\forall\, m\geqslant 1$，总有 $P(\bigcap\limits_{n=m}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}\{X_k=x\}\mid X_m=x)=1$. "常返"的直观意义是：随机徘徊从任一状态 x 出发，它将无穷多次地返回 x 的概率为1.

本节恒设 $\mathbf{E}(U_n)=0$，$(n\geqslant 1)$.

定义1.2 称$\mathbb{Z}^d$上的随机徘徊$\{X_n,n\geqslant 1\}$是严 α—稳定的，如果：

(1)$\mathbf{E}(X_n)=0$，$(n\geqslant 1)$；

(2)$\{X_n,n\geqslant 1\}$属于指数为 α 的稳定律吸引场；

(3)若令 $G(x,y)=\mathbf{E}^x(\#\{n\geqslant 1:X_n=y\})$，则存在正的常数 $c_1,c_2>0$，使

$$\frac{c_1}{|x-y|^{d-\alpha}}\leqslant G(x,y)\leqslant\frac{c_2}{|x-y|^{d-\alpha}},\left(\begin{matrix}x\neq y,\\ x,y\in\mathbb{Z}^d\end{matrix}\right),\qquad(1.1)$$

其中 $\alpha\in(0,2]$，$\mathbf{E}^x$ 表示关于 $P(\cdot\mid X_1=x)$ 的期望算子，简记 $P(\cdot\mid X_1=x)$ 为 $P^x(\cdot)$.

注意：若 $\{X_n,n\geqslant1\}$ 是暂留的，则对任何 $x,y\in\mathbb{Z}^d$，有 $0\leqslant G(x,y)<\infty$.

本节恒设 $\{X_n,n\geqslant1\}$ 是暂留的. 令

$$\tau_A=\inf\{n>1:X_n\in A\},(A\subset\mathbb{Z}^d)\tag{1.2}$$

是 $\{X_n,n\geqslant1\}$ 对 A 的击中时(Hitting time)，特别地，若 $A=\{x\}$ 是单点集，则记 $\tau_{\{x\}}$ 为 τ_x.

若记

$$\delta=P^x(\tau_x=\infty)=P^x(X_n\neq x,\forall\ n>1),\tag{1.3}$$

则用 $\{X_n,n\geqslant1\}$ 的马氏性易证

$$\begin{aligned}&P^x(\#\{n\geqslant1:X_n=x\}=1)\\&\quad=P^x(X_n\neq x,\forall\ n>1)=\delta,\\&P^x(\#\{n\geqslant1:X_n=x\}=2)\\&\quad=\bigcup_{i=2}^{\infty}P^x(X_i=x,X_j\neq x,j\geqslant2,j\neq i)\\&\quad=\bigcup_{i=2}^{\infty}P^x(X_2\neq x,\cdots,X_{i-1}\neq x,X_i=x)P^x(X_n\neq x,n>1)\\&\quad=\delta P^x(\tau_x<\infty)=\delta(1-\delta),\\&\quad\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$P^x(\#\{n\geqslant1:X_n=x\}=k)=\delta(1-\delta)^{k-1},\quad(\forall\ k=2,3,\cdots).\tag{1.4}$$

注意，由 $\{X_n,n\geqslant1\}$ 的暂留性知 $\delta>0$. 所以，若令 $\rho=\frac{1}{\delta}$，由(1.4)可得

$$\begin{aligned}G(x,x)&=\mathbf{E}^x(\#\{n\geqslant1:X_n=x\})\\&=\sum_{k=1}^{\infty}k\delta(1-\delta)^{k-1}=\frac{1}{\delta}=\rho.\end{aligned}\tag{1.5}$$

由随机徘徊的"空齐性"易见 $\delta=P^x(\tau_x=\infty)$ 不依赖 x.

对 $\{X_n,n\geqslant1\}$ 在 τ_y 上用强马氏性可得：

$$P^x(\#\{n\geqslant 1:X_n=y\}=k)$$
$$=P^x(\tau_y<\infty)(P^y(\tau_y<\infty))^{k-1}P^y(\tau_y=\infty), \quad (1.6)$$
$$(\forall\ k=1,2,\cdots).$$

所以

$$G(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}kP^x(\#\{n\geqslant 1:X_n=y\}=k)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}P^x(\tau_y<\infty)(1-\delta)^{k-1}\delta k$$
$$=P^x(\tau_y<\infty)\frac{1}{\delta}, \quad (1.7)$$

从而

$$P^x(X_n=y\text{ 对某个 }n\geqslant 1\text{成立})$$
$$=P^x(\tau_y<\infty)=\delta G(x,y)=\rho^{-1}G(x,y), \quad (1.8)$$
$$(\forall\ x\neq y\in\mathbb{Z}^d).$$

显然，当 $x,y\in\mathbb{Z}^d$，$x=y$ 时，(1.8)左、右两边都是1，所以

$$P^x(X_n=y\text{ 对某个 }n\geqslant 1\text{成立})$$
$$=\rho^{-1}G(x,y),(\forall\ x,y\in\mathbb{Z}^d). \quad (1.9)$$

当(1.1)成立时，由(1.9)可推出：

$$P^x(X_n=y\text{ 对某个 }n\geqslant 1\text{成立})$$
$$\approx|x-y|^{-(d-\alpha)}.\ (x\neq y). \quad (1.10)$$

下面是我们这一节的主要结果

定理1.1([16])设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是$\mathbb{Z}^d$上暂留的严α一稳定的随机徘徊，$\alpha<d$. 令

$$A=A(\omega)=\{x\in\mathbb{Z}^d;\exists\ n\geqslant 1\text{使 }X_n(\omega)=x\}$$

是$\{X_n,n\geqslant 1\}$的像集，则对 $a.s.$ 的 ω，A 是一个维数为 α 的分形集，即是$(D)\dim(A)=(D)\mathrm{Dim}(A)=\alpha\quad a.s.$.

在证明此理以前，需要一些引理.

令

$$h_B(x)=P^x(X_n\in B\text{ 对某个 }n\geqslant 1\text{成立}),(\forall\ B\subset\mathbb{Z}^d), \quad (1.11)$$

当 B 是有限集时，必存在 $l_B(y)\geqslant 0$，$(\forall\ y\in\mathbb{Z}^d)$，使

$$h_B(x)=\sum_{y\in B}G(x,y)l_B(y),(\forall\ x\in\mathbb{Z}^d)\ ,\tag{1.12}$$

称之为 B 上的容度分布，而称

$$\begin{aligned}\mathrm{Cap}_G(B)&\equiv\sum_{y\in B}l_B(y)\\&=\max\{\sum_{y\in B}\mu(y):\mu\geqslant 0,\sum_{y\in B}G(x,y)\mu(y)\leqslant 1\}\end{aligned}\tag{1.13}$$

为 B 的自然容度.（参见[194]）

引理1.1 设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是暂留的严 α—稳定的随机徘徊，$\alpha<d$，则对任何边长为 r 的立方体 $C(x,r)$，总有常数 $c_3,c_4>0$，使

$$c_3r^{d-\alpha}\leqslant\mathrm{Cap}_G(C(x,r))\leqslant c_4r^{d-\alpha},(r\geqslant 1,x\in\mathbb{Z}^d).\tag{1.14}$$

证 若 $y=x-rw,w=(1,0,\cdots,0)\in\mathbb{Z}^d$，则 y 与 $C(x,r)$ 的距离为 r，所以对任何 $x_1\in C(x,r)$，总有 $r\leqslant|y-x_1|\leqslant r\sqrt{d}$. 因此，由(1.11)、(1.12)和(1.1)有常数 $c_5>0$，使

$$1\geqslant h_{C(x,r)}(y)\geqslant\frac{c_5}{r^{d-\alpha}}\mathrm{Cap}_G(C(x,r)).\tag{1.15}$$

所以(1.14)的第二个不等式成立.

再证(1.14)的第一个不等式. 令 μ 是 $C(x,r)$ 上的测度且在每一点上取测度值 $c_6r^{-\alpha}$，则$\forall\ y\in\mathbb{Z}^d$，当$2^{k_0-1}\leqslant\sqrt{d}\,r<2^{k_0}$时，有

$$\begin{aligned}&\sum_{x_1\in C(x,r)}G(y,x_1)\mu(x_1)\\&\leqslant\rho\mu(y)+\sum_{\substack{x_1\in C(x,r)\\x_1\neq y}}G(y,x_1)\mu(x_1)\\&\leqslant\rho\mu(y)+\sum_{\substack{x_1\in C(x,r)\\x_1\neq y}}\frac{c_2}{|x_1-y|^{d-\alpha}}\mu(x_1)\\&\leqslant\rho\mu(y)+2\sup_{w\in C(x,r)}\sum_{\substack{x_1\in C(x,r)\\x_1\neq w}}\frac{c_2}{|x_1-w|^{d-\alpha}}\mu(x_1)\\&\leqslant\rho\mu(y)+2\sup_{w\in C(x,r)}\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{\substack{x_1\in C(x,r)\\2^{k-1}\leqslant|x_1-w|<2^k}}\frac{c_2\mu(x_1)}{|x_1-w|^{d-\alpha}},\end{aligned}$$

(因为$\{w,x_1\}\subset C(x,r)$,$x_1\neq w\Rightarrow 1\leqslant|x_1-w|\leqslant\sqrt{d}\,r$). 但是$C(x,r)\cap\{x_1:2^{k-1}\leqslant|x_1-w|<2^k\}$中的点的个数为$O(2^{kd})$,(当$w\in C(x,r)$时),所以对任意的$y\in\mathbb{Z}^d$,有:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x_1\in C(x,r)} G(y,x_1)\mu(x_1)\\
&\qquad\leqslant \rho\mu(y)+2\sum_{k=1}^{k_0}\frac{c_2\mu(x_1)}{2^{(k-1)(d-\alpha)}}\cdot c_7 2^{kd}\\
&\qquad= \rho\mu(y)+4c_2c_6c_7r^{-\alpha}\sum_{k=1}^{k_0}2^{(k-1)\alpha}\\
&\qquad= \rho c_6 r^{-\alpha}+4c_2c_6c_7r^{-\alpha}\frac{1-2^{k_0\alpha}}{1-2^{\alpha}}\\
&\qquad\leqslant\left(\rho c_6+4c_2c_6c_7\frac{1-(2\sqrt{d}\,r)^{\alpha}}{1-2^{\alpha}}\right)r^{-\alpha},
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

注意ρ、c_2、c_7、d、α皆为正的常数,故取c_6为充分小的正常数可使(1.16)右方$\leqslant 1$(对一切$r=1,2,\cdots$). 由(1.16)和(1.13)得

$$\mathrm{Cap}_G(C(x,r))\geqslant\sum_{x_1\in C(x,r)}\mu(x_1)=r^d\cdot\frac{c_6}{r^{\alpha}}.$$

取$c_4=c_6$,由上述不等式即得(1.14)的第一个不等式. 引理1.1证毕.

推论1.1 在引理1.1的条件下,若$\sqrt{d}\,r<\varepsilon|x|$,$(0<\varepsilon<1)$则

$$P^0(X_n\in C(X,r)\text{对某个}n\geqslant 1\text{成立})\approx\left(\frac{r}{|x|}\right)^{d-\alpha}. \tag{1.17}$$

证 当$y\in C(x,r)$,$\sqrt{d}\,r<\varepsilon|x|$时,恒有

$$
\begin{aligned}
(1-\varepsilon)|x|\leqslant|x|-\sqrt{d}\,r\leqslant|x|-|x-y|\leqslant|y|\leqslant|x|+|x-y|\\
\leqslant|x|+\sqrt{d}\,r\leqslant(1+\varepsilon)|x|,
\end{aligned}
$$

即

$$|y|\approx|x|. \tag{1.18}$$

由(1.11)、(1.12)、(1.1)、(1.18)、(1.13)、(1.14)得:

$P^0(X_n\in C(x,r)$对某个$n\geqslant 1$成立)

$$= h_{C(x,r)}(0) = \sum_{y \in C(x,r)} G(0,y) l_{C(x,r)}(y)$$

$$\approx \sum_{y \in C(x,r)} |y|^{-(d-\alpha)} l_{C(x,r)}(y)$$

$$\approx |x|^{-(d-\alpha)} \mathrm{Cap}_G(C(x,r)) \approx \left(\frac{r}{|x|}\right)^{d-\alpha}.$$

推论1.2 在引理1.1的条件下，再设$n \geqslant 5$，$S_n = V(0,2^n) - V(0,2^{n-1})$如第一章§5所定义，而

$$N_k^n = \#\left\{C(x,2^k) \in \mathscr{E}_d^k : \begin{array}{c} C(x,2^k) \subset S_n, \text{且} \exists\ m \geqslant 1 \text{使} \\ X_m \in C(x,2^k) \end{array}\right\},$$

$$M_k^n = \#\left\{C(x,2^k) \in \mathscr{E}_s^k : \begin{array}{c} C(x,2^k) \subset S_n, \text{且} \exists\ m \geqslant 1 \text{使} \\ X_m \in C(x,2^k) \end{array}\right\},$$

则对于$|x| < 2^{n-4}$，$\sqrt{d}\,2^k < 2^{n-3}$，$n > \sqrt{d}\,5$，一致地有

$$\mathbf{E}^x(N_k^n) \approx \mathbf{E}^x(M_k^n) \approx 2^{(n-k)\alpha}. \tag{1.19}$$

证 $\#\{C(x,2^k) \in \mathscr{E}_d^k : C(x,2^k) \subset S_n\} \approx$

$$\#\{C(x,2^k) \in \mathscr{E}_s^k : C(x_1,2^k) \subset S_n\} \approx 2^{(n-k)d}.$$

而对任何属于$\mathscr{E}_d^k$且含于S_n的立方体必有下述形式

$$C(2^k y, 2^k),\ y \in \mathbb{Z}^d,\ 2^k y \in S_n.$$

所以 $2^{n-1} \geqslant |2^k y| \geqslant 2^{n-2}$，而$|x| < 2^{n-4}$，因此，

$$|2^k y - x| > 3 \times 2^{n-4}，\text{故}\sqrt{d}\,2^k < \frac{1}{1 \times 5}|2^k y - x|,$$

从而用随机徘徊的“空齐性”及推论1.1可得

$$P^x(X_m \in C(2^k y, 2^k)\text{对某个}\ m \geqslant 1\text{成立})$$

$$= P^0(X_m \in C(2^k y - x, 2^k)\text{对某个}\ m \geqslant 1\text{成立})$$

$$\approx \left(\frac{2^k}{2^n}\right)^{d-\alpha}. \tag{1.20}$$

所以

$$\mathrm{E}^x(N_k^n) \approx 2^{(n-k)d} \cdot 2^{-(n-k)(d-\alpha)} = 2^{(n-k)\alpha}.$$

仿之可证

$$\mathbf{E}^x(M_k^n) \approx 2^{(n-k)\alpha}.$$

推论1.3 在引理1.1的条件下，当$n > 5\sqrt{d}$，$|x| < 2^{n-4}$时有

$$\mathbf{E}^x(\#(A\cap S_n))\approx 2^{n\alpha}, \tag{1.21}$$

其中 A 为定理1.1中所定义.

证　在推论1.2中取 $k=0$ 即得(1.21),(因为 $N_0^n=\#(A\cap S_n)$).

定义1.3　对任何 $B\subset\mathbb{Z}^d, t\leqslant\infty$,,定义

$$T_B(t)\equiv\#\{n\leqslant t: X_n\in B\} \tag{1.22}$$

为 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 到时刻 t 为止在 B 上的逗留时间.

推论1.4　在推论1.3的条件下,有

$$\mathbf{E}^x(T_{S_n}(\infty))\approx 2^{n\alpha}. \tag{1.23}$$

证　因为 $\mathbf{E}^x(T_{S_n}(\infty))=\rho E^x(\#\{A\cap S_n\})$.

引理1.2　设 $B\subset\mathbb{Z}^d$,令 $D(B)=\{x-y: x,y\in B\}$,若 $0<\mathbf{E}(T_{D(B)}(t))<\infty$,

则 $\forall\ \delta\in(0,1)$,$\exists\ \lambda_0=\lambda_0(\delta)>0$,使得对一切 $\lambda\geqslant\lambda_0, x\in B$ 有

$$P^x(T_B(t)\geqslant\lambda\mathbf{E}^0(T_{D(B)}(t)))\leqslant e^{-\delta\lambda}, \tag{1.24}$$

证明可参见[175]引理3.1.

现在来证定理1.1.显然,只需证:(1) $(D)\mathrm{Dim}(A)\leqslant\alpha$　a.s.;(2) $(D)\dim(A)\geqslant\alpha$　a.s..

(1) 由定义,

$$(D)\mathrm{Dim}(A)=\inf\{\beta>0: \tilde{p}_\beta(A,\varepsilon)<\infty, \forall\ \varepsilon>0\},$$

其中

$$\tilde{p}_\beta(A,\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\tau}_\beta(A,S_n,\varepsilon),$$

$$\tilde{\tau}_\beta(A,S_n,\varepsilon)=\max\Big\{\sum_i\Big(\frac{2^{k_i}}{2^n}\Big)^\beta: x_i\in A\cap S_n,$$

$$\tilde{V}(x_i,2^{k_i})\text{ 两两不交}, 1\leqslant 2^{k_i}\leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}.\Big\}$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{n(1-\varepsilon)}\max\Big\{(\# I_k^n)\Big(\frac{2^k}{2^n}\Big)^\beta: x_i\in A\cap S_n, (i\in I_k^n),$$

$$\text{且}\{\tilde{V}(x_i,2^k), i\in I_k^n\}\text{两两不交}\Big\}. \tag{1.25}$$

但是，$\forall\ i\in I_k^n, \tilde{V}(x_i,2^k)\in\mathscr{E}_s^k, x_i\in A\cap S_n, x_i\in V(x_i,2^{k-1})\subset$ $\tilde{V}(x_i,2^k)\ (k\geqslant 1)$（见第一章附注5.1），所以

$$\begin{aligned}\# I_k^n &\leqslant \#\{C(x,2^k)\in\mathscr{E}_s^k : C(x,2^k)\cap S_n\cap A\neq\varnothing\}\\ &\approx \#\{C(x,2^k)\in\mathscr{E}_s^k : C(x,2^k)\subset S_n, C(x,2^k)\cap A\neq\varnothing\}\\ &= M_k^n\quad (M_k^n\text{ 之定义见推论1.2}).\end{aligned}\tag{1.26}$$

所以，若取 $\beta=\alpha+2\delta, \delta>0$，则由推论1.2和(1.25)、(1.26)得：

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}^x(\tilde{\tau}_\beta(A,S_n,\varepsilon))\\ &\leqslant \mathbf{E}^x\Big(c_8\sum_{k=0}^{n(1-\varepsilon)} M_k^n\cdot 2^{\beta(k-n)}\Big)\\ &\leqslant c_9\sum_{k=0}^{n(1-\varepsilon)} 2^{\alpha(n-k)}\cdot 2^{\beta(k-n)}\\ &\leqslant c_{10}2^{-2n\varepsilon\delta}\quad,\quad(\text{当 } n\geqslant n_0(\varepsilon,x,d)).\end{aligned}\tag{1.27}$$

由(1.27)得

$$\begin{aligned}&P^x(\tilde{\tau}_\beta(A,S_n,\varepsilon)>2^{-n\varepsilon\delta})\\ &\leqslant \int_{\{\tilde{\tau}_\beta(A,S_n,\varepsilon)>2^{-n\varepsilon\delta}\}}\frac{\tilde{\tau}_\beta(A,S_n,\varepsilon)}{2^{-n\varepsilon\delta}}dP^x\\ &\leqslant 2^{n\varepsilon\delta}\mathbf{E}^x(\tilde{\tau}_\beta(A,S_n,\varepsilon))\\ &\leqslant c_{10}2^{-n\varepsilon\delta},\end{aligned}\tag{1.28}$$

故

$$\sum_{n\geqslant n_0}P^x(\tilde{\tau}_\beta(A,S_n,\varepsilon)>2^{-n\varepsilon\delta})<\infty.$$

因此，由 Borel—Cantelli 引理可知

$$P^x\Big(\bigcap_{m=n_0}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\{\tilde{\tau}_\beta(A,S_n,\varepsilon)>2^{-n\varepsilon\delta}\}\Big)=0,$$

此即：存在 $\Omega_x, P^x(\Omega_x)=1$，使 $\forall\ \omega\in\Omega_x, \exists\ n_1=n_1(\omega,\varepsilon,x,d)$，当 $n\geqslant n_1$ 时有

$$\tilde{\tau}_\beta(A(\omega),S_n,\varepsilon)\leqslant 2^{-n\varepsilon\delta}.\tag{1.29}$$

取 $\Omega^*=\bigcup_{x\in\mathbb{Z}^d}\Omega_x$，则 $P(\Omega^*)=1$，而且 $\forall\ \omega\in\Omega^*$，必有 $x\in\mathbb{Z}^d$，使 $\omega\in\Omega_x$，所以

$$\tilde{\tau}_\beta(A(\omega),S_n,\varepsilon)\leqslant 2^{-n\varepsilon\delta},(n\geqslant n_1(\omega,\varepsilon,x,d)).$$

故

$$\tilde{p}_\beta(A(\omega),S_n,\varepsilon)<\infty,(\forall\ \omega\in\Omega^*,\varepsilon>0). \tag{1.30}$$

所以 $(D)\mathrm{Dim}(A)\leqslant\beta=\alpha+2\delta\quad a.s.$. 而 $\delta>0$ 可以任意小，所以 $(D)\mathrm{Dim}(A)\leqslant\alpha\quad a.s.$.

(2)为证下界，关键的技巧是用第一章定理5.2(1)(离散形式的密度定理). 令

$$\mu(x)=1,(\forall\ x\in A),\mu(B)=\bigcup_{x\in B}\mu(x)\quad(B\subset A), \tag{1.31}$$

往证：存在常数 $c_{11}>0,\bar{\Omega},P(\bar{\Omega})=1$，使得 $\forall\ \omega\in\bar{\Omega},\exists\ n_2=n_2(\omega)$，当 $n\geqslant n_2(\omega)$ 时有

$$\mu(A\cap Q_r(y))\leqslant c_{11}n2^{r\alpha},(\forall\ y\in S_n,1\leqslant r\leqslant n), \tag{1.32}$$

其中 $Q_r(y)$ 是 $\mathscr{E}_d^r$ 中含 y 的边长为 2^r 的唯一的那个二进制立方体. 令

$$\eta_B=\inf\{n\geqslant 1:X_n\in B\},(B\subset\mathbb{Z}^d), \tag{1.33}$$

由 μ 的定义易见：对任意立方体 $c(x,r)\in\mathscr{E}$，有

$$\mu(C(x,r))>0\Leftrightarrow A\cap C(x,r)\neq\varnothing\Leftrightarrow\eta_{C(x,r)}<\infty. \tag{1.34}$$

所以

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}^x(\#\{Q_r(y)\in\mathscr{E}_d^r:y\in S_n,\mu(A\cap Q_r(y))>c_{11}n\cdot 2^{r\alpha}\})\\&\approx\mathbf{E}^x(\#\{Q_r(y)\in\mathscr{E}_d^r:Q_r(y)\subset S_n,\mu(A\cap Q_r(y))>c_{11}\cdot n\cdot 2^{r\alpha}\})\\&=\mathbf{E}^x(\#\{Q_r(y)\in\mathscr{E}_d^r:Q_r(y)\subset S_n,\eta_{Q_r(y)}<\infty,\\&\qquad\qquad\mu(A\cap Q_r(y))>c_{11}\cdot n\cdot 2^{r\alpha}\}).\end{aligned} \tag{1.35}$$

由于

$$\mu(A\cap Q_r(y))=\#(A\cap Q_r(y))\leqslant T_{Q_r(y)}(\infty), \tag{1.36}$$

以(1.36)代入(1.35)右方知

$$\begin{aligned}&(1.35)\text{右方}\leqslant\mathbf{E}^x(\#\{Q_r(y)\in\mathscr{E}_d^r:Q_r(y)\subset S_n,\\&\qquad\qquad\eta_{Q_r(y)}<\infty,T_{Q_r(y)}(\infty)>c_{11}\cdot n\cdot 2^{r\alpha}\})\\&\approx 2^{n-r}P^x(\eta_{Q_r(y)}<\infty,T_{Q_r(y)}(\infty)>c_{11}\cdot n\cdot 2^{r\alpha})\end{aligned}$$

$$= 2^{n-r} \sum_{\substack{m\geqslant 1 \\ \bar{y}\in Q_r(y)}} P^x(\eta_{Q_r(y)} = m, X_m = \bar{y}) \cdot$$
$$P^{\bar{y}}(T_{Q_r(y)}(\infty) > c_{11} n 2^{r\alpha} - 1) \tag{1.37}$$

但是

$$D(Q_r(y)) = \{y_1 - y_2 : y_1, y_2 \in Q_r(y)\} = V(0, 2^{r+1} - 1),$$

所以，由推论1.3有

$$\mathbf{E}^0(T_{D(Q_r(y))}(\infty)) = \mathbf{E}^0(T_{V(0,2^{r+1}-1)}(\infty)) \approx 2^{r\alpha}. \tag{1.38}$$

以(1.38)代入(1.37)右方并用引理1.2及推论1.2有：

$$(1.35)\text{右方} \leqslant 2^{n-r} \sum_{\substack{m\geqslant 1 \\ \bar{y}\in Q_r(y)}} P^x(\eta_{Q_r(y)} = m, X_m = \bar{y}) \cdot$$
$$\cdot P^{\bar{y}}(T_{Q_r(y)}(\infty) > c_{12} \cdot n\mathbf{E}^0(T_{D(Q_r(y))})(\infty)))$$
$$\overset{\text{引理1.2}}{\approx} 2^{n-r} \sum_{\substack{m\geqslant 1 \\ \bar{y}\in Q_r(y)}} P^x(\eta_{Q_r(y)} = m, X_m = \bar{y}) e^{-\delta c_{12} n}$$
$$= e^{-\delta c_{12} n} \cdot 2^{n-r} P^x(\eta_{Q_r(y)} < \infty)$$
$$\approx e^{-\delta c_{12} n} \mathbf{E}^x(M_r^n)$$
$$\approx e^{-\delta c_{12} n} 2^{(n-r)\alpha}, \qquad \left(\begin{array}{c} r < n - 3 - \sqrt{d}, \\ |x| < 2^{n-4} \end{array}\right). \tag{1.39}$$

由于 δ 是引理1.2中的在(0,1)中的常数，而 c_{11} 可取任意正数（从而 c_{12} 亦然），因此若取 $c_{12} \geqslant \dfrac{2\alpha}{\delta}$，则

$$(1.35)\text{左方} \leqslant c_{13} 2^{-(n+r)\alpha}, \qquad \left(\begin{array}{c} r < n - 3 - \sqrt{d}, \\ |x| < 2^{n-4} \end{array}\right). \tag{1.40}$$

把(1.40)对 r 求和得

$$E^x(\#\{Q_r(y) \in \mathscr{E}_d^r : y \in S_n, 1 \leqslant r \leqslant n, \mu(A \cap Q_r(y)) > c_{11} n \cdot 2^{r\alpha}\})$$
$$\leqslant c_{14} \sum_{r=1}^{n} 2^{-(n+1)\alpha} \leqslant c_{15} 2^{-n\alpha}, \tag{1.41}$$

（当 $n \geqslant n_3 = n_3(x, d)$）.

仿照(1.27)推(1.29)的方法，由(1.41)可得：$\exists\ \bar{\Omega}_x, P^x(\bar{\Omega}_x) = 1$，使 $\forall\ \omega \in \bar{\Omega}_x, \exists\ \bar{n}_2 = \bar{n}_2(x, \omega)$，当 $n \geqslant \bar{n}_2$ 时有：

$$\#\{Q_r(y)\in\mathscr{E}_d^{r_a}: y\in S_n, 1\leqslant r\leqslant n, \mu(A\cap Q_r(y))>c_{11}n2^{r\alpha}\}$$

$$\leqslant 2^{-\frac{1}{2}n\alpha}<1. \tag{1.42}$$

令 $\overline{\Omega}=\bigcup_{x\in\mathbb{Z}^d}\overline{\Omega}_x$，则 $P(\overline{\Omega})=1$. $\forall\ \omega\in\overline{\Omega}$，必有 $x_0=x_0(\omega)$ 使 $\omega\in\overline{\Omega}_{x_0}$，令 $n_2=n_2(\omega)=\overline{n}_2(x_0,\omega)$，则当 $n\geqslant n_2(\omega)$ 时(1.42)成立，此即(1.32)成立.

由(1.32)及第一章定理5.2(1)得：

$$\upsilon_\alpha(A,S_n)\geqslant\left(\frac{c_{16}}{n}\right)2^{-n\alpha}(\#(A\cap S_n))\left(\forall\ \begin{array}{c}\omega\in\overline{\Omega},\\ n\geqslant n_2\end{array}\right), \tag{1.43}$$

(其中 $\upsilon_\alpha(A,S_n)$ 之定义见第一章定义5.2)．而由推论1.3还有

$$\mathbf{E}^x(\#(A\cap S_n))\geqslant c_{17}2^{n\alpha}, (\text{当}|x|<2^{n-4}). \tag{1.44}$$

由(1.43)和(1.44)得

$$\mathbf{E}^x(m_\alpha(A))=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}^x(\upsilon_\alpha(A,S_n))$$

$$\geqslant c_{16}c_{17}\sum_{n\geqslant n_2\vee(4+\log_2|x|)}\frac{1}{n}=\infty, (\forall\ x\in\mathbb{Z}^d). \tag{1.45}$$

故 $\mathbf{E}(m_\alpha(A))=\infty$. $\tag{1.46}$

为了完成定理的证明，只需证明

$$m_\alpha(A)=\infty\quad P-a.s.. \tag{1.47}$$

(a)首先证明

$$\mathbf{E}^x([\#(A\cap S_n)]^2)\approx 2^{2n\alpha}, (\text{当}|x|\leqslant 2^{n-4}). \tag{1.48}$$

事实上，若记 $\mathbf{1}_B$ 为 B 上的示性函数，则有

$$\mathbf{E}^x([\#(A\cap S_n)]^2)=\mathbf{E}^x([\sum_{y\in S_n}\mathbf{1}_A(y)]^2)$$

$$=\mathbf{E}^x(\sum_{u,v\in S_n}\mathbf{1}_A(u)\mathbf{1}_A(v))=\sum_{u,v\in S_n}P^x(u\in A, v\in A)$$

$$=\sum_{u\in S_n}P^x(u\in A)+\sum_{\substack{u\neq v\\ u,v\in S_n}}P^x(u\in A, v\in A)$$

$$=\sum_{u\in S_n}P^x(\eta_u<\infty)+\sum_{\substack{u\neq v\\ u,v\in S_n}}P^x(\eta_u<\infty,\eta_v<\infty)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{E}^x(\#(A \cap S_n)) + \sum_{\substack{u \neq v \\ u,v \in S_n}} P^x(\eta_u < \infty, \eta_v < \infty) \\
&\approx 2^{n\alpha} + \sum_{\substack{u \neq v \\ u,v \in S_n}} P^x(\eta_u < \infty, \eta_v < \infty) \\
&\approx 2^{n\alpha} + \sum_{\substack{u \neq v \\ u,v \in S_n}} P^x(\eta_u < \eta_v < \infty) \\
&= 2^{n\alpha} + \sum_{\substack{u \neq v \\ u,v \in S_n}} P^x(\eta_u < \infty) P^u(\eta_v < \infty). \quad (|x| \leqslant 2^{n-4})
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

但是，由$\{X_n, n \geqslant 1\}$的空齐性及推论1.1有

$$
\begin{aligned}
P^x(\eta_u < \infty) &= P^0(\eta_{u-x} < \infty) \approx \left(\frac{1}{|u-x|}\right)^{d-\alpha} \\
&\approx 2^{-n(d-\alpha)}, (\text{当} |x| \leqslant 2^{n-4}, u \in S_n).
\end{aligned}
\tag{1.50}
$$

以(1.50)代入(1.49)得

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}^x([\#(A \cap S_n)]^2) \approx 2^{n\alpha} \\
&\quad + 2^{-n(d-\alpha)} \cdot 2^{nd} \sum_{\substack{v \in S_n \\ v \neq u}} P^u(\eta_v < \infty), \left(\begin{matrix} |x| \leqslant 2^{n-4}, \\ u \in S_n \end{matrix}\right).
\end{aligned}
\tag{1.51}
$$

但是当$u \in S_n$时

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{v \in S_n \\ v \neq u}} P^u(\eta_v < \infty) \approx \sum_{\substack{y \in C(0, 2^n) \\ y \neq 0}} P^0(\eta_y < \infty) \\
&\approx \sum_{\substack{y \in C(0, 2^n) \\ y \neq 0}} \left(\frac{1}{|y|}\right)^{d-\alpha} \\
&\approx \sum_{k_1=1}^{2^n} \cdots \sum_{k_d=1}^{2^n} \left(\frac{1}{\sqrt{k_1^2 + \cdots + k_d^2}}\right)^{d-\alpha} \\
&= 2^{n\alpha} \frac{1}{2^{nd}} \sum_{k_1=1}^{2^n} \cdots \sum_{k_d=1}^{2^n} \left(\sqrt{\frac{k_1^2 + \cdots + k_d^2}{2^{2n}}}\right)^{\alpha-d} \\
&\approx 2^{n\alpha} \int_0^1 \cdots \int_0^1 (\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2})^{\alpha-d} dx_1 \cdots dx_d \\
&\approx 2^{n\alpha}.
\end{aligned}
\tag{1.52}
$$

以(1.52)代入(1.51)得

$$\mathbf{E}^x([\#(A\cap S_n)]^2)\approx 2^{n\alpha}+2^{2n\alpha}\approx 2^{2n\alpha}. \tag{1.53}$$

(*b*)其次证明:存在绝对常数$c>0$,$p>0$,使

$$P^x(\#(A\cap S_n)>c2^{n\alpha})\geqslant p>0,(\forall\ |x|\leqslant 2^{n-4},n\geqslant N_1). \tag{1.54}$$

事实上,若注意:

$$\text{“}\xi\geqslant 0,\mathbf{E}(\xi)=\theta,\mathbf{E}(\xi^2)=a\theta^2,a>0\Rightarrow$$

$$P(\xi>\varepsilon\theta)\geqslant a^{-1}(1-\varepsilon)^2,(\forall\ 0\leqslant\varepsilon<1)\text{”}, \tag{1.55}$$

(因为$\theta=\mathbf{E}(\xi\mathbf{1}_{\{\xi\leqslant\varepsilon\theta\}})+\mathbf{E}(\xi\mathbf{1}_{\{\xi>\varepsilon\theta\}})$

$\leqslant\varepsilon\theta+\mathbf{E}(\xi^2)^{\frac{1}{2}}P(\xi>\varepsilon\theta)^{\frac{1}{2}}$.)

则由推论1.3及(1.48)、(1.55)知(1.54)成立.

(*c*)定义

$$n_k=[c_{18}k\log k],$$

$$T_k=\inf\{i\geqslant 1:X_i\overline{\in}V(0,2^{n_k})\},$$

$$A_k=\{x\in\mathbb{Z}^d:X_i=x\ \text{对某个}\ i<T_k\ \text{成立}\}.$$

往证$\{\#\{A_k\cap S_{n_k}\},k\geqslant 1\}$相互独立而且存在$\Omega_0$,$P(\Omega_0)=1$,使得$\forall\ \omega\in\Omega_0$,$\exists\ \bar{k}_0=\bar{k}_0(\omega)$,有

$$A(\omega)\cap S_{n_k}=A_{k+1}(\omega)\cap S_{n_k}\quad(k\geqslant\bar{k}_0(\omega)). \tag{1.56}$$

事实上,$A_k\cap S_{n_k}=\{x\in S_{n_k}:X_i=x\ \text{对某个}\ i<T_k\}$,所以,当$X_i=x\in S_{n_k}=V(0,2^{n_k})-V(0,2^{n_k-1})\subset V(0,2^{n_k})-V(0,2^{n_{k-1}})$时,由$T_{k-1}$的定义必有$i\geqslant T_{k-1}$. 因此,

$$A_k\cap S_{n_k}=\{x\in S_{n_k}:X_i=x\ \text{对某个}\ T_{k-1}\leqslant i<T_k\},$$

从而

$$\#(A_k\cap S_{n_k})=\sum_{x\in S_{n_k}}\mathbf{1}_{\{X_{T_{k-1}},\cdots,X_{T_k-1}\}}(x), \tag{1.57}$$

其中$\mathbf{1}_B$表B上的示性函数. 所以

$\{\#(A_k\cap S_{n_k}),k\geqslant 1\}$相互独立.

注意:$\{X_n,n\geqslant 1\}$是暂留的,所以T_k是有限停时. 由T_k的定义知$X_{T_{k+1}}\geqslant 2^{n_{k+1}-1}$,再用推论1.1和$\{X_n,n\geqslant 1\}$的马氏性和时齐性得:

$$P(X_i\in V(0,2^{n_k})\text{对某个 } i\geqslant T_{k+1})$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}P(X_i\in V(0,2^{n_k})\text{ 对某个 } i\geqslant m, T_{k+1}=m)$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}P(\bigcup_{i=m+1}^{\infty}\{X_i\in V(0,2^{n_k}), T_{k+1}=m, X_m\geqslant 2^{n_{k+1}-1}\})$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{|y|\geqslant 2^{n_{k+1}-1}}P(X_m=y,T_{k+1}=m)$$
$$\cdot P(\bigcup_{i=m+1}^{\infty}\{X_i\in V(0,2^{n_k})\}\mid X_m=y,T_{k+1}=m)$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{|y|\geqslant 2^{n_{k+1}-1}}P(X_m=y,T_{k+1}=m)$$
$$\cdot P^y(X_n\in V(0,2^{n_k})\text{ 对某个 } n\geqslant 1 \text{ 成立})$$
$$\overset{\text{推论1.1}}{\approx}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{|y|\geqslant 2^{n_{k+1}-1}}P(X_m=y,T_{k+1}=m)\left(\frac{2^{n_k}}{|y|}\right)^{d-\alpha}$$
$$\leqslant 2^{(n_k-n_{k+1})(d-\alpha)}$$
$$\leqslant 2^{-c_{10}\log k}\leqslant\frac{1}{k^2}\quad(\text{取 } c_{10}>0\text{适当大}).\tag{1.58}$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(X_i\in V(0,2^{n_k})\text{ 对某个 } i\geqslant T_{k+1}\text{ 成立})<\infty.\tag{1.59}$$

用 Borel—Cantelli 引理得知:

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{X_i\in V(0,2^{n_k})\text{ 对某个 } i\geqslant T_{k+1}\text{ 成立}\})=0,$$

所以$\exists$ $\Omega_0, P(\Omega_0)=1, \forall$ $\omega\in\Omega_0$,总存在 $\bar{k}_0=\bar{k}_0(\omega)$,使得:当 $k\geqslant\bar{k}_0=\bar{k}_0(\omega)$时,有

$$X_i(\omega)\overline{\in}V(0,2^{n_k}),(\text{对一切 } i\geqslant T_{k+1}(\omega)).\tag{1.60}$$

$\forall$ $x\in A(\omega)\cap S_{n_k}$,由 $A(\omega)$ 及 S_{n_k}之定义必有一个 $i\geqslant 1$,使

$$X_i(\omega)=x\in V(0,2^{n_k})-V(0,2^{n_k-1}).\tag{1.61}$$

由(1.60)、(1.61)知

$$i<T_{k+1}(\omega).\tag{1.62}$$

由(1.60)、(1.61)及 $A_{k+1}(\omega)$的定义知 $x\in A_{k+1}(\omega)$. 故

$$A(\omega)\cap S_{n_k}\subset A_{k+1}(\omega)S_{n_k}(\forall\ \omega\in\Omega_0,k\geqslant\bar{k}_0(\omega)).$$

而$\forall\ k,\omega$,总有 $A_{k+1}(\omega)S_{n_k}\subset A(\omega)S_{n_k}$. 总之,

$$A(\omega)\cap S_{n_k}=A_{k+1}(\omega)\cap S_{n_k}.\quad(\forall\ \omega\in\Omega_0,k\geqslant\bar{k}_0(\omega)).\tag{1.63}$$

(d)往证:$\exists\ K_1$,当$k\geqslant K_1$有:

$$P(\#(A_{k+1}\cap S_{n_{k+1}})>c2^{\alpha n_{k+1}})\geqslant p'>0.\tag{1.64}$$

事实上,

$$\begin{aligned}P(|X_{T_k}|>2^{n_{k+1}-4})&\leqslant P(|X_{T_k-1}|+|U_{T_k}|>2^{n_{k+1}-4})\\&\leqslant P(|U_{T_k}|>2^{n_{k+1}-n_k-3})\qquad(\because|X_{T_k-1}|\leqslant 2^{n_k-1})\\&\leqslant\frac{1}{k^2}\quad(\text{当 }k\geqslant K_0,c_{10}\text{充分大}).\end{aligned}\tag{1.65}$$

所以由(1.54)得:

$$\begin{aligned}&P(\#(A_{k+1}\cap S_{n_{k+1}})>c2^{\alpha n_{k+1}})\\&\geqslant\mathbf{E}(P^{X_{T_k}}(\#(A_{k+1}\cap S_{n_{k+1}})>c2^{\alpha n_{k+1}});|X_{T_k}|\leqslant 2^{n_{k+1}-4})\\&\overset{(1.54)}{\geqslant}pP(|X_{T_k}|\leqslant 2^{n_{k+1}-4})\\&\geqslant p-P(|X_{T_k}|>2^{n_{k+1}-4})\\&\geqslant p-\frac{1}{k^2}\geqslant p'>0,\qquad(\text{当 }k\geqslant K_1).\end{aligned}\tag{1.66}$$

(e)往证:$\exists\ \Omega_1,P(\Omega_1)=1,\forall\ \omega\in\Omega_1,\exists\ \{k\}$的一个子序列$\{k_i=k_i(\omega)\}$,使

$$\#(A_{k_i}(\omega)\cap S_{n_{k_i}})>c2^{\alpha n_{k_i}},(\forall\ i),\tag{1.67}$$

且$\{k_i\}$的下密度:

$$\liminf_{m\to\infty}\frac{1}{m}(\#\{k_i:1\leqslant k_i\leqslant m\})\geqslant\frac{p'}{2}>0.\tag{1.68}$$

(注意:(1.68)保证了:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{k_i\log k_i}=\infty.)\tag{1.69}$$

由于$\{\#(A_k\cap S_{n_k}),k\geqslant 1\}$相互独立,所以用强大数定律有

$$P(\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}[\mathbf{1}_{\{\#(A_k\cap S_{n_k})>c2^{\alpha n_k}\}}$$

$$-P(\#(A_k\cap S_{n_k})>c2^{\alpha n_k})\big]=0)=1, \tag{1.70}$$

所以由(1.70)和(1.66)知：$\exists\ \Omega_1, P(\Omega_1)=1, \forall\ \omega\in\Omega_1, \exists\ M_1 = M_1(\omega)\geqslant 4K_1$，当 $m\geqslant M_1(\omega)$ 时有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m}(\#\{1\leqslant k\leqslant m: \#(A_k(\omega)\cap S_{n_k})>c2^{\alpha n_k}\})\\
&\quad=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\mathbf{1}_{\{\#(A_k(\omega)\cap S_{n_k})>c2^{\alpha n_k}\}}(\omega)\\
&\quad\geqslant\frac{1}{m}\sum_{k=K_1+1}^{m}P(\#(A_k\cap S_{n_k})>c2^{\alpha n_k})-\frac{p'}{4}\\
&\quad\geqslant\frac{(m-K_1)}{m}p'-\frac{p'}{4}\geqslant\frac{p'}{2}>0, (\text{当 } m\geqslant M_1).
\end{aligned} \tag{1.71}$$

(1.71)保证了(1.67)和(1.68)成立.

(f)往证：$\exists\ \Omega_2, P(\Omega_2)=1, \forall\ \omega\in\Omega_2$，有

$$m_\alpha(A(\omega))=\infty. \tag{1.72}$$

事实上，令 $\Omega_2=\Omega_0\cap\Omega_1\cap\overline{\Omega}$，则 $P(\Omega_2)=1$，而且 $\forall\ \omega\in\Omega_2$，由(1.32)有

$$\mu(A(\omega)\cap S_{n_k})\leqslant c_{11}n_k 2^{\alpha n_k}, (\text{当 } k\geqslant\bar{k}_2(\omega)).$$

再用第一章定理5.2(1)得

$$\begin{aligned}
&\upsilon_\alpha(A(\omega), S_{n_k})\geqslant\left(\frac{c_{19}}{n_k}\right)2^{-\alpha n_k}(\#(A(\omega)\cap S_{n_k})),\\
&(k\geqslant\bar{k}_2(\omega)).
\end{aligned} \tag{1.73}$$

而由(1.63)及(1.67)有

$$\begin{aligned}
&\#(A(\omega)\cap S_{n_k})=\#(A_{k+1}(\omega)\cap S_{n_k})\\
&\geqslant\#(A_k(\omega)\cap S_{n_k})\geqslant c2^{\alpha n_k}, (\forall\ k\geqslant\bar{k}_0(\omega), k\in\{k_i(\omega)\}).
\end{aligned} \tag{1.74}$$

由(1.73)、(1.74)

$$\begin{aligned}
m_\alpha(A(\omega))&\geqslant\sum_{\substack{k\in\{k_i(\omega)\}\\ k\geqslant\bar{k}_0(\omega)\vee k_2(\omega)}}\upsilon_\alpha(A(\omega), S_{n_k})\\
&\geqslant\sum_{\substack{k\in\{k_i(\omega)\}\\ k\geqslant\bar{k}_0(\omega)\vee\bar{k}_2(\omega)}}\frac{c_{20}}{n_k}=\infty.
\end{aligned} \tag{1.75}$$

定理1.1证毕.

定理1.2 设$\{X_n, n\geqslant 1\}$如定理1.1,令

$D_p^d=\{x\in\mathbb{Z}^d:\exists\ 1\leqslant n_1<\cdots<n_p<\infty$,使$X_{n_i}=x, 1\leqslant i\leqslant p\}$

为$\{X_n, n\geqslant 1\}$的 p 重点集,则

$(D)dim(D_p^d)=\alpha$, a. s. $(\forall\ p\geqslant 1, d\geqslant 2)$.

证明可参见[237].

§2 常返的随机徘徊的分形集

本节所研究的随机徘徊$\{X_n\}$,恒设其取值于整数集$\mathbb{Z}$,均值为0,其分布属于指数为$\alpha\in(1,2]$的稳定律吸引场. 令$A(\omega)=\{n: X_n(\omega)=0\}$为其零集. 我们将要证明:对$a.s.\ \omega$,$A(\omega)$是一个按[16]中意义下的维数为$1-\frac{1}{\alpha}$的分形集.

沿用以前的符号,例如$C(x,n)$、$V(x,n)$、$\mathscr{E}$、$\mathscr{E}_d$、$\mathscr{E}_s$、$\mathscr{E}_d^k$、$\mathscr{E}_s^k$、$Q_k(x)$、$\tilde{V}(x,2^k)$、$V_n=V(0,2^n)$、$S_n=V_n-V_{n-1}$,$(n\geqslant 2)$,$S_1=V_1$的定义均见本章首页,只不过现在$\{X_n\}$的值域含于$\mathbb{Z}$而已.

设U_1、U_2,…是相互独立的具有公共分布$F(x)$的非退化的整数值的随机变量序列,$X_0=0$,$X_n=U_1+\cdots+U_n$,$(n\geqslant 1)$,此外,再设U_1属于指数为$\alpha\in(1,2]$的稳定律吸引场,$\mathbf{E}(U_1)=0$.

令

$$G(x)=P(|U_1|>x),\ K(x)=x^{-2}\int_{|y|\leqslant x}y^2F(dy),$$

$$Q(x)=G(x)+K(x).$$

则:

当$x\geqslant x_0\equiv\mathrm{Sup}\{x: P(|U_1|\leqslant x)=0\}$时,$Q(x)$是连续的严格降的函数,所以,可以定义$\{a_n\}$如下:

$$\begin{cases}a_n=1,\text{当}0\leqslant n\leqslant y_0=(Q(1))^{-1},\\ Q(a_n)=\dfrac{1}{n},\text{当}n>y_0.\end{cases}\tag{2.1}$$

(参见[112]P.65)

再用U_1属于指数为$\alpha\in(1,2]$的稳定律吸引场,可知

$$a_n=n^{1/\alpha}f(n), \tag{2.2}$$

其中$f(n)$是变化缓慢的(当$n\to\infty$时),从而

$$\lim_{n\to\infty}n^{-\varepsilon}f(n)=0,\lim_{n\to\infty}n^{\varepsilon}f(n)=\infty(\forall\ \varepsilon>0).$$

(参见[113]P.142).

在本章中,"$f(x)\approx g(x)$"意即存在c_1、c_2均>0,使$c_1g(x)\leqslant f(x)\leqslant c_2g(x)$.

下面的定理是本节的主要结果

定理2.1([108])设$\{X_n\}$是属于指数为$\alpha\in(1,2]$的稳定律吸引场的常返的均值为0的随机徘徊,令$A=A(\omega)=\{n\geqslant1:X_n(\omega)=0\}$是其零集,则对$a.s.$的$\omega$,$A(\omega)$是一个维数为$1-\dfrac{1}{\alpha}$的分形集.

为证定理,需要一系列引理.

引理2.1 令$u_0=1,u_n=P(X_n=0),(n\geqslant1)$,则

$$u_n=O(a_n^{-1}). \tag{2.3}$$

证明请见[114]引理2.2.

引理2.2 存在两个常数$0<c<C$,使得:只要$(m,n]=\{k\in\mathbb{Z}:m<k\leqslant n\}$含有$p$的一个倍数,此处$p$是$\{X_n\}$的周期,则

$$ca_{n-m}a_n^{-1}\leqslant P(X_j=0\ \text{对某个}\ j\in(m,n])\leqslant Ca_{n-m}a_n^{-1}. \tag{2.4}$$

证明请参见[114]引理2.4.

引理2.3 $P(X_j\neq0\quad\text{对}\ m<j\leqslant n)\approx r_nr_m^{-1}$,此处

$r_n=P(X_1\neq0,\cdots,X_n\neq0\},(n\geqslant1),r_0=0,a_n\approx(n+1)r_n$.

证明请参见[114]引理2.3和推论2.3.

引理2.4 设E是$\mathbb{Z}^d$中有限子集,$s(E)=2^N$($s(E)$表E之边长,§1中有定义).令$B\subset E$,μ是B上的一个可数可加测度.

(a)假设

$\mu(B\cap V(x,2^n))\leqslant\bar{a}_1h(2^{n-N})$,对一切$x\in\mathbb{Z}^d,0\leqslant n\leqslant N$,

则$\upsilon_h(B,E)\geqslant2^{-d}\bar{a}_1^{-1}\mu(B)$,而且

$\tilde{\tau}_h(B,E,\varepsilon)\geqslant\bar{a}_1^{-1}\mu(B)$，(对一切 $\varepsilon\in(0,1)$).

(b)假定对某个$0\leqslant r\leqslant N$，有

$\mu(B\cap V(x,2^r))\geqslant\bar{a}_1 h(2^{r-N})$，　$(\forall\ x\in B))$，

则 $\upsilon_h(B,E)\leqslant K_h\bar{a}_1^{-1}\mu(B)$.

(c)假设

$\mu(B\cap\tilde{V}(x,2^r))\geqslant\bar{a}_1 h(2^{r-N})$，$(\forall\ x\in B,0\leqslant r\leqslant N(1-\varepsilon))$，

则 $\tilde{\tau}_h(B,E,\varepsilon)\leqslant K_h\bar{a}_1^{-1}\upsilon(B)$.

此处$h(t)$是控制增长的测度函数，$0<K_h<\infty$是其控制常数，即是

$$h(2t)\leqslant K_h h(t),\ (0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}).$$

$$\upsilon_h(B,E)=\min\left\{\sum_{i=1}^{m}h\left(\frac{s(B_i)}{s(E)}\right):B_i\in\mathscr{E},B\cap E\subset\bigcup_{i=1}^{m}B_i\right\},$$

$$\tilde{\tau}_h(B,E,\varepsilon)=\max\left\{\sum_{i=1}^{m}h\left(\frac{2^{k_i}}{s(E)}\right):x_i\in B\cap E,1\leqslant 2^{k_i}\leqslant s(E)^{1-\varepsilon},\{\tilde{V}(x_i,2^{k_i})\}\text{ 两两不交.}\right\}.$$

$\bar{a}_1$是正常数.

本引理的证明在第一章定理5.2中已有证明，此处不过摘引本节所需之结果而已.

注：本引理(a)中之条件可代之以下述条件：

$\mu(Q_n(x)\cap B)\leqslant\bar{a}_1 h(2^{n-N})$，$x\in\mathbb{Z}^d$，$0\leqslant n\leqslant N$.

令

$$N_k^{(n)}=\#\{C(x,2^k)\in\mathscr{E}_d^k:C(x,2^k)\subset S_n,C(x,2^k)\cap A(\omega)\neq\varnothing\},$$

$$M_k^{(n)}=\#\{C(x,2^k)\in\mathscr{E}_s^k:C(x,2^k)\subset S_n,C(x,2^k)\cap A(\omega)\neq\varnothing\},$$

则有

引理2.5 $\mathbf{E}(N_k^{(n)})\approx\mathbf{E}(M_k^{(n)})$

$$\approx 2^{(n-k)(1-\frac{1}{\alpha})}\left(\frac{f(2^k)}{f(2^n)}\right),\tag{2.5}$$

$f(x)$是变化缓慢的(当$x\to\infty$时).

证 含于S_n的$\mathscr{E}_d^k$或$\mathscr{E}_s^k$中的立方体的总数都是$2^{(n-k)}$阶个.而由引理2.2,每个这样的立方体与A有非空交的概率的阶为$(2^{(k-n)})^{\frac{1}{\alpha}}(f(2^k)/f(2^n))$,故引理2.5得证.

引理2.6 $\mathbf{E}(\#(A\cap S_n))\approx 2^{n(1-\frac{1}{\alpha})}g(n)$,其中$g(n)=f(2^n)^{-1}$.

证 由引理2.1立得引理2.6.

引理2.7 $\mathbf{E}(\#(A\cap S_n)^2)\approx(\mathbf{E}(\#(A\cap S_n)))^2$.

证 令

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{1}_{\{x\}}(X_j) \tag{2.6}$$

是到时刻$n-1$为止$\{X_j\}$在状态x的逗留时间(或称局部时),其中$\mathbf{1}_B$表B上的示性函数,则

$$\#(A\cap S_{n+1})=L_{2^n}(0)-L_{2^{n-1}}(0). \tag{2.7}$$

而仿[112]中引理8可证:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}((L_{2^n}(0)-L_{2^{n-1}}(0))^2)\\
&=\mathbf{E}\Big(\sum_{j_1,j_2=2^{n-1}}^{2^n-1}\mathbf{1}_{\{X_{j_1}=0\}}\mathbf{1}_{\{X_{j_2}=0\}}\Big)\\
&\leqslant 2\mathbf{E}\Big(\sum_{2^{n-1}\leqslant j_1\leqslant j_2<2^n}\mathbf{1}_{\{X_{j_1}=0\}}\mathbf{1}_{\{X_{j_2}=0\}}\Big)\\
&\leqslant 2\sum_{k\in I(2^n,2)}P(X_{k_1}=0)P(X_{k_2}=0),
\end{aligned}$$

此处$I(2^n,2)=\{(k_1,k_2):k_1+k_2<2^n,k_1,k_2>0\}$.因此,由[112]引理6得

$$\mathbf{E}((L_{2^n}(0)-L_{2^{n-1}}(0))^2)\leqslant c_1\left(2^{n(1-\frac{1}{\alpha})}\right)^2g^2(n). \tag{2.8}$$

由(2.7)、(2.8)及引理2.6得

$$\mathbf{E}(\#(A\cap S_n)^2)\leqslant c_1(\mathbf{E}(\#(A\cap S_n)))^2. \tag{2.9}$$

又由Schwarz不等式有

$$\mathbf{E}(\#(A\cap S_n)^2)\geqslant(\mathbf{E}(\#(A\cap S_n)))^2. \tag{2.10}$$

由(2.9)、(2.10)即得引理2.7.

下面我们证明定理2.1.为此,只需证明:

(1) $(D)\mathrm{Dim}(A)\leqslant 1-\frac{1}{\alpha}$, $a.s.$;

(2) $(D)\dim(A)\geqslant 1-\frac{1}{\alpha}$ $a.s.$.

因为由引理2.5,有

$$\mathbf{E}(M_k^{(n)})\leqslant c_1 2^{(n-k)(1-\frac{1}{\alpha})}, \tag{2.11}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\tilde{\tau}_\beta(A,S_n,\varepsilon)) &\leqslant c_1\sum_{k=1}^{n(1-\varepsilon)}2^{(n-k)(1-\frac{1}{\alpha})}\left(\frac{2^k}{2^n}\right)^\beta \\ &\leqslant c_2 2^{-2n\varepsilon\delta}, \qquad (n\text{ 充分大}),\end{aligned} \tag{2.12}$$

此处 $\beta=1-\frac{1}{\alpha}+3\delta,\delta>0$.

由(2.12)及Borel—Cantelli引理可得:

$$\tilde{\tau}_\beta(A,S_n,\varepsilon)\leqslant c_2 2^{-n\varepsilon\delta}\quad a.s.\quad (n\text{ 充分大}), \tag{2.13}$$

所以存在 Ω_1, $P(\Omega_1)=1$,使 $\omega\in\Omega_1$ 时

$$\tilde{p}_\beta(A(\omega),\frac{1}{m})=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\tau}_\beta(A(\omega),S_n,\frac{1}{m})<\infty,(m\geqslant 1). \tag{2.14}$$

由(2.14)及 $\beta=1-\frac{1}{\alpha}+3\delta$ 并用第一章命题5.6知

$$(D)\mathrm{Dim}(A(\omega))\leqslant 1-\frac{1}{\alpha}+2\delta,(\omega\in\Omega_1,\delta>0)$$

由 $\delta>0$ 可任意小得:

$$(D)\mathrm{Dim}(A)\leqslant 1-\frac{1}{\alpha}\quad a.s. .$$

第一个不等式得证.下面证明第二个不等式:

$$(D)\dim(A)\geqslant 1-\frac{1}{\alpha}\quad a.s. .$$

为此,要用引理2.4(a).

令 μ 为 A 上的可数可加测度,且 $\forall\, n\in A,\mu(\{n\})=1$.用[16]

中定理7.8的类似推理及引理2.2可得：

$$\mu(A\cap Q_r(x))\leqslant c_3 n2^{r(1-\frac{1}{\alpha})},(x\in S_n,1\leqslant r\leqslant n,n\geqslant n_0). \quad (2.15)$$

在 A 上定义另一可数可加测度 $\bar{\mu}$ 如下：

$$\bar{\mu}(E)=\frac{\mu(A\cap E)}{n2^{n(1-\frac{1}{\alpha})}}. \quad (2.16)$$

此处 E 是含于 Sn 的任一个二进制立方体，n 是任一正整数，因此，我们有

$$\bar{\mu}(A\cap Q_r(x))\leqslant c_3 2^{(r-n)(1-\frac{1}{\alpha})},(\forall\ x\in S_n,1\leqslant r\leqslant n,n\geqslant n_0).$$

用引理2.4(a)我们可以推出：

$$\upsilon_{1-\frac{1}{\alpha}}(A,S_n)\geqslant\bar{\mu}(A\cap S_n)=\left(\frac{c_3}{n}\right)(2^{-n(1-\frac{1}{\alpha})})(\#(A\cap S_n)),$$
$$(n\geqslant n_0). \quad (2.17)$$

再用引理2.7及(1.55)有

$$P(\#(A\cap S_n)>c_5 2^{n(1-\frac{1}{\alpha})})\geqslant p>0,(n\geqslant n_0). \quad (2.18)$$

令

$$n_k=[c_6 k\log k],$$
$$T_k=\inf\{i>2^{n_k-1}:X_i=0\},$$

则由引理2.3及$\lim\limits_{n\to\infty}n^{-\epsilon}f(n)=0(\forall\ \varepsilon>0)$得：

$$P(T_{k-1}>2^{n_k-2})\leqslant P(X_i\neq 0,2^{n_{k-1}-1}<i\leqslant 2^{n_k-1})$$
$$\leqslant c\left\{\left(\frac{2^{(n_k-1)\frac{1}{\alpha}}}{2^{(n_k-1)}}\right)\Big/\left(\frac{2^{(n_{k-1}-1)\frac{1}{\alpha}}}{2^{(n_{k-1}-1)}}\right)\right\}\frac{f(2^{n_k-1})}{f(2^{n_{k-1}-1})}$$
$$\leqslant\frac{1}{k^2},\quad(k\geqslant k_0,c_6\text{适当选取}). \quad (2.19)$$

令 $A_k=\{T_{k-1}<i\leqslant T_k:X_i=0\}$，再注意

$$\{T_{k-1}\leqslant 2^{n_k-2}\}\subset\{A_k\cap S_{n_k}=A\cap S_{n_k}\}, \quad (2.20)$$

则由(2.18)、(2.19)、(2.20)可得：

$$P(\#(A_k\cap S_{n_k})\geqslant c_5 2^{n_k(1-\frac{1}{\alpha})})$$
$$\geqslant P(\#(A\cap S_{n_k})\geqslant c_5 2^{n_k(1-\frac{1}{\alpha})})-\frac{1}{k^2}$$

$$\geqslant \frac{p}{2}, (k \geqslant K_1). \tag{2.21}$$

令

$$B_k = \{\#(A_k \cap S_{n_k}) \geqslant c_5 2^{n_k(1-\frac{1}{\alpha})}\},$$

则由

$$\#(A_k \cap S_{n_k}) = \sum_{T_{k-1} < i \leqslant T_k} \mathbf{1}_{\{0\}}(X_i) \mathbf{1}_{S_{n_k}}(i) \tag{2.22}$$

可知$\{B_k\}$是相互独立的序列且由(2.21)知

$$P(B_k) \geqslant \frac{p}{2} > 0, (\forall\ k \geqslant K_1). \tag{2.23}$$

因此，由强大数定律有

$$P(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{1}_{B_k} - P(B_k)) = 0) = 1. \tag{2.24}$$

由(2.24)、(2.23)知：对 $a.s.$ 的 ω，有

$$\frac{1}{n}(\#\{1 \leqslant k \leqslant n : \#(A_k(\omega) \cap S_{n_k}) \geqslant c_5 2^{n_k(1-\frac{1}{\alpha})}\})$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{B_k}(\omega) \geqslant (\frac{p}{2} - \varepsilon) > 0, (n \geqslant \bar{n}_0(\omega)), \tag{2.25}$$

从而对 $a.s.$ 的 ω，存在$\{k\}$的子序列$\{k_i\}$($k_i = k_i(\omega)$依赖 ω)使

$$\#(A_{k_i} \cap S_{n_{k_i}}) \geqslant c_5 2^{n_{k_i}(1-\frac{1}{\alpha})}, (\forall\ i), \tag{2.26}$$

且$\{k_i\}$的下密度

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\#\{k_i : 1 \leqslant k_i \leqslant n\}}{n} \geqslant \frac{p}{2} - \varepsilon > 0. \tag{2.27}$$

((2.27)保证了：$\sum_{i=1}^{\infty} (k_i \log k_i)^{-1} = \infty$.)总之，对 $a.s.$ 的 ω，由(2.17)、(2.26)、(2.27)得：

$$m_{1-\frac{1}{\alpha}}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{1-\frac{1}{\alpha}}(A, S_n) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} v_{1-\frac{1}{\alpha}}(A, S_{n_{k_i}})$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_3}{n_{k_i}} (2^{-n_{k_i}(1-\frac{1}{\alpha})})(\#(A \cap S_{n_{k_i}}))$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_3}{n_{k_i}} (2^{-n_{k_i}(1-\frac{1}{\alpha})} c_5 2^{n_{k_i}(1-\frac{1}{\alpha})}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_3 c_5}{n_{k_i}} = \sum_{i=1}^{\infty} c_3 c_5 [c_6 k_i \log k_i]^{-1} = \infty.$$

所以$(D)\dim(A) \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha}$ $a.s.$. 定理证毕.

§3　常返的随机徘徊的局部时

在这一节中，与§2一样，恒设 $X_0 = 0, X_n = U_1 + \cdots + U_n$, $(n \geqslant 1)$, $\{U_k\}$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上相互独立的具有公共分布$F(x)$的非退化的整数值的随机变量序列，$\{U_k\}$属于指数为$\alpha \in (1,2]$的稳定律吸引场，$E(U_1) = 0$，且$\{X_n\}$是常返的.

仍与§2一样，令

$$G(x) = P(|U_1| > x), K(x) = x^{-2} \int_{|y| \leqslant x} y^2 F(dy), \tag{3.1}$$

$$Q(x) = G(x) + K(x), \tag{3.2}$$

$$x_0 = \sup\{x : P(|U_1| \leqslant x) = 0\}, \tag{3.3}$$

$$a_n = 1, \quad \text{当} 0 \leqslant n \leqslant y_0 \triangleq (Q(1))^{-1}, \tag{3.4}$$

$$Q(a_n) = \frac{1}{n}, \text{当} n > y_0. \tag{3.5}$$

(因为$Q(x)$连续且严格下降，$\{a_n\}$是唯一确定的. 又因为$\{U_k\}$属于指数为$\alpha \in (1,2]$的稳定律吸引场，所以，$a_n = n^{\frac{1}{\alpha}} f(n)$，$f(n)$是变化缓慢的(当$n \to \infty$时).

附注3.1　当$\{U_k\}$属于指数为$\alpha \in (1,2]$的稳定律吸引场时，必有

$$\lim_{x \to \infty} \frac{G(x)}{K(x)} = \frac{2-\alpha}{\alpha} < 1. \tag{3.6}$$

令

$$L_n(k) = L_n(\omega, k) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{k\}}(X_j(\omega))$$

为$\{X_j\}$到时刻$n-1$为止在状态k的局部时，再令$\{t_n\}$是一串非降的正整数，且满足$t_1 = 1, t_n \leqslant n$. 再令

$$L_{n,t_n}^*(k)=\max_{0\leqslant j\leqslant n-t_n}(L_{j+t_n}(k)-L_j(k)),$$

显然，当 $t_n\equiv n$ 时，$L_{n,t_n}^*(k)=L_n(k)$.

在这一节中，我们将要介绍 Jain, N. C. 和 Pruitt, W. E. 关于局部时 $L_n(k)$ 和局部时的极大增量 $L_{n,t_n}^*(k)$ 的极限性质.

令

$$c_n=a_{l(n)},l(n)=\frac{n}{\log\log n},(n\geqslant 3), \tag{3.7}$$

$$\sum=\{x\in\mathbb{Z}:P(X_n=x)>0\text{ 对某个 }n\text{ 成立}\}, \tag{3.8}$$

p 是 $\{X_n\}$ 的周期，$\varphi(u)$ 是 $F(x)$ 的特征函数. (3.9)

在叙述有关 $L_n(k)$ 的极限性质（当 $n\to\infty$ 时）以前，我们先介绍几条引理，这些引理不仅对证明本节的主要定理有用，而且有独立存在的地位及广泛的应用价值. 限于本书的篇幅，本节的定理不准备证明了. 下列引理3.1—3.12及定理3.1—3.3的证明可参见[112].

引理3.1 设 $\sum=\mathbb{Z}$，$Q(x)$、$\varphi(u)$ 及 p 分别由(3.2)及(3.9)所定义，则存在正常数 c，使

$$|\varphi(u)|\leqslant 1-cQ(|u|^{-1}),0<|u|\leqslant\pi p^{-1}. \tag{3.10}$$

引理3.2 设 $\sum=\mathbb{Z}$，a_n 如(3.4)及(3.5)所定义，则存在正常数 c，使

$$P(X_n=x)\leqslant\frac{c}{a_n},(\forall\ x\in\mathbb{Z},n\geqslant 1). \tag{3.11}$$

此外，对任意实数 M，存在正常数 c' 及正整数 n_0，只要 $n\geqslant n_0$，$|x|\leqslant Ma_n$，而且 $x\in\{y\in p\mathbb{Z}:P(X_n=y)>0\}$，必有

$$P(X_n=x)\geqslant\frac{c'}{a_n}. \tag{3.12}$$

引理3.3 设 $\sum=\mathbb{Z}$，则存在 $\lambda>1$ 及 $\bar{x}$，使 $x^\lambda Q(x)$（当 $x\geqslant\bar{x}$ 时）严格下降，而且还存在正常数 c，使

$$P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k|\geqslant Ma_n)\leqslant cM^{-\lambda},(\forall\ n\geqslant 1,M\geqslant 1). \tag{3.13}$$

引理3.4 设 $\sum=\mathbb{Z}$，则存在正常数 c，使得对任何 $x,y\in\mathbb{Z}$，

$y-x\in p\mathbb{Z}$，$n\geq 1$，总有

$$|P(X_n=y)-P(X_n=x)|\leq c\,\frac{|y-x|}{a_n^2}. \tag{3.14}$$

引理3.5 设$h(x)$是定义在$[0,\infty)$上的单调非降右连续函数，$h(0)=0$，则

$$\int_{(0,a]}\frac{dh(x)}{h^s(x)}\leq\frac{1}{1-s}(h(a))^{1-s},(0<s<1); \tag{3.15}$$

$$\int_{(a,\infty)}\frac{dh(x)}{h^s(x)}\leq\frac{1}{s-1}(h(a))^{1-s},(s>1). \tag{3.16}$$

引理3.6 令$\{b_n\}$是非负降序列，$\sum_{i=0}^{n-1}b_i\leq cnb_n$，

$$I(n,r)=\{k=(k_1,\cdots,k_r)\in\mathbb{Z}^r:k_i\geq 0,\sum_{i=1}^{r}k_i<n\},$$
$$(n\geq 1,r\geq 1),m=[nr^{-1}]+1,$$

则

$$\sum_{k\in I(n,r)}\prod_{i=1}^{r}b_{k_i}\leq(4cmb_m)^r,(\forall\ n\geq 1,r\geq 1). \tag{3.17}$$

引理3.7 设$\sum=\mathbb{Z}$，则存在正常数c，使

$$\sum_{n=0}^{\infty}|P(X_n=z)-P(X_n=x+z)|\leq\frac{c}{|x|Q(|x|)} \tag{3.18}$$

对一切$x\in p\mathbb{Z}$，$z\in\mathbb{Z}$成立.

引理3.8 设$\sum=\mathbb{Z}$，则存在正常数c，使

$$P(\frac{c_n}{n}L_n(x)\geq ce^r)\leq e^r/(\log n)^r \tag{3.19}$$

对一切$x\in\mathbb{Z}$，$n\geq 3$，$r\in[0,\infty)$成立.

引理3.9 设$\sum=\mathbb{Z}$，则存在正常数c，使

$$P\left(\frac{c_n}{n}|L_n(x)-L_n(y)|\geq c\eta^{(\lambda-1)/4}\right)\leq\eta^{-(\lambda-1)/2}\left(\frac{1}{\log n}\right)^{\frac{\lambda-1}{2}\log\eta^{-1}} \tag{3.20}$$

对一切$n\geq 3$，$0<\eta<1$，$|x-y|\leq\eta c_n$成立，其中λ如引理3.3中所定义.

引理3.10 设$\sum=\mathbb{Z}$,则存在正常数c,使

$$P\left(\max_{n\leqslant k\leqslant 2n}\frac{c_k}{k}|L_k(x)-L_k(y)|\geqslant c\eta^{(\lambda-1)/4}\right)\leqslant c\eta^{-(\lambda-1)/2}\left(\frac{1}{\log n}\right)^{\frac{\lambda-1}{2}\log\eta^{-1}} \tag{3.21}$$

对一切$n\geqslant 3,0<\eta<\frac{1}{2},|x-y|\leqslant\eta c_n$成立.$\lambda$定义如前.

引理3.11 设$\sum=\mathbb{Z}$,任给$\varepsilon>0$,则存在正常数δ和c,使

$$P\left(\max_{n\leqslant k\leqslant 2n}\sup_{|x-y|\leqslant\delta c_n}\frac{c_k}{k}|L_k(x)-L_k(y)|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{c}{\log^2 n},(\forall\ n\geqslant 3). \tag{3.22}$$

引理3.12 设$\sum=\mathbb{Z}$,对于任意的$\eta>0$,存在正常数c,使

$$P\left(\frac{c_n}{n}L_n(x)\geqslant c\right)\geqslant\left(\frac{1}{\log n}\right)^{\eta} \tag{3.23}$$

对一切$|x|\leqslant a_n$,n充分大时成立.

利用上述一系列引理,可以容易地证明:

定理3.1 设$\sum=\mathbb{Z}$,则存在$y_1\in(0,\infty)$,使得对一切$x\in\mathbb{Z}$,有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{c_n}{n}L_n(x)=y_1\quad a.s. \tag{3.24}$$

定理3.2 设$\sum=\mathbb{Z}$,任给$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{|x-y|\leqslant\delta c_n}\frac{c_n}{n}|L_n(x)-L_n(y)|<\varepsilon\quad a.s.. \tag{3.25}$$

定理3.3 设$\sum=\mathbb{Z}$,则存在$y_2\in(0,\infty)$,使

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{x\in Z}\frac{c_n}{n}L_n(x)=y_2\quad a.s.. \tag{3.26}$$

上述三定理的证明,可参见[112].

令

$$M_1=\{\mu:\mu\text{ 是}\mathbb{R}\text{ 上可数可加的 Borel 测度且 }\mu\leqslant 1\}, \tag{3.27}$$

赋于M_1以淡拓扑,即$\mu_n\to\mu$的充要条件是:

$$\int f d\mu_n \to \int f d\mu, (\forall \text{ 连续的有紧支撑的 } f).$$

由于$\{X_n\}$属于指数为$\alpha \in (1,2]$的稳定律吸引场，必有

$$X_n/a_n \xrightarrow{w} X^*, (\xrightarrow{w} \text{表依分布弱收敛})$$

其中X^*服从指数为α的稳定分布.

设L是由X^*生成的马氏半群的无穷小算子(参见[46]). 令

$$I(\mu) = -\inf_{u \in \mathscr{U}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{Lu}{u}\right)(x)\mu(dx), (\mu \in M_1), \tag{3.28}$$

其中$\mathscr{U}$表全体严格正的任意次可微的且在某一紧区间(可依赖于函数)外为常数的实值函数. 再令

$$\mathscr{A} = \{f : f \geqslant 0, \text{一致连续}, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \leqslant 1\}, \tag{3.29}$$

$$\mathscr{A}_1 = \{f \in \mathscr{A} : fdx = d\mu, I(\mu) \leqslant 1\}, \tag{3.30}$$

如果我们约定：当μ关于 Lebesgue 测度绝对连续且其密度函数为f时，记$I(\mu)=I(f)$，则(3.30)变为：

$$\mathscr{A}_1 = \{f \in \mathscr{A} : I(f) \leqslant 1\}. \tag{3.31}$$

在$\mathscr{A}$中赋以拓扑$\mathscr{T}$如下：$\forall f_n, f \in \mathscr{A}$，

$$f_n \xrightarrow{\mathscr{T}} f \Leftrightarrow \forall \text{ 紧子集 } K \subset \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

令

$$g_n(\omega, t) = \frac{c_n}{n} L_n(\omega, [t, c_n]), (t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega), \tag{3,32}$$

$$h_n(\omega,t) = \begin{cases} \frac{c_n}{n} L_n(\omega,k), \text{当 } t = \frac{k}{c_n}, k \in \mathbb{Z}, \\ \text{线性内插来定义，当 } t \text{ 不是} \frac{k}{c_n}, \end{cases} \tag{3.33}$$

其中c_n如(3.7)所定义，$[x]$表$\leqslant x$的最大整数.

定理3.4 设$\sum = \mathbb{Z}$，任给$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使

$$P(\{\omega \in \Omega; \limsup_{n\to\infty} \sup_{|u-v|<\delta} |g_n(\omega,u) - g_n(\omega,v)| > \varepsilon\}) = 0; \tag{3.34}$$

$$P(\{\omega\in\Omega:\limsup_{n\to\infty}\sup_{|u-v|<\delta}|h_n(\omega,u)-h_n(\omega,v)|>\varepsilon\})=0. \tag{3.35}$$

证 由定理3.2 立得定理3.4.

定理3.5 设$\sum=\mathbb{Z}$，则存在$\Omega_0\in\mathscr{F}$，$P(\Omega_0)=1$，$\forall\ \omega\in\Omega_0$，总有

$$\lim_{\delta\to0}\limsup_{n\to\infty}\sup_{|u-v|<\delta}|g_n(\omega,u)-g_n(\omega,v)|=0; \tag{3.36}$$

$$\lim_{\delta\to0}\limsup_{n\to\infty}\sup_{|u-v|<\delta}|h_n(\omega,u)-h_n(\omega,v)|=0. \tag{3.37}$$

证 由定理3.4知：$\forall\ m\geqslant1$，$\exists\ \delta_m>0$，$\Omega_m\subset\Omega$，$P(\Omega_m)=1$，使得，当$\omega\in\Omega_m$有

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{|u-v|<\delta_m}|g_n(\omega,u)-g_n(\omega,v)|\leqslant\frac{1}{m}, \tag{3.38}$$

取$\Omega_0=\bigcap_{m=1}^{\infty}\Omega_m$，则$P(\Omega_0)=1$且$\forall\ \omega\in\Omega_0$，(3.36)成立.

仿之可证(3.37).

定理3.6 设$\sum=\mathbb{Z}$，则存在$\Omega_0\subset\Omega$，$P(\Omega_0)=1$，对任意$\omega\in\Omega_0$，有：

(1) $\mathscr{B}(\omega)\triangleq\{h_n(\omega,x+\cdot):n\geqslant1,x\in\mathbb{R}\}\subset\mathscr{A}$，　(3.39)

而且$\mathscr{B}(\omega)$是相对紧集(关于拓扑$\mathscr{T}$)；

(2) 记$\mathscr{B}(\omega)'$为$\mathscr{B}(\omega)$的全体极限点，则$\mathscr{B}(\omega)'\subset\mathscr{A}_1$；

(3) 记$\overline{\mathscr{B}}(\omega)\triangleq\{h_n(\omega,\cdot):n\geqslant1\}$，则$\overline{\mathscr{B}}(\omega)$的极限点集$\overline{\mathscr{B}}(\omega)'\subset\mathscr{A}_1$.

注意：$\mathscr{A}$(特别地$\mathscr{A}_1$)是一个不依赖随机参变量ω的函数族，所以，有时称定理3.6为Donsker型不变原理. 利用定理3.6我们可以推出许多关于局部时$L_n(w,k)$的极限性质. 定理3.6的证明从略(有兴趣的读者请参见[113]).

令

$$\theta_{X}\cdot=\sup\{f(0):f\in\mathscr{A}_1\}. \tag{3.40}$$

Donsker 和 Varadhan 在[46]中算出了：

$$\theta_{X^*}=\begin{cases}\sqrt{2}, & \text{当}\alpha=2, X^*\text{服从标准正态分布}\\ \dfrac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})}{(\pi(\alpha-1))^{1-\frac{1}{\alpha}}}, & \text{当}1<\alpha<2, X^*\text{服从指标为}\alpha\text{的对称稳定分布,特征函数为}e^{-|u|^\alpha}.\end{cases}\tag{3.41}$$

对于一般的情况,我们有:

定理3.7　设$\sum=\mathbb{Z}$,对 a.s. 的ω,及任意$k\in\mathbb{Z}$,我们有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{c_n}{n}L_n(\omega,k)=\limsup_{n\to\infty}\frac{c_n}{n}\max_m L_n(\omega,m)$$
$$=\theta_{X^*}\in(0,\infty).\tag{3.42}$$

定理3.8　设$\sum=\mathbb{Z}$,φ是任一实值连续函数,则存在$\Omega_0\subset\Omega$,$P(\Omega_0)=1$,使得$\forall\ \omega\in\Omega_0$,有

(1)若$\{k_n\}\subset\mathbb{Z}$,使

$$\lim_{n\to\infty}k_n/c_n=a\in\mathbb{R}\tag{3.43}$$

则

$$\limsup_{n\to\infty}\varphi\left(\frac{c_n}{n}L_n(\omega,k_n)\right)=\sup_{0\leq t\leq\theta_{X^*}}\varphi(t),\tag{3.44}$$

特别地,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{c_n}{n}L_k(\omega,k_n)=\theta_{X^*}.\tag{3.45}$$

注意:若$k_n\equiv k(\forall\ n\geq1)$,则$a=0$,(3.43)成立,从而相应的(3.44)成立.

(2)若$-\infty<a<b<\infty$,则

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{c_n}\sum_{ac_n\leq k<bc_n}\varphi\left(\frac{c_n}{n}L_n(\omega,k)\right)=\sup_{f\in\mathscr{S}_1}\int_a^b\varphi(f(t))dt;\tag{3.46}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\inf_{ac_n\leq k\leq bc_n}\varphi\left(\frac{c_n}{n}L_n(\omega,k)\right)=\sup_{f\in\mathscr{S}_1}\inf_{a\leq t\leq b}\varphi(f(t)).\tag{3.47}$$

应用定理3.6,可以证明定理3.7和3.8.详细推导请见[113]

作为这一节的结束,我们再介绍有关局部时的极大增量$L^*_{n,t_n}(k)=L^*_{n,t_n}(\omega,k)=\max\limits_{0\leq j\leq n-t_n}(L_{j+t_n}(\omega,k)-L_j(\omega,k))$的几个极限

定理，$L_{n,t_n}(k)$的详细定义请见附注3.1的后面.

再令

$$L_n=L_n(0),L^*_{n,t_n}=L^*_{n,t_n}(0). \tag{3.48}$$

$$\theta_n=a_{t_n}a_n^{-1}nt_n^{-1},(a_n\text{ 如(3.4)、(3.5)所定义}), \tag{3.49}$$

定理3.9 设 $\sum=\mathbb{Z}$，任给 $\varepsilon>0$，均存在正常数 K_1,K_2,K_3,K_4，使得对任何 $x\in(0,\infty),n\geqslant1$，有

$$K_1(\theta_n q_n(x)\wedge1)\leqslant P(L^*_{n,t_n}>x)\leqslant K_2(\theta_n\bar{q}_n(x)\wedge1); \tag{3.50}$$

$$K_3\left[\frac{1-q_n(x)}{\theta_n\bar{q}_n(x)}\wedge1\right]\leqslant P(L^*_{n,t_n}\leqslant x)\leqslant K_4\left[\frac{1-q_n(x)}{\theta_n q_n(x)}\wedge1\right], \tag{3.51}$$

其中 $q_n(x)=P(L_{t_n}>x)$，$\bar{q}_n(x)=P(L_{(1+\varepsilon)t_n}>x-1)$.

证明请参见[114]定理2.3

定理3.10 设 $\sum=\mathbb{Z}$，θ_n 如(3.49)所定义，令

$\rho_n=t_n^{-1}(\log\theta_n+\log\log n)$,

$T_1=\min\{j>0:X_j=0\}$,

$a=\min\{j:P(T_1=j)>0\}$,

$q=P(T_1=a),\varphi(s)=\mathrm{E}(e^{-sT_1})$,

$g(s)=-\varphi'(s)/\varphi(s),h(s)=-(g(s))^{-1}\log\varphi(s)-s$,

当$0<\rho_n<-a^{-1}\log q$ 时，$0<\lambda_n<\infty$是

$h(\lambda_n)=\rho_n$ 的唯一解. 再令

$$\beta_n=\begin{cases}[(t_n-1)a^{-1}]+1, & \text{当 }\rho_n\geqslant-a^{-1}\log q\\ t_n/g(\lambda_n), & \text{当 }\rho_n<-a^{-1}\log q,\end{cases}$$

则 $$\limsup_{n\to\infty}(L^*_{n,t_n}/\beta_n)=1\quad a.s.. \tag{3.52}$$

证明请参见[114]定理3.1

定理3.11 设 $\sum=\mathbb{Z}$. (1)若$\limsup\limits_{n\to\infty}nt_n^{-1}=\infty$，则存在正数序列$\{r_n\}$，使

$$\liminf_{n\to\infty}r_n^{-1}L^*_{n,t_n}=1\quad a.s.; \tag{3.53}$$

(2)若$\limsup\limits_{n\to\infty}nt_n^{-1}<\infty$，则对任何正数序列$\{r_n\}$，均有

$$\liminf_{n\to\infty} r_n^{-1} L_{n,t_n}^* = 0 \quad a.s. \text{或} \infty \quad a.s.. \tag{3.54}$$

证明请参见[114]定理4.2

定理3.12 设 $\sum = \mathbb{Z}$，$\{t_n\}$满足：

$$\lim_{n\to\infty} \log(nt_n^{-1})/\log\log n = \infty, \tag{3.55}$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n^{-1} L_{n,t_n}^* = 1 \quad a.s., \tag{3.56}$$

其中 β_n 如定理3.10中所定义.（参见[114]定理5.1.）

第八章

统计自相似集的结构、分布及其 Hausdorff 测度

§1 统计自相似集的结构

本节恒设(E,d)是完备可分距离空间(即所谓的 Polish 空间),d 是 E 上的距离.

对任何 $S:E\to E$,称

$$\mathrm{Lip}(S)\equiv\sup_{\substack{x\neq y\\ x,y\in E}}\frac{d(S(x),S(y))}{d(x,y)}\tag{1.1}$$

为 S 的 Lipschitz 系数.若 $\mathrm{Lip}(S)<1$,则称 S 为压缩映射.

令 $\mathscr{K}(E)$ 是 E 的全体非空紧子集,η 是 $\mathscr{K}(E)$ 上的 Hausdorff 距离,即是 $\forall\ K,L\in\mathscr{K}(E)$,

$$\eta(K,L)=\sup\{d(x,L),d(K,y):x\in K,y\in L\},\tag{1.2}$$

其中 $d(x,L)=\inf\{d(x,y):y\in L\}$ 是 x 到 L 的距离,$d(K,y)$ 类似.

对任何 $A\subset E,\varepsilon>0$,令 $A_\varepsilon=\{x\in E:d(x,A)<\varepsilon\}$ 是"A 的 ε 加边集".

命题 1.1 (1)$\forall\ K,L\in\mathscr{K}(E),\varepsilon>0$,总有

"$\eta(K,L)<\varepsilon\Leftrightarrow K\subset L_\varepsilon$ 且 $L\subset K_\varepsilon$",

$\eta(K,L)=\inf\{\varepsilon>0:K\subset L_\varepsilon$ 且 $L\subset K_\varepsilon\}$;

(2) $\forall\ K_i,L_i\in\mathscr{K}(E)$,总有

$$\eta(\bigcup_i K_i, \bigcup_i L_i) \leqslant \sup_i \eta(K_i, L_i);$$

(3) $\forall K, L \in \mathscr{K}(E), S: E \to E$,总有

$$\eta(S(K), S(L)) \leqslant \mathrm{Lip}(S)\eta(K, L);$$

(4) $(\mathscr{K}(E), \eta)$ 是 Polish 空间;

(5) $f: \mathscr{K}(E) \times \mathscr{K}(E) \to \mathscr{K}(E), f(K, L) = K \bigcup L$ 是连续映射.

证 (1) 由于$d(x,A)$是x的连续函数,且K和L皆为E中紧子集,所以

$$\text{“}d(x,L) < \varepsilon, (\forall x \in K) \Leftrightarrow \sup_{x\in K} d(x,L) < \varepsilon\text{”}.$$

所以

$$\eta(K, L) < \varepsilon \Leftrightarrow \sup_{x\in K} d(x,K) < \varepsilon, \sup_{y\in L} d(K,y) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow d(x,L) < \varepsilon (\forall x \in K), d(K,y) < \varepsilon \quad (\forall y \in L)$$

$$\Leftrightarrow K \subset L_\varepsilon, L \subset K_\varepsilon.$$

因此

$$\eta(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 : \eta(K,L) < \varepsilon\}$$
$$= \inf\{\varepsilon > 0 : K \subset L_\varepsilon, L \subset K_\varepsilon\}.$$

(2) 由(1)知

$$\eta(\bigcup_i K_i, \bigcup_i L_i) = \inf\{\varepsilon > 0 : \bigcup_i K_i \subset (\bigcup_i L_i)_\varepsilon, \bigcup_i L_i \subset (\bigcup_i K_i)_\varepsilon\}$$

$$\leqslant \inf \bigcap_i \{\varepsilon > 0 : K_i \subset (L_i)_\varepsilon, L_i \subset (K_i)_\varepsilon\}$$

$$\leqslant \sup_i \inf\{\varepsilon > 0 : K_i \subset (L_i)_\varepsilon, L_i \subset (K_i)_\varepsilon\}$$

$$= \sup_i \eta(K_i, L_i).$$

(3) 由 $\mathrm{Lip}(S)$ 及 η 的定义即得.

(4) 和(5) 可参见[77]p. 360 和 p. 370.

在本节中,对任何拓扑空间 $\widetilde{E}$,恒设 $\mathscr{K}(\widetilde{E})$ 是 $\widetilde{E}$ 中全体非空紧子集.

$\mathbb{N}$ 表正整数全体,$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. 取定 $N \in \mathbb{N}$. 本节恒设

$$C_0 = \{\varnothing\}, C_q = C_q(N) = \{0, 1, \cdots, N-1\}^q, q \geqslant 1,$$

$D=D(N)=\bigcup_{q\in\mathbb{N}_0}C_q$ 是分量在 $\{0,1,\cdots,N-1\}$ 中的一切有限长的序列.

$C=C(N)=\{0,1,\cdots,N-1\}^{\mathbb{N}_0}$ 是分量在 $\{0,1,\cdots,N-1\}$ 中的一切无穷序列,

在 $\{0,1,\cdots,N-1\}$ 中赋以离散拓扑,在 C_q,C 中赋以相应的乘积拓扑.它们是紧空间(见[109]p. 715)

令 $\mathrm{Con}(E)=\{S:E\to E,\mathrm{Lip}(S)<1\}$,在其上赋以逐点收敛拓扑.

定义 1.1　在 $C\cup D$ 中定义其元 σ 的长度 $|\sigma|$ 及 n 阶截尾 $\sigma|n$ 如下:

$$|\sigma|=\begin{cases}\infty,\text{若 }\sigma\in C\\ q,\text{若 }\sigma\in C_q\quad(q\geqslant 1);\end{cases}$$

$\sigma|n=(\sigma_0,\cdots,\sigma_{n-1})$,当 $n\leqslant|\sigma|$ 且 $\sigma=(\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_{n-1},\cdots)$.

定义 1.2　在 $C\cup D$ 中定义两元 σ,τ 的"衔置"关系 $*$ 及"领先"关系 $\prec$ 如下:

$\forall\,\sigma=(\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_q)\in D,\tau=(\tau_0,\tau_1,\cdots)\in C\cup D,$

$\sigma*\tau=(\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_q,\tau_0,\tau_1,\cdots),$

特别地,$\sigma*\varnothing=\varnothing*\sigma=\sigma$;

$$\forall\,\sigma,\tau\in C\cup D,\text{“}\sigma\prec\tau\Leftrightarrow\tau\,|\,|\sigma|=\sigma\text{”}.$$

定义 1.3　设 $(\Omega,\mathscr{F},\upsilon)$ 是任一概率空间,$K:\Omega\to\mathscr{K}(E)$,称 K 是随机集,如果对 $\mathscr{K}(E)$ 中任何开集 G,均有 $K^{-1}(G)\in\mathscr{F}$.

以下恒设 $\mathrm{diam}(E)<\infty$. 如不特别申明,本章所言概率测度均系可数可加,而言及测度(外测度)则未必可数可加. 本章以后恒取

$\Omega=\Omega(E,N)=(\mathrm{Con}(E)^N)^D$,$\Omega$ 中的元素 ω 用下法表示:

$\omega=(\omega_\sigma,\sigma\in D),\omega_\varnothing=(S_0,\cdots,S_{N-1})\in\mathrm{Con}(E)^N,\omega_\sigma=(S_{\sigma*0},\cdots,S_{\sigma*(N-1)})\in\mathrm{Con}(E)^N,(\sigma\in D)$.

由于 N 是有限集,D 是可数集,所以 Ω 的 Borel σ- 代数 $\mathscr{B}(\Omega)$

就是 $\mathrm{Con}(E)$ 的 Borel σ- 代数 $\mathscr{B}(\mathrm{Con}(E))$ 的乘积 σ- 代数 $(\mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N)^D$(当 Ω 赋以乘积拓扑的时候).

在可测空间 $(\mathrm{Con}(E)^N, \mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N))$ 给定任一概率测度 μ,遂得概率空间

$(\Omega = (\mathrm{Con}(E)^N)^D, \mathscr{F} = (\mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N))^D, \mu^D)$,其中 μ^D 表 μ 的乘积测度.

定义 1.4　设 μ 是 $\mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N)$ 上的概率测度,称 $\mathscr{B}(\mathscr{K}(E))$ 上的概率测度 P 是 μ- 统计自相似的,
若 $\forall B \in \mathscr{B}(\mathscr{K}(E))$,总有

$$P(B) = \mu \times P^N(\{(S_0, \cdots, S_{N-1}; K_0, \cdots, K_{N-1}) \in \mathrm{Con}(E)^N \times \mathscr{K}(E)^N : \bigcup_{q=0}^{N-1} S_q(K_q) \in B\}). \tag{1.3}$$

若 P 对 $\mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N)$ 上任一概率测度 μ,都是 μ- 统计自相似的,则称 P 是统计自相似的. 若 $K(\omega)$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu^D)$ 上取值于 $\mathscr{K}(E)$ 的随机集,且其分布 $\mu^D \circ K^{-1}$ 是 μ- 统计自相似的,则称 $K(\omega)$ 是 μ- 统计自相似的随机集,若对 $\mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N)$ 上的任一概率测度 μ,$K(\omega)$ 都是 μ- 统计自相似的随机集,则称 $K(\omega)$ 是统计自相似的随机集.

定义 1.5　$S : E \to E$,称 S 是相似映射,若存在正实数 r,使得 $d(S(x), S(y)) = rd(x, y)(\forall\ x, y \in E)$. 记 $s\mathrm{Con}(E) = \{S : S$ 是相似映射,且 $S \in \mathrm{Con}(E)\}$.

定义 1.6　称 E 中子集 A 是自相似集,如果存在 $\{S_1, \cdots, S_m\} \subset \mathrm{Con}(E)$,使 $A = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(A)$. 称概率空间 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\nu})$ 上取值于 $\mathscr{K}(E)$ 的随机集 $K(\omega)$ 是自相似随机集,如果对 $\tilde{\nu}$-a. s. 的 ω, $K(\omega)$ 是自相似集.

注意:由 $\Omega = \Omega(E, N) = (\mathrm{Con}(E)^N)^D$ 中元素 $\omega = (\omega_\sigma = (S_{\sigma * 0}, \cdots, S_{\sigma * (N-1)}) \in \mathrm{Con}(E)^N : \sigma \in D)$ 得知:取定 $\omega \in \Omega$ 等价于取定 $S_\sigma \in \mathrm{Con}(E)$(对任何 $\sigma \in D\text{-}\{\varnothing\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$).

命题 1.2　令 $\Omega_0=\Omega_0(E,N)=\{\omega\in\Omega:\forall\ \sigma\in C$，恒有 $\lim\limits_{q\to\infty}\prod\limits_{n=1}^{q}\mathrm{Lip}(S_{\sigma|n})=0\}$，则

$$\Omega_0=\{\omega\in\Omega:\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{Lip}(S_{\sigma|n})=0,\forall\ \sigma\in C\}$$

$$=\left\{\omega\in\Omega:\forall\ \varepsilon>0,\exists\ q_0\in\mathbb{N}\text{ 使}\prod_{n=1}^{q}\mathrm{Lip}(S_{\sigma|n})<\varepsilon,\begin{matrix}\forall\ \sigma\in C,\\ \forall\ q\geqslant q_0\end{matrix}\right\}$$

$$=\left\{\omega\in\Omega:\forall\ \varepsilon>0,\exists\ q_0\in\mathbb{N}\text{ 使}\prod_{n=1}^{q}\mathrm{Lip}(S_{\sigma|n})<\varepsilon,\begin{matrix}\forall\ \sigma\in C_q,\\ \forall\ q\geqslant q_0\end{matrix}\right\}$$

$$=\left\{\omega\in\Omega:\forall\ \varepsilon>0,\exists\ q\in\mathbb{N},\forall\ \sigma\in C_q\text{ 有}\prod_{n=1}^{q}\mathrm{Lip}(S_{\sigma|n})<\varepsilon\right\}.\tag{1.4}$$

证　由于 $\{0,1,\cdots,N-1\}$ 中赋了离散拓扑，而 $C=\{0,1,\cdots,N-1\}^{\mathbb{N}_0}$ 中赋了乘积拓扑，所以，对任何 $q\in\mathbb{N}$，集合 $U_q(\omega)=\{\sigma\in C:\prod\limits_{n=1}^{q}\mathrm{Lip}(S_{\sigma|n})<\varepsilon\}$ 是开集且 C 是紧空间. 任取 $\omega\in\Omega_0$，必有 $\bigcup\limits_{q\in\mathbb{N}}U_q(\omega)\supset C$，再用有限覆盖定理，得知存在 $q_0\in\mathbb{N}$，使 $\bigcup\limits_{q=1}^{q_0}U_q(\omega)=C$. 但由 $U_q(\omega)$ 的定义知 $U_q(\omega)\subset U_{q+1}(\omega)$，所以 $C=U_q(\omega)(\forall\ q\geqslant q_0)$，此即证明了：

$$\Omega_0\subset\left\{\omega\in\Omega:\forall\ \varepsilon>0,\exists\ q_0\in\mathbb{N}\text{ 使}\prod_{n=1}^{q}\mathrm{Lip}(S_{\sigma|n})<\varepsilon,\begin{matrix}\forall\ \sigma\in C\\ \forall\ q\geqslant q_0\end{matrix}\right\}.$$

而上述包含关系的反向包含关系是显然的. 这就证明了(1.4)中的第二个等式. 至于(1.4)中的第三个等式，只须注意 $\prod\limits_{n=1}^{q}\mathrm{Lip}(S_{\sigma|n})$ 只与 σ 的前 q 项有关而与第 q 项以后无关. 第四个等式显然成立.

定理 1.1　Ω_0 是 Borel 可测集且 $\mu^D(\Omega_0)=1$.

为了证明定理 1.1，先证明几个引理.

引理 1.1 定义 $\varphi: \mathrm{Con}(E)^N \times \Omega^N \to \Omega$ 如下：

$$\varphi((S_0,\cdots,S_{N-1};\omega^{(0)},\cdots,\omega^{(N-1)})) = \omega, \tag{1.5}$$

其中

$$\begin{cases}\omega = (\omega_\sigma,\sigma \in D),\omega_\varnothing = (S_0,\cdots,S_{N-1}),\omega^{(t)} = (\omega_\sigma^{(t)},\sigma \in D),\\ \omega_{t*\sigma} = \omega_\sigma^{(t)},\sigma \in D,t \in \{0,1,\cdots,N-1\}.\end{cases} \tag{1.6}$$

则 φ 是 Borel 可测映射，而且对 Ω 中任一 Borel 可测子集 $B \in \mathscr{S}$，总有

$$\mu \times (\mu^D)^N(\varphi^{-1}(B)) = \mu^D(B), \tag{1.7}$$

即是 φ 关于概率测度 $\mu \times (\mu^D)^N$ 的分布为 μ^D.

证 由于 $\mathscr{S} = (\mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N))^D$ 是乘积 Borel σ-代数，为证 φ 是 Borel 可测的，只需证明：$\forall\, q \in \mathbb{N}_0, B_\sigma \in \mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N), \sigma \in \bigcup_{n=0}^{q+1} C_n$，有

$$\varphi^{-1}(\{\omega \in \Omega: \omega_\sigma \in B_\sigma, \forall\, \sigma \in \bigcup_{n=0}^{q+1} C_n\}) \in \mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N \times \Omega^N). \tag{1.8}$$

事实上，

$$\begin{aligned}&\varphi^{-1}(\{\omega \in \Omega: \omega_\sigma \in B_\sigma, \forall\, \sigma \in \bigcup_{n=0}^{q+1} C_n\})\\ &= \varphi^{-1}(\{\omega \in \Omega: (S_0,\cdots,S_{N-1}) \in B_\varnothing, \omega_\sigma^{(t)} = \omega_{t*\sigma} \in \mathscr{B}_{t*\sigma},\\ &\qquad t \in \{0,1,\cdots,N-1\}, \sigma \in \bigcup_{n=0}^{q} C_n\})\\ &= B_\varnothing \times (\mathop{\times}_{t=0}^{N-1}[(\mathop{\times}_{\sigma \in \bigcup_{n=0}^{q} C_n} B_{t*\sigma}) \times (\mathop{\times}_{\sigma \in D \setminus \bigcup_{n=0}^{q} C_n} \mathrm{Con}(E)^N)])\\ &\in \mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N \times \Omega^N),\end{aligned} \tag{1.9}$$

所以 φ 是 Borel 映射. 由(1.9)，再用 Fubini 定理可证(1.7)成立.

引理 1.2 设 g 是由 $\mathrm{Con}(E)^N$ 到 $[0,1)$ 的 Borel 可测函数，令

$$\Omega_g = \{\omega \in \Omega : \prod_{n=1}^{\infty} g(S_{(\sigma|(n-1))*0}, \cdots, S_{(\sigma|(n-1))*(N-1)}) = 0, \quad \forall \sigma \in C\}, \tag{1.10}$$

则 Ω_g 是 Borel 可测的(即 $\in \mathscr{F}$),且 $\mu^D(\Omega_g) = 1$.

证 仿命题 1.2 中证明(1.4) 式的方法可证:

$$\Omega_g = \{\omega \in \Omega : \forall m \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N}, \text{使} \forall \sigma \in C_q, \text{有} \prod_{n=1}^{q} g(S_{(\sigma|(n-1))*0}, \cdots, S_{(\sigma|(n-1))*(N-1)}) < \frac{1}{m}\} =$$

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{q\in\mathbb{N}} \bigcap_{\sigma\in C_q} \left\{\omega \in \Omega : \prod_{n=1}^{q} g(S_{(\sigma|(n-1))*0}, \cdots, S_{(\sigma|(n-1))*(N-1)}) < \frac{1}{m}\right\}.$$

而 g 是由 $\mathrm{Con}(E)^N$ 到$[0,1]$ 的 Borel 可测函数,所以

$$\left\{\omega \in \Omega : \prod_{n=1}^{q} g(S_{(\sigma|(n-1))*0}, \cdots, S_{(\sigma|(n-1))*(N-1)}) < \frac{1}{m}\right\} \in \mathscr{F},$$

从而 $\Omega_g \in \mathscr{F}$.

往证 $\mu^D(\Omega_g) = 1$. 为此,对任意 $a > 0$,令

$$B_a = \{\omega \in \Omega : \exists \sigma \in C, \text{使} \prod_{n=1}^{\infty} g (S_{(\sigma|(n-1))*0}, \cdots, S_{(\sigma|(n-1))*(N-1)}) \geqslant a\}. \tag{1.11}$$

仿 $\Omega_g \in \mathscr{F}$ 之证法可知 $B_a \in \mathscr{F}$. 定义

$$p:(0,1) \to [0,1], p(a) = \mu^D(B_a).$$

显然 p 是单调非升函数. 由(1.10)、(1.11) 立得

$$\Omega_g = \Omega - \bigcup_{a>0} B_a = \Omega - \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{\frac{1}{m}}. \tag{1.12}$$

所以为证 $\mu^D(\Omega_g) = 1$,只需证明

$$p(a) \equiv \mu^D(B_a) = 0 \quad (\forall a > 0). \tag{1.13}$$

事实上,由引理 1.1 中(1.7) 式有

$$\begin{aligned} p(a) &= \mu^D(B_a) = \mu \times (\mu^D)^N(\varphi^{-1}(B)) \\ &= \mu \times (\mu^D)^N(\{(S_0, \cdots, S_{N-1}; \omega^{(0)}, \cdots, \omega^{(N-1)}) \\ &\qquad \in \mathrm{Con}(E)^N \times \Omega^N \\ &: \exists \sigma \in C, \exists \rho \in \{0,1,\cdots,N-1\}, \text{使} \end{aligned}$$

$$g(S_0,\cdots,S_{N-1})\prod_{n=1}^{\infty}g(S^{(\rho)}_{(\sigma(n-1))*0},\cdots,S^{(\rho)}_{(\sigma(n-1))*(N-1)})\geqslant a\})$$

$$\leqslant\sum_{\rho=0}^{N-1}\mu\times(\mu^D)^N(\{(S_0,\cdots,S_{N-1};\omega^{(0)},\cdots,\omega^{(N-1)})$$

$$\in \mathrm{Con}(E)^N\times\Omega^N:\exists\ \sigma\in C,\text{使}$$

$$g(S_0,\cdots,S_{N-1})\prod_{n=1}^{\infty}g(S^{(\rho)}_{(\sigma(n-1))*0},\cdots,S^{(\rho)}_{(\sigma(n-1))*(N-1)})\geqslant a\})$$

$$\leqslant N\mu(\{(S_0,\cdots,S_{N-1})\in \mathrm{Con}(E)^N:$$

$$g(S_0,\cdots,S_{N-1})\geqslant a\})p(a),$$

(注意：表 $\omega^{(\rho)}=(\omega^{(\rho)}_\sigma,\sigma\in D),\omega^{(\rho)}_\emptyset=(S^{(\rho)}_0,\cdots,S^{(\rho)}_{N-1}),\omega^{(\rho)}_\sigma=(S^{(\rho)}_{\sigma*0},\cdots,S^{(\rho)}_{\sigma*(N-1)})$). (1.14)

由于 $g<1$，所以必存在 $b\in(0,1)$，使

$$\mu(\{(S_0,\cdots,S_{N-1})\in \mathrm{Con}(E)^N:g(S_0,\cdots,S_{N-1})\geqslant b\})<\frac{1}{N}. \tag{1.15}$$

在(1.14)中取 $a=b$，再应用(1.15)得

$$p(b)\leqslant \alpha p(b)\quad(0\leqslant\alpha\leqslant 1). \tag{1.16}$$

故

$$p(b)=0. \tag{1.17}$$

所以 $\{a\in(0,1):p(a)=0\}$ 非空. 因此为证 $p(a)\equiv 0\quad(\forall\ a\in(0,1))$，若注意 p 的单调非升性，只需证明

$$\delta\equiv\inf\{a\in(0,1):p(a)=0\}=0. \tag{1.18}$$

谬设 $\delta>0$. 由于 $b<1$，故必存在一个 $a>\delta$ 使

$$ab<\delta. \tag{1.19}$$

仿前可证

$$p(ab)=\mu^D(B_{ab})$$

$$\leqslant\sum_{\rho=0}^{N-1}\mu\times(\mu^D)^N(\{(S_0,\cdots,S_{N-1};\omega^{(0)},\cdots,\omega^{(N-1)})$$

$$\in \mathrm{Con}(E)^N\times\Omega^N:\exists\ \sigma\in C\ \text{使}$$

$$g(S_0,\cdots,S_{N-1})\prod_{n=1}^{\infty}g(S^{(\rho)}_{(\sigma(n-1))*0},\cdots,S^{(\rho)}_{(\sigma(n-1))*(N-1)})\geqslant ab\}). \tag{1.20}$$

由于 $a > \delta$，由 δ 的定义有 $p(a) = 0$，从而由 $p(a)$ 的定义知

$$\mu^D\Big(\omega^{(\rho)} \in \Omega: \prod_{n=1}^{\infty} g\big(S^{(\rho)}_{(\sigma(n-1))*0}, \cdots, S^{(\rho)}_{(\sigma(n-1))*(N-1)}\big) \leqslant a,$$
$$\forall\, \sigma \in C\Big) = 1 - p(a) = 1. \tag{1.21}$$

以(1.21)代入(1.20)得

$$p(ab) \leqslant \sum_{\rho=0}^{N-1} \mu \times (\mu^D)^N\Big(\{(S_0, \cdots, S_{N-1}; \omega^{(0)}, \cdots, \omega^{(N-1)})$$
$$\in \mathrm{Con}(E)^N \times \Omega^N: \exists\, \sigma \in C \text{ 使}$$
$$g(S_0, \cdots, S_{N-1}) \geqslant b, \text{且}$$
$$\prod_{n=1}^{\infty} g\big(S^{(\rho)}_{(\sigma(n-1))*0}, \cdots, S^{(\rho)}_{(\sigma(n-1))*(N-1)}\big) \geqslant ab\}\Big)$$
$$\leqslant N\mu\big((S_0, \cdots, S_{N-1}) \in \mathrm{Con}(E)^N: g(S_0, \cdots, S_{N-1}) \geqslant b\big)p(ab).$$

再注意(1.15)可得 $p(ab) = 0$. 而 $ab < \delta$，这与 δ 的定义矛盾. 引理 1.2 得证.

引理 1.3　映射 $\mathrm{Lip}(S): \mathrm{Con}(E) \to (0,1)$ 是下半连续的(即 $\forall\, \alpha \in [0,1)$，$\{S \in \mathrm{Con}(E): \mathrm{Lip}(S) \leqslant \alpha\}$ 是闭集)，更是 Borel 可测的.

证　因为 $\mathrm{Lip}(S) = \sup\limits_{\substack{x \neq y \\ x, y \in E}} \dfrac{d(S(x), S(y))}{d(x, y)}$，而对任意固定的 $x \neq y$，$x, y \in E$，当 $S_n \to S$(在 $\mathrm{Con}(E)$ 中的逐点收敛的拓扑下)时，由距离函数的连续性有 $d(S_n(x), S_n(y)) \to d(S(x), S(y))$，所以 $d(S(x), S(y))/d(x, y)$ 是 S 的连续函数，从而作为一族函数的 sup 的 $\mathrm{Lip}(S)$ 是下半连续函数.

现在利用上述诸引理来证明定理 1.1. 取引理 1.2 中的 g 为:

$$g: \mathrm{Con}(E)^N \to [0,1],\ g(S_0, \cdots, S_{N-1}) = \max_{0 \leqslant \rho \leqslant N-1} \mathrm{Lip}(S_\rho),$$

由引理 1.3，g 是 Borel 可测的. 再用引理 1.2，Ω_g 是 Borel 可测集且 $\mu^D(\Omega_g) = 1$. 仿引理 1.2 中证明 Ω_g 是 Borel 可测集的方法可证 Ω_0 是 Borel 可测集. 又显然有 $\Omega_g \subset \Omega_0$，所以 $\mu^D(\Omega_0) = 1$. 定理 1.1 证毕.

注意：定理 1.1 的结论对 $\mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N)$ 上任何概率测度 μ 都

成立.

定理 1.2([77]) 对任何 $\omega \in \Omega_0$.

$$K = K(\omega) = \bigcap_{q \in \mathbf{N}} \bigcup_{\sigma \in C_{q+1}} \overline{S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(\mathbf{E})} \quad (1.22)$$

是紧集,此外,对任意紧集族$\{K_\sigma, \sigma \in D\} \subset \mathscr{K}(E)$,有

$$K(\omega) = \lim_{q \to \infty} \bigcup_{\sigma \in C_{q+1}} S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(K_\sigma), \quad (1.23)$$

((1.23) 是依距离 η 收敛).

证 (1) 首先我们证明:

$$\{\bigcup_{\sigma \in C_{q+1}} S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(K_\sigma), q = 0, 1, \cdots\}$$

是空间$(\mathscr{K}(E), \eta)$ 中的 Cauchy 序列. 事实上,$\forall\ \varepsilon > 0$,由 $\mathrm{Lip}(S)$ 的定义有

$$\mathrm{diam}(S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(E)) \leqslant \mathrm{diam}(E) \prod_{n=1}^{q+1} \mathrm{Lip}(S_{\sigma|n}). \quad (1.24)$$

而由 $\omega \in \Omega_0$ 及命题 1.2 中(1.4) 式和 $\mathrm{diam}(E) < \infty$ 可知: $\exists\ q_0 \in \mathbf{N}$,使

$$(1.24)\ \text{式右方} \leqslant \varepsilon \quad (\forall\ q \geqslant q_0, \sigma \in C_{q+1}). \quad (1.25)$$

今任取 $r > q \geqslant q_0, \sigma \in C_{q+1}, x \in S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(K_\sigma)$,令 $\sigma' \in C_{r-q}$,则由 $d(x, A \cup B) \leqslant d(x, A) \wedge d(x, B)$ 及 $\sigma * \sigma' \in C_{r+1}$ 得

$$\begin{aligned} & d(x, \bigcup_{\tau \in C_{r+1}} S_{\tau|1} \circ \cdots \circ S_{\tau|(r+1)}(K_\tau)) \\ & \leqslant d(x, S_{(\sigma*\sigma')|1} \circ \cdots \circ S_{(\sigma*\sigma')|(r+1)}(K_{\sigma*\sigma'})) \quad (\because \sigma * \sigma' \in C_{r+1}) \\ & = d(x, S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(L)), \end{aligned} \quad (1.26)$$

其中

$$L = S_{\sigma*(\sigma'|1)} \circ \cdots \circ S_{\sigma*(\sigma'|(r-q))}(K_{\sigma*(\sigma'|(r-q))}). \quad (1.27)$$

($\because |\sigma| = q + 1, \therefore (\sigma * \sigma')|p = \sigma|p$ 当 $p \leqslant q + 1$ 时). 再注意

$$\text{“}x \in A \supset B \Rightarrow \mathrm{diam}(A) \geqslant d(x, B)\text{”}, \quad (1.28)$$

视 $S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(L)$ 为(1.28) 中之 B,$S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(E)$ 为(1.28) 中之 A,有

$$d(x, S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(L)) \leqslant \operatorname{diam}(S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(E)). \tag{1.29}$$

将(1.24)、(1.25)代入(1.29)得

$$d(x, S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(L)) < \varepsilon, (\forall\, q \geqslant q_0, \sigma \in C_{q+1}). \tag{1.30}$$

以(1.30)代入(1.26)得：

$$d(x, \bigcup_{\tau \in C_{r+1}} S_{\tau|1} \circ \cdots \circ S_{\tau|(r+1)}(K_\tau)) < \varepsilon,$$
$$(\forall\, x \in \bigcup_{\sigma \in C_{q+1}} S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(K_\sigma)). \tag{1.31}$$

仿之可证：

$$d(\bigcup_{\sigma \in C_{q+1}} S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(K_\sigma), y) < \varepsilon,$$
$$(\forall\, y \in \bigcup_{\tau \in C_{r+1}} S_{\tau|1} \circ \cdots \circ S_{\tau|(r+1)}(K_\tau)). \tag{1.32}$$

由(1.32)、(1.31)和 η 的定义得

$$\eta(\bigcup_{\sigma \in C_{q+1}} S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(K_\sigma), \bigcup_{\tau \in C_{r+1}} S_{\tau|1} \circ \cdots \circ S_{\tau|(r+1)}(K_\tau)) < \varepsilon. \tag{1.33}$$

此即$\{\bigcup_{\sigma \in C_{q+1}} S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(K_\sigma), q = 0, 1, \cdots\}$是 Cauchy 序列.

(2)　由于$(\mathscr{K}(E), \eta)$是完备的，所以存在非空紧集 $K' = K'(\omega) \in \mathscr{K}(E)$ 使

$$K'(\omega) = \lim_{q \to \infty} \bigcup_{\sigma \in C_{q+1}} S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(K_\sigma), \tag{1.34}$$

(关于距离 η 收敛，其中$\{K_\sigma, \sigma \in D\}$是 $\mathscr{K}(E)$ 中任一族非空紧集).

(3)　为完成定理的证明，只需证明：

$$K'(\omega) = K(\omega) = \bigcap_{q \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{\sigma \in C_{q+1}} \overline{S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(E)}. \tag{1.35}$$

事实上，$\forall\, q \in \mathbb{N}, r \geqslant q$，总有

$$\bigcup_{\tau \in C_{r+1}} S_{\tau|1} \circ \cdots \circ S_{\tau|(r+1)}(K_\tau)$$
$$= \bigcup_{\sigma \in C_{q+1}} \bigcup_{\delta \in C_{r-q}} S_{(\sigma * \delta)|1} \circ \cdots \circ S_{(\sigma * \delta)|(r+1)}(K_{\sigma * \delta})$$

$$= \bigcup_{\sigma \in C_{q+1}} S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}\Big(\bigcup_{\delta \in C_{r-q}} S_{\sigma*(\delta|1)} \circ \cdots \circ S_{\sigma*(\delta|(r-q))}(K_{\sigma*\delta})\Big)$$

$$\subset \bigcup_{\sigma \in C_{q+1}} \overline{S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(E)} \quad (\text{是闭集}). \tag{1.36}$$

在(1.36)中令 $r \to \infty$ 并注意 $q \in \mathbb{N}$ 可任意，则得

$$K'(\omega) \subset K(\omega). \tag{1.37}$$

最后证明

$$K(\omega) \subset K'(\omega). \tag{1.38}$$

谬设(1.38)不成立，则$\exists\ x \in K(\omega) - K'(\omega)$. 由 $x \in K(\omega)$ 的定义知：$\exists\ \sigma^q \in C_{q+1}$，使

$$x \in \overline{S_{\sigma^q|1} \circ \cdots S_{\sigma^q|(q+1)}(E)}, (\forall\ q \in \mathbb{N}\ ) \tag{1.39}$$

由 $x \notin K'(\omega)$ 及 $K'(\omega)$ 是紧集知：$\exists\ \varepsilon_0 > 0$ 使

$$\frac{1}{2}d(x, K'(\omega)) > \varepsilon_0. \tag{1.40}$$

而由(1.24)及(1.25)知：$\exists\ q_0 \in \mathbb{N}$，使

$$\operatorname{diam}(S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(E)) < \varepsilon_0 \quad (\forall\ q \geqslant q_0, \sigma \in C_{q+1}). \tag{1.41}$$

由(1.40)及(1.41)得

$$\operatorname{diam}(S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(E)) < \frac{1}{2}d(x, K'(\omega)), \begin{pmatrix} \forall\ q \geqslant q_0 \\ \sigma \in C_{q+1} \end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

由(1.39)、(1.42)知对任何 $K_{\sigma^q} \in \mathscr{K}(E)$ 有

$$S_{\sigma^q|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma^q|(q+1)}(K_{\sigma^q}) \subset S_{\sigma^q|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma^q|(q+1)}(E)$$

$$\subset B\Big(x, \frac{1}{2}d(x, K'(\omega))\Big), (\forall\ q \geqslant q_0). \tag{1.43}$$

（其中 $B(x,r)$ 是以 x 为心以 r 为半径之开球.）因此，由 η 的定义及(1.43)和(1.40)有

$$\eta\Big(K'(\omega), \bigcup_{\tau \in C_{q+1}} S_{\tau|1} \circ \cdots \circ S_{\tau|(q+1)}(K_\tau)\Big)$$

$$\geqslant \sup\Big\{d(y, K'(\omega)) : y \in \bigcup_{\tau \in C_{q+1}} S_{\tau|1} \circ \cdots \circ S_{\tau|(q+1)}(K_\tau)\Big\}$$

$$\geqslant \sup\{d(y, K'(\omega)) : y \in S_{\sigma^q|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma^q|(q+1)}(K_{\sigma^q})\}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}d(x,K'(\omega)) > \varepsilon_0 > 0, \tag{1.44}$$

这与 $K'(\omega)$ 的定义矛盾. 定理 1.2 证毕.

记 $\Omega^* = \{\omega \in \Omega : \omega = (\omega_\sigma, \sigma \in D), \omega_\sigma \equiv \omega_\varnothing\}$.

命题 1.4　$\Omega^* \subset \Omega_0$.

证　$\forall\, \omega^* = (\omega_\sigma, \sigma \in D) \in \Omega^*$, 必有 $\omega_\sigma \equiv \omega_\varnothing = (S_0, \cdots, S_{N-1}) \in \mathrm{Con}(E)^N$, 而 $\omega_\sigma = (S_{\sigma * 0}, \cdots, S_{\sigma * (N-1)})$, 所以 $\forall\, \sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \cdots) \in C$, 总有

$$S_{\sigma|n} = S_{(\sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1})} = S_{\sigma_{n-1}},$$

但是 $\{\sigma_0, \sigma_1, \cdots\} \subset \{0, 1, \cdots, N-1\}$ 是有限集, 所以 $\exists\, k_i \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$ 使 $\sigma_{k_i} \equiv \sigma_{k_0} (i = 1, 2, \cdots)$. 故

$$\prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{Lip}(S_{\sigma|n}) = \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{Lip}(S_{\sigma_{n-1}}) \leqslant \prod_{i=1}^{\infty} \mathrm{Lip}(S_{\sigma_{k_i}})$$

$$= \lim_{q\to\infty} \prod_{i=1}^{q} \mathrm{Lip}(S_{\sigma_{k_0}}) = \lim_{q\to\infty} \mathrm{Lip}(S_{\sigma_{k_0}})^q = 0.$$

此即 $\omega^* \in \Omega_0$.

定理 1.3　任取 $\omega_\varnothing = (S_0, \cdots, S_{N-1}) \in \mathrm{Con}(E)^N$, $\omega^* = (\omega_\sigma, \sigma \in D) \in \Omega^*$, $\forall\, B \in \mathscr{K}(E)$ 定义

$$\Psi_{\omega^*}(B) = \bigcup_{i=0}^{N-1} S_i(B),$$

$$\Psi_{\omega^*}^{(n)} = \overbrace{\Psi_{\omega^*} \circ \cdots \circ \Psi_{\omega^*}} \quad (n \geqslant 1).$$

令 $K(\omega)$ 如定理 1.2 中所定义, $\gamma = \sup\limits_{0 \leqslant i \leqslant N-1} \mathrm{Lip}(S_i)$, 则恒有:

(1)　$\Psi_{\omega^*}^{(n)} : \mathscr{K}(E) \to \mathscr{K}(E), (n \geqslant 1)$;

(2)　$\mathrm{Lip}(\Psi_{\omega^*}^{(n)}) \leqslant \gamma \mathrm{Lip}(\Psi_{\omega^*}^{(n-1)}) < 1, (n \geqslant 1)$; ($\Psi_{\omega^*}^{(0)}$ 定义为恒等映射.)

(3)　$K(\omega^*) = \lim\limits_{n\to\infty} \Psi_{\omega^*}^{(n)}(B), (\forall\, B \in \mathscr{K}(E))$; (其极限是依距离 η 收敛.)

(4)　$\Psi_{\omega^*}(K(\omega^*)) = K(\omega^*)$, 即是说:

$K(\omega^*)$ 是 Ψ_{ω^*} 的唯一不动点(不变集合),或称 $K(\omega^*)$ 是 $\{S_0,\cdots,S_{N-1}\}$ 的唯一不动点(不变集合);(注意:Ψ_{ω^*} 由 $(S_0,\cdots,S_{N-1})=\omega_{G}$ 唯一决定.)

(5)　记 $K^*=K(\omega^*)$,$K^*_{i_1,\cdots,i_p}=S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_p}(K^*)$,则有

$$K^*_{i_1,\cdots,i_p}=\bigcup_{j=0}^{N-1}K^*_{i_1,\cdots,i_p,j},$$

$$K^*\supset K^*_{i_1}\supset\cdots\supset K^*_{i_1,\cdots,i_p}\supset\cdots\quad(p\geqslant 1,i_k\in\{0,\cdots,N-1\}),$$

$$\bigcap_{p=1}^{\infty}K^*_{i_1,\cdots,i_p}=\{k_{i_1,\cdots,i_p,\cdots}\}\text{ 是 }E\text{ 中单点集},$$

$$K^*=K(\omega^*)=\bigcup_{\substack{0\leqslant i_p\leqslant N-1\\ p\geqslant 1}}\{k_{i_1,i_2,\cdots}\};$$

(6)　若令 $x_{i_1,\cdots,i_p}$ 是 $S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_p}$ 的唯一不动点,则

$$x_{i_1,\cdots,i_p}=k_{i_1,\cdots,i_p,i_1,\cdots,i_p,\cdots},$$

$$\lim_{p\to\infty}x_{i_1,\cdots,i_p}=k_{i_1,i_2,\cdots,i_p,\cdots}\text{ 存在,且}$$

$$K^*=K(\omega^*)=\overline{\{x_{i_1,\cdots,i_p}:0\leqslant i_k\leqslant N-1,p\geqslant 1\}}.$$

证　(1) $\forall\, B\in\mathscr{K}(E)$. 设 $\{G_i,i\in I\}$ 是 $S_k(B)$ 的一个开覆盖,则有

$$S_k^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I}G_i\Big)\supset S_k^{-1}(S_k(B))\supset B.$$

但 $S_k^{-1}\Big(\bigcup\limits_{i\in I}G_i\Big)=\bigcup\limits_{i\in I}S_k^{-1}(G_i)$,$S_k^{-1}(G_i)$ 是开集($\because S_k$ 连续),B 是非空紧集,所以存在 $\{i_1,\cdots,i_m\}\subset I$,使 $\bigcup\limits_{j=1}^{m}S_k^{-1}(G_{i_j})\supset B$. 于是

$$\bigcup_{j=1}^{m}G_{i_j}\supset\bigcup_{j=1}^{m}S_k(S_k^{-1}(G_{i_j}))=S_k\Big(\bigcup_{j=1}^{m}S_k^{-1}(G_{i_j})\Big)\supset S_k(B),$$

所以 $S_k(B)$ 是非空紧集,而有限个非空紧集之并亦非空紧集,(1)得证.

(2)　由 Lip 的定义及命题 1.1 可得:

$$\mathrm{Lip}(\Psi_{\omega^*})=\sup_{\substack{B,B'\in\mathscr{K}(E)\\ B\neq B'}}\frac{\eta(\Psi_{\omega^*}(B),\Psi_{\omega^*}(B'))}{\eta(B,B')}$$

$$=\sup_{\substack{B,B'\in\mathscr{K}(E)\\ B\neq B'}}\frac{\eta\Big(\bigcup\limits_{i=0}^{N-1}S_i(B),\bigcup\limits_{i=0}^{N-1}S_i(B')\Big)}{\eta(B,B')}$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant i\leqslant N-1}\left(\sup_{\substack{B,B'\in\mathcal{K}(E)\\B\neq B'}}\frac{\eta(S_i(B),S_i(B'))}{\eta(B,B')}\right)$$

$$=\sup_{0\leqslant i\leqslant N-1}\mathrm{Lip}(S_i)<1,$$

$\mathrm{Lip}(\Psi_{\omega^*}^{(n)})$

$$=\sup_{\substack{B,B'\in\mathcal{K}(E)\\B\neq B'}}\frac{\eta\left(\bigcup_{i=0}^{N-1}S_i(\Psi_{\omega^*}^{(n-1)}(B)),\bigcup_{i=0}^{N-1}S_i(\Psi_{\omega^*}^{(n-1)}(B'))\right)}{\eta(B,B')}$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant i\leqslant N-1}\sup_{\substack{B,B'\in\mathcal{K}(E)\\B\neq B'}}\left[\frac{\eta(S_i(\Psi_{\omega^*}^{(n-1)}(B)),S_i(\Psi_{\omega^*}^{(n-1)}(B')))}{\eta(\Psi_{\omega^*}^{(n-1)}(B),\Psi_{\omega^*}^{(n-1)}(B'))}\cdot\frac{\eta(\Psi_{\omega^*}^{(n-1)}(B),\Psi_{\omega^*}^{(n-1)}(B'))}{\eta(B,B')}\right]$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant i\leqslant N-1}(\mathrm{Lip}(S_i)\mathrm{Lip}(\Psi_{\omega^*}^{(n-1)})),$$

(2) 证毕.

(3) $\forall\,\sigma=(\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_n)\in C_{n+1}$，由于 $\omega_\sigma\equiv\omega_{\varnothing}=(S_0,\cdots,S_{N-1})$，且 $\omega_\sigma=(S_{\sigma*0},\cdots,S_{\sigma*(N-1)})$，所以 $S_{\sigma|i}=S_{\sigma_{i-1}}(1\leqslant i\leqslant N+1)$. 因此，$\forall\,B\in\mathcal{K}(E)$ 有

$$\bigcup_{\sigma\in C_{n+1}}S_{\sigma|1}\circ\cdots\circ S_{\sigma|(n+1)}(B)=\bigcup_{\sigma\in C_{n+1}}S_{\sigma_0}\circ\cdots\circ S_{\sigma_n}(B)$$

$$=\Psi_{\omega^*}^{(n+1)}(B).\tag{1.45}$$

在(1.45)中对 $n\to\infty$ 取极限并利用定理1.2可得：

$$K(\omega^*)=\lim_{n\to\infty}\Psi_{\omega^*}^{(n)}(B).$$ (3) 得证.

(4) 因为 $K^*=K(\omega^*)\in\mathcal{K}(E)$，$\Psi_{\omega^*}$ 是 $(\mathcal{K}(E),\eta)$ 上的压缩映射，所以由(3)可得

$$K^*=K(\omega^*)=\lim_{n\to\infty}\Psi_{\omega^*}^{(n+1)}(K(\omega^*))$$

$$=\Psi_{\omega^*}(\lim_{n\to\infty}\Psi_{\omega^*}^{(n)}(K(\omega^*)))=\Psi_{\omega^*}(K(\omega^*)),$$

即 $K(\omega^*)$ 是 Ψ_{ω^*} 的不动点，而Polish空间上的压缩映射的不动点是唯一的，(4) 得证.

(5) 由(4)有 $\Psi_{\omega^*}(K^*)=K^*$，故

$$\bigcup_{j=0}^{N-1} K^*_{i_1,\cdots,i_p,j} = S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_p}\Big(\bigcup_{j=0}^{N-1} S_j(K^*)\Big)$$
$$= S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_p}(\Psi_{\omega^*}(K^*))$$
$$= S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_p}(K^*) = K^*_{i_1,\cdots,i_p}. \qquad (1.46)$$

由(1.46) 立得:

$$K^* \supset K^*_{i_1} \supset \cdots \supset K^*_{i_1,\cdots,i_p} \supset \cdots, (p \geqslant 1, i_k \in \{0,1,\cdots,N-1\}). \qquad (1.47)$$

而 E 是 Polish 空间且

$$\lim_{p\to\infty}\mathrm{diam}(K^*_{i_1,\cdots,i_p}) = 0,$$

所以 $\bigcap_{p=1}^{\infty} K^*_{i_1,\cdots,i_p}$ 是 E 中单点集,记之为 $\{k_{i_1,i_2,\cdots}\}$. 反复用(1.46),$\forall x \in K^*$,必有 $i_1 \in \{0,1,\cdots,N-1\}$ 使 $x \in S_{i_1}(K^*) = K^*_{i_1}$,由此又必有 $i_2 \in \{0,1,\cdots,N-1\}$ 使 $x \in S_{i_1}\circ S_{i_2}(K^*) = K^*_{i_1,i_2}$ ($\because S_{i_1}(K^*) = \bigcup_{j=0}^{N-1} S_{i_1}\circ S_j(K^*)$). $\cdots$,总之存在 $i_1, i_2, \cdots, (i_k \in \{0, 1,\cdots,N-1\})$ 使 $x \in \bigcap_{p=1}^{\infty} K^*_{i_1,\cdots,i_p}$. 这就证明了

$$K^* \subset \bigcup_{\substack{0\leqslant i_m\leqslant N-1\\ m\geqslant 1}} \bigcap_{p=1}^{\infty} K^*_{i_1,\cdots,i_p}$$
$$= \bigcup_{\substack{0\leqslant i_m\leqslant N-1\\ m\geqslant 1}} \{k_{i_1,i_2,\cdots}\}. \qquad (1.48)$$

而(1.48) 的反向包含关系由(1.47) 即得. (5) 证毕.

(6) 由于 $(S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_p})^{(n)}(x_{i_1,\cdots,i_p}) = x_{i_1,\cdots,i_p}$,($F^{(n)}$ 表映射 F 的 n 重复合映射),故令 $n\to\infty$ 并利用(5) 得

$$k_{i_1,\cdots,i_p,i_1,\cdots,i_p,\cdots} = x_{i_1,\cdots,i_p}.$$

又

$$S_{j_1}\circ\cdots\circ S_{j_q}(k_{i_1,i_2,\cdots}) = S_{j_1}\circ\cdots\circ S_{j_q}\Big(\bigcap_{p=1}^{\infty} K^*_{i_1,\cdots,i_p}\Big)$$
$$= \bigcap_{p=1}^{\infty} K^*_{j_1,j_2,\cdots,j_q,i_1,i_2,\cdots,i_p}$$
$$= k_{j_1,\cdots,j_q,i_1,i_2,\cdots}.$$

由于 $x_{i_1,\cdots,i_p} - k_{i_1,\cdots,i_p,i_1,\cdots,i_p,\cdots}$ 是 $S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_p}$ 的唯一不动点，所以

$$\{x_{i_1,\cdots,i_p},k_{i_1,\cdots,i_p,\cdots}\}\subset K^*_{i_1,\cdots,i_p}\subset K^*. \tag{1.49}$$

但是

$$\lim_{p\to\infty}\operatorname{diam}(K^*_{i_1,\cdots,i_p})=0, \tag{1.50}$$

故

$$\lim_{p\to\infty}x_{i_1,\cdots,i_p}=k_{i_1,\cdots,i_p,\cdots}. \tag{1.51}$$

由(5) 知

$$K^*=\bigcup_{\substack{0\leqslant i_m\leqslant N-1\\ m\geqslant 1}}\{k_{i_1,i_2,\cdots}\}. \tag{1.52}$$

由(1.49)、(1.51)、(1.52) 得

$$K^*=\overline{\{x_{i_1,\cdots,i_p}:0\leqslant i_m\leqslant N-1,m\geqslant 1\}}.$$

定理 1.3 证毕.

此定理中的 $K^*=K(\omega^*)(\omega^*\in\Omega^*)$ 就是[109]中的 Hutchinson 构造.

定理 1.4 任取 $\omega_\varnothing=(S_0,\cdots,S_{N-1})\in\operatorname{Con}(E)^N,\omega^*=(\omega_\sigma,\sigma\in D)\in\Omega^*$, $B_\sigma\in\mathscr{K}(E),(\forall\ \sigma\in D)$，定义

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Psi}^{(n)}_{\omega^*}(B_\sigma,\sigma\in C_n)\\&=\bigcup_{\sigma\in C_n}S_{\sigma,1}\circ\cdots\circ S_{\sigma,n}(B_\sigma)\\&=\bigcup_{\sigma\in C_n}S_{\sigma_0}\circ\cdots\circ S_{\sigma_{n-1}}(B_\sigma),(n\geqslant 1),\end{aligned} \tag{1.53}$$

(其中 $\sigma=(\sigma_0,\cdots,\sigma_{n-1})$), $K(\omega)$ 如定理 1.2 所定义, $\gamma=\sup\limits_{0\leqslant i\leqslant N-1}\operatorname{Lip}(S_i)$，则恒有：

(1) $\widetilde{\Psi}^{(n)}_{\omega^*}:\mathscr{K}(E)^{nN}\to\mathscr{K}(E),(n\geqslant 1)$;

(2) $\operatorname{Lip}(\widetilde{\Psi}^{(n)}_{\omega^*})\leqslant\gamma\operatorname{Lip}(\widetilde{\Psi}^{(n-1)}_{\omega^*}),(n\geqslant 1)$

($\widetilde{\Psi}^{(0)}_{\omega^*}$ 定义为恒等映射);

(3) $K(\omega^*)=\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{\Psi}^{(n)}_{\omega^*}(B_\sigma,\sigma\in C_n)$

($\forall\ \{B_\sigma,\sigma\in C_n\}\subset\mathscr{K}(E)$，其极限是依 η 收敛);

(4) $\widetilde{\Psi}^{(n)}_{\omega^*}$ 是连续映射.

证　(1)、(2) 完全仿定理 1.3 的(1) 和(2) 的证明可得.

(3)　只需在定理 1.3 的证明中的(1.45) 式改为

$$\bigcup_{\sigma\in C_n} S_{\sigma 1}\circ\cdots\circ S_{\sigma n}(B_\sigma)=\bigcup_{\sigma\in C_n} S_{\sigma_0}\circ\cdots\circ S_{\sigma_{n-1}}(B_\sigma)=\widetilde{\Psi}^{(n)}_{\omega^*}(B_\sigma,\sigma\in C_n), \tag{1.45'}$$

则在(1.45)′ 中令 $n\to\infty$ 取极限再利用定理 1.2 仍可得

$$K(\omega^*)=\lim_{n\to\infty}\widetilde{\Psi}^{(n)}_{\omega^*}(B_\sigma,\sigma\in C_n).$$

(4)　由(2) 直接证得(4).

以后简记 $\widetilde{\Psi}^{(1)}_{\omega^*}$ 为 $\widetilde{\Psi}_{\omega^*}$.

§2　随机集与分布的自相似性

设(E,d)、$\mathrm{Con}(E)$、$s\mathrm{Con}(E)$ 如第 1 节的定义，N 仍为一固定的正整数，μ 是 $\mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N)$ 上的概率测度. $\mathrm{Con}(E)$ 如 §1 赋以拓扑.

仍如 §1 中所约定的，$C_0=\{\varnothing\}$，$C_q=\{0,1,\cdots,N-1\}^q$，$(q\geqslant 1)$，$D=\bigcup_{q=0}^{\infty}C_q$，$C=\{0,1,\cdots,N-1\}^{\mathbb{N}_0}$. 在$C\cup D$中，亦如 §1 中一样定义"截尾"$(\sigma|n)$"衔置"$(*)$及"领先"$(\prec)$等运算.

$(\mathscr{K}(E),\eta)$ 的定义如 §1. 仍取定概率$(\Omega,\mathscr{F},\nu)$ 如下：

$\Omega=(\mathrm{Con}(E)^N)^D$,

$\mathscr{F}=(\mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N))^D$,

$\nu=\mu^D$,

Ω 中的元素 $\omega=(\omega_\sigma,\sigma\in D)$,

$\omega_\varnothing=(S_0,\cdots,S_{N-1})\in\mathrm{Con}(E)^N$,

$\omega_\sigma=(S_{\sigma*0},\cdots,S_{\sigma*(N-1)})\in\mathrm{Con}(E)^N$, $(\sigma\in D)$.

$\Omega^*=\{\omega\in\Omega:\omega=(\omega_\sigma,\sigma\in D),\omega_\sigma\equiv\omega_\varnothing\}$ 是Ω的"对角线"子集，

Ω_1 如命题 1.2 所定义.

仿 Ω、Ω^*、Ω_0，可定义

$$\Omega(s)=(s\mathrm{Con}(E)^N)^D,$$

$$\Omega^*(s)=\{\omega\in\Omega(s):\omega=(\omega_\sigma,\sigma\in D),\omega_\sigma\equiv\omega_\varnothing=(S_0,\cdots,S_{N-1})\in s\mathrm{Con}(E)^N\},$$

$$\Omega_0(s)=\{\omega\in\Omega(s):\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{Lip}(S_{\sigma|n})=0,\forall\ \sigma\in C\}.$$

$K(\omega)$ 如定理 1.2 中所定义.

定义 2.1　给定任意 $\widetilde{K}\in\mathscr{K}(E)$，定义映射 $\psi:\Omega\to\mathscr{K}(E)$ 如下：

$$\psi(\omega)=\begin{cases}K(\omega)=\bigcap_{q=0}^{\infty}\bigcup_{\sigma\in C_{q+1}}\overline{S_{\sigma|1}\circ\cdots\circ S_{\sigma|(q+1)}(E)}, & \omega\in\Omega_0\\ \widetilde{K}, & \omega\overline{\in}\Omega_0.\end{cases}$$

定理 2.1　ψ 是 Borel 可测的. 即是 ψ 是概率空间 $((\mathrm{Con}(E)^N)^D,(\mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N)^D,\mu^D)$ 上取值于 $\mathscr{K}(E)$ 的随机集(其中 μ 是 $\mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N)$ 上的任一概率测度)，从而 $K(\omega)$ 是概率空间 $(\Omega_0,\mathscr{B}(\Omega_0),\mu^D)$ 上取值于 $\mathscr{K}(E)$ 的随机集.

为证定理 2.1，我们需要下述

引理 2.1　令 ξ_1、ξ_2、ξ_3 为如下所定义的三个映射：

$\xi_1:\mathrm{Con}(E)^m\to\mathrm{Con}(E),\xi_1(S_0,\cdots,S_{m-1})=S_0\circ S_1\circ\cdots\circ S_{m-1},$
$(S_i\in\mathrm{Con}(E))$；

$\xi_2:\mathrm{Con}(E)\times\mathscr{K}(E)\to\mathscr{K}(E),$
$\xi_2(S,B)=S(B);(S\in\mathrm{Con}(E),B\in\mathscr{K}(E))$；

$\xi_3:\mathscr{K}(E)\times\mathscr{K}(E)\to\mathscr{K}(E),$
$\xi_3(B_1,B_2)=B_1\cup B_2,(B_1,B_2\in\mathscr{K}(E)).$

则 ξ_i 皆为连续映射.$(i=1,2,3)$.

证明请参见[77] 引理 3.4 至引理 3.6.

现在我们利用引理 2.1 来证明定理 2.1. 事实上，由定理 1.2 得知：$\forall\ \omega\in\Omega_0,K(\omega)\in\mathscr{K}(E)$，所以 ψ 是由 Ω 至 $\mathscr{K}(E)$ 的映射.

$\forall\ q\in\mathbb{N}$，$\{K_\sigma,\sigma\in D\}\subset\mathscr{K}(E)$，作映射 ξ 如下：

$$\xi:\Omega \to \mathscr{K}(E),\xi(\omega) = \bigcup_{\sigma\in C_{q+1}} S_{\sigma 1}\circ\cdots\circ S_{\sigma(q+1)}(K_\sigma),$$

由于C_{q+1}是有限集，综合引理2.1中ξ_1、ξ_2、ξ_3的连续性和投射算子的连续性可知ξ是连续映射. 由定理1.2，

$$\psi(\omega) = \lim_{q\to\infty}\bigcup_{\sigma\in C_{q+1}} S_{\sigma|1}\circ\cdots\circ S_{\sigma,(q+1)}(K_\sigma),\omega\in\Omega_0,$$

这说明ψ在Ω_0上是Borel可测映射序列的逐点收敛极限，而Ω_0又是Borel可测集，ψ在$\Omega-\Omega_0$上又取固定点$\widetilde{K}\in\mathscr{K}(E)$，总之，$\psi$是Borel可测的. 定理2.1得证.

下设$\mathscr{P}(\mathscr{K}(E))$是$\mathscr{B}(\mathscr{K}(E))$上全体概率测度.

定义 2.2 对$\mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N)$上任一概率测度$\mu$，定义$T_\mu$: $\mathscr{P}(\mathscr{K}(E))\to\mathscr{P}(\mathscr{K}(E))$如下：

$$\begin{aligned}&T_\mu(Q)(B) = \mu\times Q^N(\{(S_0,\cdots,S_{N-1};K_0,\cdots,K_{N-1})\\&\in \mathrm{Con}(E)^N\times\mathscr{K}(E)^N:\bigcup_{q=0}^{N-1}S_q(K_q)\in B\}),\qquad(2.1)\\&(\forall\, Q\in\mathscr{P}(\mathscr{K}(E)),B\in\mathscr{B}(\mathscr{K}(E))).\end{aligned}$$

显然，$\forall\, P\in\mathscr{P}(\mathscr{K}(E))$，$P$是$\mu$-统计自相似的充要条件是：$P$是$T_\mu$的不动点，即$T_\mu(P)=P$.

定理2.2 设μ是$\mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N)$上的任一概率测度，令$P_\mu = \mu^D\circ\psi^{-1}$是$\psi$的$\mu^D$分布，($\psi$之定义如前，)则$P_\mu$是$\mathscr{P}(\mathscr{K}(E))$中的唯一的$\mu$-统计自相似的概率测度. 此外，对每一个$Q\in\mathscr{P}(\mathscr{K}(E))$，总有$T_\mu^{(n)}(Q)\xrightarrow{w}P_\mu$(当$n\to\infty$)，(其中$T_\mu^{(n)}$表$T_\mu$的$n$重复合映射，$\nu_n\xrightarrow{w}\nu$表$\{\nu_n\}$弱收敛于$\nu$).

为了证明此定理，分化为四步.

一、引进三个Borel可测映射

$\varphi:\mathrm{Con}(E)^N\times\Omega^N\to\Omega$,

$$\varphi((S_0,\cdots,S_{N-1};\omega^{(0)},\cdots,\omega^{(N-1)})) = \omega = (\omega_\sigma,\sigma\in D),$$

其中$\omega_{n*\sigma} = \omega_\sigma^{(n)},\sigma\in D,n\in\{0,1,\cdots,N-1\}$,

$\omega_\varnothing = (S_0,\cdots,S_{N-1}),\omega^{(n)} = (\omega_\sigma^{(n)},\sigma\in D)$;

$\tilde{\varphi}:\mathrm{Con}(E)^N\times\mathscr{K}(E)^N\to\mathscr{K}(E)$,

$$\tilde{\varphi}((S_0,\cdots,S_{N-1};K_0,\cdots,K_{N-1}))=\bigcup_{i=0}^{N-1}S_i(K_i);$$

$$\tilde{\psi}:\mathrm{Con}(E)^N\times\Omega^N\to\mathrm{Con}(E)^N\times\mathscr{K}(E)^N,$$

$$\tilde{\psi}((S_0,\cdots,S_{N-1};\omega^{(0)},\cdots,\omega^{(N-1)}))$$
$$=(S_0,\cdots,S_{N-1};\psi(\omega^{(0)}),\cdots,\psi(\omega^{(N-1)})).$$

φ 显然是Borel可测的，$\tilde{\varphi}$ 的Borel可测性由引理2.1立即可得，$\tilde{\psi}$ 的 Borel 可测性由 ψ 的 Borel 可测性可得.

二、证明 4 个论断

(1) $(\mu\times(\mu^D)^N)\circ\varphi^{-1}=\mu^D$;

(2) $(\mu\times(\mu^D)^N)\circ\tilde{\psi}^{-1}=\mu\times P_\mu^N$;

(3) $\tilde{\varphi}\circ\tilde{\psi}=\psi\circ\varphi$;

(4) $T_\mu(P_\mu)=(\mu\times P_\mu^N)\circ\tilde{\varphi}^{-1}$.

首先证明(1). 为此，只需证明对 $\mathscr{F}=\mathscr{B}(\Omega)$ 中形如下状的"柱集"Γ：

$$\Gamma=(\mathop{\times}_{\sigma\in D_{q+1}}A_\sigma)\times(\mathop{\times}_{\tau\in D-D_{q+1}}B_\tau),$$

$$D_q=\bigcup_{i=0}^{q}C_i,A_\sigma\in\mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N),B_\tau\equiv\mathrm{Con}(E)^N,$$

总有 $(\mu\times(\mu^D)^N)(\varphi^{-1}(\Gamma))=\mu^D(\Gamma)$.

事实上，若令

$$\Gamma^{(n)}=(\mathop{\times}_{\sigma\in D_q}A_{n*\sigma})\times(\mathop{\times}_{\tau\in D-D_q}B_{n*\tau}),$$

则

$$\varphi^{-1}(\Gamma)=\{(S_0,\cdots,S_{N-1};\omega^{(0)},\cdots,\omega^{(N-1)})$$
$$\in\mathrm{Con}(E)^N\times\Omega^N:\omega_\varnothing=(S_0,\cdots,S_{N-1})\in\mathrm{Con}(E)^N,$$
$$\omega_{n*\tau}=\omega_\tau^{(n)}\in A_{n*\tau},(\forall\ n\in\{0,1,\cdots,N-1\},\tau\in D_q),$$
$$\omega_{n*\tau}=\omega_\tau^{(n)}\in B_{n*\tau},(\forall\ n\in\{0,1,\cdots,N-1\},\tau\in D-D_q)\}$$
$$=\mathrm{Con}(E)^N\times(\mathop{\times}_{n=0}^{N-1}\Gamma^{(n)}),$$

所以，用 Fubini 定理可证：

$$(\mu\times(\mu^D)^N)(\varphi^{-1}(\Gamma))$$

$$= (\mu \times (\mu^D)^N)(\mathrm{Con}(E)^N \times (\mathop{\times}_{n=0}^{N-1} \Gamma^{(n)}))$$

$$= (\mu^D)^N (\mathop{\times}_{n=0}^{N-1} \Gamma^{(n)})$$

$$= \prod_{n=0}^{N-1} \mu^D(\Gamma^{(n)})$$

$$= \prod_{n=0}^{N-1} \mu^{D_q}(\mathop{\times}_{\tau \in D_q} A_{n*\tau})$$

$$= (\mu^{D_q})^N (\mathop{\times}_{n=0}^{N-1} \mathop{\times}_{\tau \in D_q} A_{n*\tau})$$

$$= \mu^{D_{q+1}}(\mathop{\times}_{\sigma \in D_{q+1}} A_\sigma) = \mu^D(\Gamma).$$

(1) 证毕.

再证(2). 仿(1), $\forall\ \Gamma = A \times \mathop{\times}_{n=0}^{N-1} B_n, A \in \mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N), B_n \in \mathscr{B}(\mathscr{K}(E))$, 则

$$\tilde{\psi}^{-1}(\Gamma) = A \times \mathop{\times}_{n=0}^{N-1} \psi^{-1}(B_n).$$

若注意 $\mu^D \psi^{-1} = P_\mu$, 则由上式可知:

$$(\mu \times (\mu^D)^N)(\tilde{\psi}^{-1}(\Gamma))$$

$$= \mu(A) \cdot \prod_{n=0}^{N-1} \mu^D(\psi^{-1}(B_n))$$

$$= \mu(A) \cdot \prod_{n=0}^{N-1} P_\mu(B_n) = (\mu \times P_\mu^N)(\Gamma).$$

(2) 得证.

(3) 可由 φ、ψ、$\tilde{\varphi}$、$\tilde{\psi}$ 的定义直接验证.

(4) 可由 T_μ、$\tilde{\varphi}$ 的定义立得. 事实上, 对任何 $Q \in \mathscr{P}(\mathscr{K}(E))$ 总有 $T_\mu(Q) = (\mu \times Q^N) \circ \tilde{\varphi}^{-1}$, 当然对特殊的 P_μ, (4) 更成立.

三、证明 $T_\mu(P_\mu) = P_\mu$

事实上, 若注意 $P_\mu = \mu^D \circ \psi^{-1}$ 再利用第二步的 4 个论断易证:

$$T_\mu(P_\mu) \overset{(4)}{=} (\mu \times P_\mu^N) \circ \tilde{\varphi}^{-1}$$

$$\overset{(2)}{=}(\mu\times(\mu^D)^N)\circ\tilde{\psi}^{-1}\circ\tilde{\varphi}^{-1}$$
$$=(\mu\times(\mu^D)^N)\circ(\tilde{\varphi}\circ\tilde{\psi})^{-1}$$
$$\overset{(3)}{=}(\mu\times(\mu^D)^N)\circ(\psi\circ\varphi)^{-1}$$
$$=(\mu\times(\mu^D)^N)\circ\varphi^{-1}\circ\psi^{-1}$$
$$\overset{(1)}{=}\mu^D\circ\psi^{-1}=P_\mu.$$

四、证明：$\forall\ Q\in\mathscr{S}(\mathscr{K}(E))$，有 $T_\mu^{(n)}(Q)\xrightarrow{w}P_\mu$. 为此，只需证明对任意开集 $G\subset\mathscr{K}(E)$ 及闭集 $A\subset\mathscr{K}(E)$，有

$$\liminf_{n\to\infty}(T_\mu^{(n)}(Q)(G))\geqslant P_\mu(G);\tag{2.2}$$

$$\limsup_{n\to\infty}(T_\mu^{(n)}(Q)(A))\leqslant P_\mu(A).\tag{2.3}$$

事实上，若记 $\mu_\sigma\equiv\mu$，($\forall\ \sigma\in D$)，则由符号 μ^D 之定义有 $\mu^D=\underset{\sigma\in D}{\times}\mu_\sigma=\mu\times\underset{\sigma\in\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n}{\times}\mu_\sigma$. 由 T_μ 的定义（见(2.1)式）及 Fubini 定理得：

$$T_\mu(Q)(A)=(\mu\times Q^N)(\{(S_0,\cdots,S_{N-1};K_0,\cdots,K_{N-1})\in\mathrm{Con}(E)^N\times\mathscr{K}(E)^N:\bigcup_{\sigma\in C_1}S_\sigma(K_\sigma)\in A\})$$
$$=\mu^D\times Q^D(\{(\omega,\{K_\sigma,\sigma\in D\})\in\Omega\times\mathscr{K}(E)^D:\bigcup_{\sigma\in C_1}S_{\sigma|1}(K_\sigma)\in A\}).$$

对 n 作归纳法可证：

$$T_\mu^{(n)}(Q)(A)=\mu^D\times Q^D(\{(\omega,\{K_\sigma,\sigma\in D\})\in\Omega\times\mathscr{K}(E)^D:\bigcup_{\sigma\in C_n}S_{\sigma|1}\circ\cdots\circ S_{\sigma|n}(K_\sigma)\in A\}).\tag{2.4}$$

因此，

$$\limsup_{n\to\infty}T_\mu^{(n)}(Q)(A)=$$
$$=\inf_{m\geqslant1}\sup_{n\geqslant m}\mu^D\times Q^D(\{(\omega,\{K_\sigma,\sigma\in D\})\in\Omega\times\mathscr{K}(E)^D:\bigcup_{\sigma\in C_n}S_{\sigma|1}\circ\cdots\circ S_{\sigma|n}(K_\sigma)\in A\})$$
$$\leqslant\mu^D\times Q^D(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n\geqslant m}\{(\omega,\{K_\sigma,\sigma\in D\})\in\Omega\times\mathscr{K}(E)^D:\bigcup_{\sigma\in C_n}S_{\sigma|1}\circ\cdots\circ S_{\sigma|n}(K_\sigma)\in A\})$$

$$= \mu^D \times Q^D(\bigcap_m \bigcup_{1 \le n \le m} \{(\omega, \{K_\sigma, \sigma \in D\}) \in \Omega_0 \times \mathscr{K}(E)^D:$$

$$\bigcup_{\sigma \in C_n} S_{\sigma 1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|n}(K_\sigma) \in A\})$$

$$\leqslant \mu^D \times Q^D(\{(\omega, \{K_\sigma, \sigma \in D\}) \in \Omega_0 \times \mathscr{K}(E)^D:$$

$$\lim_{n \to \infty} \bigcup_{\sigma \in C_n} S_{\sigma 1} \circ \cdots \circ S_{\sigma n}(K_\sigma) \in A\}). \tag{2.5}$$

由定理 1.2 及 ψ 的定义立得:

(2.5) 式右方

$$= \mu^D \times Q^D(\{(\omega, \{K_\sigma, \sigma \in D\}) \in \Omega_0 \times \mathscr{K}(E)^D: \psi(\omega) \in A\})$$

$$= \mu^D(\psi^{-1}(A)) = P_\mu(A). \tag{2.6}$$

由(2.5)、(2.6) 即得(2.3). 而(2.2) 的证明仿(2.3) 可得. 总之我们证明了:

$$T_\mu^{(n)}(Q) \xrightarrow{w} P_\mu \quad (\forall\, Q \in \mathscr{P}(\mathscr{K}(E))).$$

由上式直接知道 P_μ 是 T_μ 的唯一不动点,亦即 P_μ 是唯一的 μ-统计自相似概率测度,从而定理 2.2 证毕.

推论 2.1 ψ 是统计自相似随机集.

定理 2.3 概率测度 $P_\mu = \mu^D \circ \psi^{-1}$ 的支撑为 $\mathrm{supp}(P_\mu)$ 等于

$$\bigcap \left\{ \begin{array}{l} A: A \in \mathscr{B}(\mathscr{K}(E)), A \text{ 是非空闭集, 且对 } \mu\text{-a.s. 的} \\ (S_0, \cdots, S_{N-1}) \in \mathrm{Con}(E)^N \text{ 和一切} (K_0, \cdots, K_{N-1}) \in A^N, \text{有} \\ \bigcup_{q=0}^{N-1} S_q(A_q) \in A \end{array} \right\}. \tag{2.7}$$

证 参见[77] 推论 5.2.

例 2.1 取 $E = [0,1]^2$, d 是 E 中的欧氏距离. 令

$H = \{\mathrm{Gr}(h): h$ 是由$[0,1]$到$[0,1]$上的严格升的同胚映射$\}$,

$\mathrm{Gr}(h) = \{(x, h(x)): x \in [0,1]\}$ 是 h 的图. 显然 $H \subset \mathscr{K}(E)$.

定义 $\xi: (0,1) \times (0,1) \to \mathrm{Con}(E)^2$ 如下:

$\xi(x,y) = (S_{x,y}, T_{x,y})$, 其中

$S_{x,y}(u,v) = (xu, yv)$,

$$T_{x,y}(u,v) = (x,y) + ((1-x)u,(1-y)v),$$

则 ξ 连续. 再任取 $(0,1)\times(0,1)$ 上的概率测度 υ, 定义 $\mu = \upsilon\circ\xi^{-1}$, 则用定理 2.3 可证:

$$\mathrm{supp}(P_\mu) = H.$$

(证明可参见[77]例 5.c.)

定理 2.4　任取 $\omega_\varnothing = (S_0,\cdots,S_{N-1}) \in \mathrm{Con}(E)^N, \omega^* = (\omega_\sigma,\sigma\in D)$, $\mu_{\omega_\varnothing}$ 表测度集中在单点集 $\{\omega_\varnothing\}$ 的概率测度, $\widetilde{\Psi}_{\omega^*}$ 的定义如定理 1.4, 则

$$P_{\mu_{\omega_\varnothing}} = P^N_{\mu_{\omega_\varnothing}} \circ \widetilde{\Psi}^{-1}_{\omega^*}. \tag{2.8}$$

证　由 μ- 统计自相似概率测度的定义及定理 2.2 有

$$\begin{aligned}P_{\mu_{\omega_\varnothing}}(B) &= \mu_{\omega_\varnothing} \times P^N_{\mu_{\omega_\varnothing}}(\{(\widetilde{S}_0,\cdots,\widetilde{S}_{N-1};K_0,\cdots,K_{N-1})\\ &\qquad \in \mathrm{Con}(E)^N \times \mathscr{K}(E)^N: \bigcup_{q=0}^{N-1}\widetilde{S}_q(K_q) \in B\})\\ &= P^N_{\mu_{\omega_\varnothing}}(\{(K_0,\cdots,K_{N-1}) \in \mathscr{K}(E)^N: \bigcup_{q=0}^{N-1} S_q(K_q) \in B\})\\ &= P^N_{\mu_{\omega_\varnothing}} \circ \widetilde{\Psi}^{-1}_{\omega^*}(B), (\forall B \in \mathscr{B}(\mathscr{K}(E))).\end{aligned}$$

定理得证.

由本定理, 我们对统计自相似的概率测度及统计自相似的随机集, 有了更具体的背景. 当我们把 Ω 局限到 Ω^*, μ 取为特殊的概率测度 $\mu_{\omega_\varnothing}$ 时, $K^* = K(\omega^*)$ 是概率空间 $(\Omega^*,\mathscr{B}(\Omega^*),\mu^D_{\omega_\varnothing})$ 上的统计自相似集, 其分布 $P_{\mu_{\omega_\varnothing}}$ 是 $\mu_{\omega_\varnothing}$- 统计自相似概率测度, 它的直观概率背景就是(2.8).

作为本节的结尾, 我们研究随机集 $K^* = K(\omega^*)$ 的一些性质, $(\omega^* = (\omega_\sigma \equiv \omega_\varnothing, \sigma\in D) \in \Omega^*)$.

任取 $\omega_\varnothing = (S_0,\cdots,S_{N-1}) \in \mathrm{Con}(E)^N, \omega_\sigma \equiv \omega_\varnothing, (\sigma \in D)$, 再取概率分布列 $\rho = (\rho_0,\rho_1,\cdots,\rho_{N-1}), \rho_i \in (0,1), \sum_{i=0}^{N-1}\rho_i = 1$, 令 $\mathscr{M}^1$ 为 $\mathscr{B}(E)$ 上的全体概率测度(且其支撑有界).

$\forall\, \nu、\nu_1、\nu_2 \in \mathscr{M}^1$, 定义

$$\omega_{\mathscr{S}}^{\rho}(\nu)=\sum_{i=0}^{N-1}\rho_i\cdot\nu\circ S_i^{-1},\tag{2.9}$$

$$l(\nu_1,\nu_2)=\sup\{\int fd\nu_1-\int fd\nu_2:$$

$$f:E\to\mathbb{R}^1,\mathrm{Lip}(f)\leqslant 1\}.\tag{2.10}$$

显然,$\omega_{\mathscr{S}}^{\rho}:\mathscr{M}^1\to\mathscr{M}^1$,($\because\sum_i\rho_i=1$).

再在$C=C(N)=\{0,1,\cdots,N-1\}^{\mathbb{N}_0}$上定义一个乘积测度$\tau$如下:

$$\tau=\mathop{\times}_{n\in\mathbb{N}_0}\tau_n,\tau_n(\{i\})=\rho_i,(i\in\{0,1,\cdots,N-1\},n\in\mathbb{N}_0),\tag{2.11}$$

而令$\pi:C\to K(\omega^*)$是下列坐标映射:

$$\pi(\sigma)=k_{\sigma_0,\sigma_1,\cdots},(\forall\ \sigma=(\sigma_0,\sigma_1,\cdots)\in C),\tag{2.12}$$

其中$k_{\sigma_0,\sigma_1,\cdots}$如定理1.3(5)中所定义:

$$K(\omega^*)=\bigcup_{\substack{0\leqslant\sigma_p\leqslant N-1\\ p\geqslant 0}}\{k_{\sigma_0,\sigma_1,\cdots}\}.$$

在上述约定下,我们有

定理 2.5 (1) $(\mathscr{M}^1,l)$是距离空间;

(2) $\omega_{\mathscr{S}}^{\rho}$是$(\mathscr{M}^1,l)$到$(\mathscr{M}^1,l)$的压缩映射而且存在唯一一个不动点$\upsilon_0\in\mathscr{M}^1$,使

$$\omega_{\mathscr{S}}^{\rho}(\upsilon_0)=\upsilon_0;$$

(3) $\forall\ \upsilon\in\mathscr{M}^1$,总有$(\omega_{\mathscr{S}}^{\rho})^{(n)}(\upsilon)\xrightarrow{l}\upsilon_0$,(当$n\to\infty$时),其中$(\omega_{\mathscr{S}}^{\rho})^{(n)}$是$\omega_{\mathscr{S}}^{\rho}$的$n$重复合映射;

(4) $\upsilon_0=\tau\circ\pi^{-1}$;

(5) $\mathrm{supp}(\upsilon_0)=K(\omega^*)$,其中$K(\omega^*)$如定理1.3所定义.

证 (1) 为证$l(\cdot,\cdot)$是$\mathscr{M}^1$上一个距离,只证:

$$l(\mu,\upsilon)<\infty,(\forall\ \mu,\upsilon\in\mathscr{M}^1),\tag{2.13}$$

(因为作为距离的其它要求,l显然具备).

事实上,由μ,υ的支撑有界,故可令

$$\mathrm{supp}(\mu)\bigcup\mathrm{supp}(\upsilon)\subset B(a,r),$$

其中$B(a,r)$是以a为心以r为半径之开球. 任取f满足$\mathrm{Lip}(f)\leqslant 1$. 由于$\mu(E)=\upsilon(E)=1$, 故

$$\int f(x)\mu(dx)-\int f(x)\upsilon(dx)=\int(f(x)-f(a))\mu(dx)$$

$$-\int(f(x)-f(a))\upsilon(dx).$$

注意$\mathrm{supp}(\mu)\cup\mathrm{supp}(\nu)\subset B(a,r)$, $\mathrm{Lip}(f)\leqslant 1$, 有

$$\left|\int(f(x)-f(a))\mu(dx)\right|\leqslant\int_{B(a,r)}|f(x)-f(a)|\mu(dx)$$

$$\leqslant\int_{B(a,r)}|x-a|\mu(dx)\leqslant r,$$

仿之

$$\left|\int(f(x)-f(a))\upsilon(dx)\right|\leqslant r,$$

总之

$$l(\mu,\upsilon)\leqslant 2r<\infty.$$

(2) 往证$\omega_{\varnothing}^{\rho}$是由$(\mathscr{M}^1,l)$到$(\mathscr{M}^1,l)$的压缩映射. 事实上, 若令$r_i=\mathrm{Lip}(S_i)$, $\bar{r}=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant N-1}r_i$, 再任取$f$满足$\mathrm{Lip}(f)\leqslant 1$, $\mu,\upsilon\in\mathscr{M}^1$, 必有

$$\int fd(\omega_{\varnothing}^{\rho}(\mu))-\int fd(\omega_{\varnothing}^{\rho}(\upsilon))$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1}\rho_i\left(\int f(x)(\mu\circ S_i^{-1})(dx)-\int f(x)(\upsilon\circ S_i^{-1})(dx)\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1}\rho_i\left(\int f(S_i(x))\mu(dx)-\int f(S_i(x))\upsilon(dx)\right)$$

$$=\bar{r}\sum_{i=0}^{N-1}\rho_i\left(\int\frac{f(S_i(x))}{\bar{r}}\mu(dx)-\int\frac{f(S_i(x))}{\bar{r}}\upsilon(dx)\right).\tag{2.14}$$

但是

$$\mathrm{Lip}\left(\frac{f(S_i(x))}{\bar{r}}\right)\leqslant\bar{r}^{-1}\cdot 1\cdot r_i\leqslant 1,\tag{2.15}$$

所以由(2.14)、(2.15)及$L(\mu,\upsilon)$的定义有

$$\int f d(\omega_{\varnothing}^{\rho}(\mu)) - \int f d(\omega_{\varnothing}^{\rho}(\upsilon)) \leqslant \bar{r} L(\mu,\upsilon), \tag{2.16}$$

而(2.16) 对任何满足 $\mathrm{Lip}(f) \leqslant 1$ 的 f 皆成立,所以

$$l(\omega_{\varnothing}^{\rho}(\mu),\omega_{\varnothing}^{\rho}(\upsilon)) \leqslant \bar{r} l(\mu,\upsilon), \bar{r} < 1,$$

$(\forall\ \mu,\upsilon \in \mathscr{M}^1)$,此即 $\omega_{\varnothing}^{\rho}$ 是$(\mathscr{M}^1,l)$ 上的压缩映射. (2) 中剩下的论断待(4) 证明以后再证.

(3) 若(2) 成立,则在 $\mathscr{M}^1$ 中存在关于 $\omega_{\varnothing}^{\rho}$ 的唯一一个不动点 $\upsilon_0 \in \mathscr{M}^1$,所以,$\forall\ \upsilon \in \mathscr{M}^1$,有

$$\begin{aligned} l((\omega_{\varnothing}^{\rho})^{(n)}(\upsilon),\upsilon_0) &= l((\omega_{\varnothing}^{\rho})^{(n)}(\upsilon),(\omega_{\varnothing}^{\rho})^{(n)}(\upsilon_0)) \\ &\leqslant \mathrm{Lip}((\omega_{\varnothing}^{\rho})^{(n)}) l(\upsilon,\upsilon_0) \to 0, (n \to \infty), \end{aligned}$$

此即(3) 成立.

(4) 令 $\gamma_i: C \to C$,定义如下:

$$\gamma_i(\sigma) = (i,\sigma_0,\sigma_1,\cdots), (\forall\ \sigma = (\sigma_0,\sigma_1,\cdots) \in C).$$

则 $\forall\ A_j = (\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_j) \times \underset{p>j}{\times} M_j, M_j = \{0,1,\cdots,N-1\}$,有

$$\gamma_i^{-1}(A_j) = \begin{cases} \varnothing, & \text{当 } i \neq \alpha_0 \\ (\alpha_1,\cdots,\alpha_j) \times \underset{p>j}{\times} M_j, & \text{当 } i = \alpha_0. \end{cases} \tag{2.17}$$

所以由(2.17) 及 τ 的定义有

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i (\tau \circ \gamma_i^{-1})(A_j) &= \rho_{\alpha_0} \cdot \tau((\alpha_1,\cdots,\alpha_j) \times \underset{p>j}{\times} M_p) \\ &= \rho_{\alpha_0} \cdot \rho_{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot \rho_{\alpha_j} = \tau(A_j), \end{aligned} \tag{2.18}$$

因此,

$$\sum_{i=0}^{N-1} \rho_i \tau \circ \gamma_i^{-1} \equiv \tau. \tag{2.19}$$

又因为,$\forall\ \sigma = (\sigma_0,\sigma_1,\cdots) \in C$,有

$$\begin{aligned} S_i(\pi(\sigma)) &= S_i(k_{\sigma_0,\sigma_1,\cdots}) = k_{i,\sigma_0,\sigma_1,\cdots} \\ &= \pi((i,\sigma_0,\sigma_1,\cdots)) = \pi(\gamma_i(\sigma)), \end{aligned} \tag{2.20}$$

所以,由 $\omega_{\varnothing}^{\rho}$ 的定义及(2.20). (2.19) 得:

$$\omega_{\varnothing}^{\rho}(\tau \circ \pi^{-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i (\tau \circ \pi^{-1}) \circ S_i^{-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i (\tau \circ (S_i \circ \pi)^{-1})$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i (\tau \circ (\pi \circ \gamma_i)^{-1})$$

$$= \Big(\sum_{i=0}^{N-1} \rho_i \tau \circ \gamma_i^{-1} \Big) \circ \pi^{-1} = \tau \circ \pi^{-1} \in \mu^1.$$

这就证明了 $\tau \circ \pi^{-1}$ 是 $\omega_\varnothing^\rho$ 在 μ^1 中的一个不动点.

由 $\omega_\varnothing^\rho$ 是由 μ^1 到 μ^1 的压缩映射,若还有 $\upsilon_1 \in \mu^1$,使 $\omega_\varnothing^\rho(\upsilon_1) = \upsilon_1$,则

$$l(\upsilon_0, \upsilon_1) = l(\omega_\varnothing^\rho(\upsilon_0), \omega_\varnothing^\rho(\upsilon_1)) \leqslant \bar{r} l(\upsilon_0, \upsilon_1), \bar{r} < 1,$$

从而 $l(\upsilon_0, \upsilon_1) = 0$,故 $\upsilon_0 = \upsilon_1$. 因此 $\omega_\varnothing^\rho$ 的不动点是唯一的,它就是 $\upsilon_0 = \tau \circ \pi^{-1}$. (4) 及(2) 的剩余部分证毕.

(5) 由(4) 立即可得(5). 定理 2.5 证毕.

§3 随机集的 Hausdorff 测度

沿用 §1、§2 的符号及定义.

定义 3.1 称 D 中的子集 Γ 是 C 的一个"领先覆盖",如果 $\forall \tau \in C, \exists \sigma \in \Gamma$ 使 $\sigma \prec \tau$. 如果这样的 σ 还是唯一的,则称 Γ 是最小的领先覆盖. 记

$$\mathrm{Min} = \{\Gamma \subset D : \Gamma \text{ 是最小的领先覆盖}\}.$$

对任意 $\Gamma, \Gamma_0 \in \mathrm{Min}$,称 $\Gamma_0 \prec \Gamma$:若 $\forall \tau \in \Gamma$,存在唯一一个 $\sigma \in \Gamma_0$,使 $\sigma \prec \tau$.

易证:$\forall \Gamma \in \mathrm{Min}$,$\Gamma$ 必为有限集. 事实上,若 Γ 是无限集,必有 $\sigma \in \Gamma, \tilde{\sigma} \in \Gamma, \sigma \prec \tilde{\sigma}, |\sigma| < |\tilde{\sigma}|$. 再取 $\tau = \tilde{\sigma} * \sigma' \in C$,则 Γ 中有两个不同的元 σ 与 $\tilde{\sigma}$,使 $\sigma \prec \tau, \tilde{\sigma} \prec \tau$,这与 Γ 的最小性矛盾.

定理 3.1 $\forall \omega = (\omega_\sigma, \sigma \in D) \in \Omega_0, \forall \alpha > 0$,总有

$s^\alpha\text{-}m(K(\omega)) \leqslant$

$$\operatorname{diam}(E)^{\alpha}\sup_{\Gamma_0\in \text{Min}}\inf\{\sum_{\sigma\in\Gamma}\prod_{\rho=1}^{\sigma|}\operatorname{Lip}(S_{\sigma,\rho})^{\alpha}:\Gamma\in\text{Min},\Gamma_0<\Gamma\}.$$
(3.1)

此处 $s^{\alpha}\text{-}m(A)$ 表由测度函数 s^{α} 产生的 A 的Hausdorff测度，$K(\omega)$ 如定理1.2所定义.

证 $\forall\ \omega\in\Omega_0$，由 Ω_0 之定义有：$\forall\ \delta>0$，$\exists\ q_0\in\mathbb{N}$，使

$$\operatorname{diam}(E)\prod_{\rho=1}^{|\sigma|}\operatorname{Lip}(S_{\sigma,\rho})\leqslant\delta,(\forall\ \sigma\in D,|\sigma|\geqslant q_0).\tag{3.2}$$

由diam及Lip的定义和(3.2)有

$$\operatorname{diam}(\overline{S_{\sigma|1}\circ\cdots\circ S_{\sigma||\sigma|}(E)})\leqslant\operatorname{diam}(E)\prod_{\rho=1}^{|\sigma|}\operatorname{Lip}(S_{\sigma|\rho})\leqslant\delta,(\forall\ \sigma\in D,|\sigma|\geqslant q_0).\tag{3.3}$$

而由 $K(\omega)$ 的定义，

$$K(\omega)=\bigcap_{q=1}^{\infty}\bigcup_{\sigma\in C_{q+1}}\overline{S_{\sigma|1}\circ\cdots\circ S_{\sigma|(q+1)}(E)},\tag{3.4}$$

由第一章定理2.2有

$$s^{\alpha}\text{-}m(K(\omega))=\sup_{\delta>0}\inf\{\sum_{q=1}^{\infty}\operatorname{diam}(E_q)^{\alpha}:\bigcup_q E_q\supset K(\omega),\operatorname{diam}(E_q)\leqslant\delta\}.\tag{3.5}$$

但是 $\forall\ \Gamma\in\text{Min},C_{q_0}<\Gamma$，必有

$$\bigcup_{\sigma\in\Gamma}\overline{S_{\sigma|1}\circ\cdots\circ S_{\sigma||\sigma|}(E)}\supset K(\omega),\tag{3.6}$$

由(3.2)及 $C_{q_0}<\Gamma$ 得

$$\operatorname{diam}(\overline{S_{\sigma|1}\circ\cdots\circ S_{\sigma||\sigma|}(E)})\leqslant\operatorname{diam}(E)\prod_{\rho=1}^{|\sigma|}\operatorname{Lip}(S_{\sigma|\rho})\leqslant\delta,$$
$$(\forall\ \sigma\in\Gamma,C_{q_0}<\Gamma).\tag{3.7}$$

由(3.7)、(3.6)得

$$\inf\{\sum_{q=1}^{\infty}\operatorname{diam}(E_q)^{\alpha}:\bigcup_q E_q\supset K(\omega),\operatorname{diam}(E_q)\leqslant\delta\}$$
$$\leqslant\inf\{\operatorname{diam}(E)^{\alpha}\sum_{\sigma\in\Gamma}\prod_{\rho=1}^{|\sigma|}\operatorname{Lip}(S_{\sigma,\rho})^{\alpha}:\Gamma\in\text{Min},C_{q_0}<\Gamma\}$$

$$\leqslant \operatorname{diam}(E)^{\alpha} \sup_{\Gamma_0 \in \mathrm{Min}} \inf\{ \sum_{\sigma \in \Gamma} \prod_{\rho=1}^{|\sigma|} \operatorname{Lip}(S_{\sigma|\rho})^{\alpha} : \Gamma \in \mathrm{Min}, \Gamma_0 < \Gamma \},$$

$$(\forall\ \delta > 0). \tag{3.8}$$

以(3.8)代入(3.5)即得定理3.1.

关于 $s^{\alpha}\text{-}m(K(\omega))$ 的下界估计,需要对(E,d)及 ω 加条件.

定理 3.2([77])　设 E 是$\mathbb{R}^k$ 中具有非空开核 $\mathring{E}$ 的紧子集,d 是 k 维欧氏距离,$\omega = (\omega_\sigma, \sigma \in D) \in \Omega_0(s)$ 满足条件:

$$S_{\sigma*\rho}(\mathring{E}) \cap S_{\sigma*\rho'}(\mathring{E}) = \varnothing, \begin{pmatrix} \forall\ \sigma \in D, \rho' \neq \rho, \\ \rho, \rho' \in \{0,1,\cdots,N-1\} \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

((3.9)称为强开集条件.)则存在常数 $a > 0$(仅依赖 E 及维数 k)使得对任意 $\alpha \geqslant 0$ 有:

$$s^{\alpha}\text{-}m(K(\omega)) \geqslant a\ \operatorname{diam}(E)^{\alpha}$$

$$\sup_{\Gamma_0 \in \mathrm{Min}} \inf\{ \sum_{\sigma \in \Gamma^*} \operatorname{Lip}(S_\sigma)^k \prod_{\rho=1}^{\sigma|} \operatorname{Lip}(S_{\sigma|\rho})^{\alpha} : \Gamma^* \in \mathrm{Min}, \Gamma_0 < \Gamma^* \}. \tag{3.10}$$

证　由于 E 是紧子集,$S_\tau(E)$ 必紧,故

$$K(\omega) = \bigcap_{q \in \mathbb{N}} \bigcup_{\sigma \in C_{q+1}} S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(q+1)}(E).$$

$\forall\ \delta > 0$,由于 $K(\omega)$ 紧,所以必存在 $K(\omega)$ 的有限开覆盖 $\{U_i, 1 \leqslant i \leqslant m\}$ 满足

$$\operatorname{diam}(U_i) \leqslant \delta, \quad U_i \cap K(\omega) \neq \varnothing, (1 \leqslant i \leqslant m). \tag{3.11}$$

再令

$$\Gamma_i = \{\sigma \in D : S_{\sigma 1} \circ \cdots \circ S_{\sigma||\sigma|}(E) \cap K(\omega) \cap U_i \neq \varnothing,$$

$$\operatorname{diam}(E) \prod_{n=1}^{|\sigma_i-1} \operatorname{Lip}(S_{\sigma|n}) \geqslant \operatorname{diam}(U_i),$$

$$\operatorname{diam}(E) \prod_{n=1}^{\sigma|} \operatorname{Lip}(S_{\sigma|n}) < \operatorname{diam}(U_i)\}, \tag{3.12}$$

往证:$\forall\ \sigma, \tau \in \Gamma_i, \sigma \neq \tau$,必有

$$\sigma < \tau \text{ 与 } \tau < \sigma \text{ 无一成立.} \tag{3.13}$$

事实上,若(3.13)中有一个领先关系成立,不妨设 $\sigma < \tau$. 这时有两

种可能：(a) $|\sigma| = |\tau|$，则 $\sigma = \tau$，这与假设矛盾；(b) $|\sigma| < |\tau|$，这时必有 $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_q)$，$\tau = (\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_q, \tau_{q+1}, \cdots, \tau_{q+r})$，由 $\sigma \in \Gamma_i$ 及 Γ_i 中 σ 的最后一个条件有

$$\operatorname{diam}(E) \prod_{n=1}^{q} \operatorname{Lip}(S_{\sigma|n}) < \operatorname{diam}(U_i), \tag{3.14}$$

由 $\tau \in \Gamma_i$ 及 Γ_i 中的 τ 的第二个条件有：

$$\begin{aligned}&\operatorname{diam}(E) \prod_{n=1}^{q} \operatorname{Lip}(S_{\sigma|n}) \\ &\quad = \operatorname{diam}(E) \prod_{n=1}^{q} \operatorname{Lip}(S_{\tau|n}) \geqslant \operatorname{diam}(U_i),\end{aligned} \tag{3.15}$$

由(3.14)、(3.15) 又得一矛盾. 总之(3.13) 成立.

利用强开集条件(3.9) 及(3.13) 可证：

$$\begin{aligned}&S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma||\sigma|}(\mathring{E}) \cap S_{\tau|1} \circ \cdots \circ S_{\tau||\tau|}(\mathring{E}) \\ &\quad = \varnothing, (\sigma, \tau \in \Gamma_i, \sigma \neq \tau).\end{aligned} \tag{3.16}$$

事实上，若令 $r = \max\{p: (\sigma|p) = (\tau|p)\}$，则由(3.13) $\sigma < \tau$ 与 $\tau < \sigma$ 无一成立知：$r - 1 \leqslant \min\{|\tau|, |\sigma|\}$，因此，由 r 的定义及强开集条件(3.9) 有

$$S_{\sigma|(r+1)}(\mathring{E}) \cap S_{\tau|(r+1)}(\mathring{E}) = \varnothing,$$

更有(3.16) 成立.

$\forall\, \omega \in \Omega_0(s)$，$\sigma \in \Gamma_i$，由于 S_σ 是相似映射，及 Γ_i 中的 σ 满足的第三个条件知：

$$\begin{aligned}&\operatorname{diam}(S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma||\sigma|}(E)) \\ &\quad = \operatorname{diam}(E) \prod_{n=1}^{|\sigma|} \operatorname{Lip}(S_{\sigma|n}) < \operatorname{diam}(U_i),\end{aligned} \tag{3.17}$$

若令 $A = S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma||\sigma|}(E)$，$B = K(\omega) \cap U_i$，由 $\sigma \in \Gamma_i$ 知 $A \cap B \neq \varnothing$，所以可取 $y \in A \cap B$，则

$$\text{“}x \in A \Rightarrow d(x, B) \leqslant d(x, y) \leqslant \operatorname{diam}(A) < \operatorname{diam}(U_i)\text{”}, \tag{3.18}$$

由(3.18) 得：

$$S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma||\sigma|}(E) = A$$

$$\subset \{x \in \mathbb{R}^k : d(x, U_i \cap K(\omega)) < \operatorname{diam}(U_i)\}$$
$$\subset B(x_i, 2\operatorname{diam}(U_i)),$$
$$(\forall\ x_i \in U_i \cap K(\omega), \sigma \in \Gamma_i, \omega \in \Omega_0(s)), \tag{3.19}$$

其中 $B(x,r)$ 是以 x 为心以 r 为半径之开球.

令 $\mathscr{L}_k$ 是$\mathbb{R}^k$ 中的 k 维 Lebesgue 测度，则对任何 $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$, $S \in scon(\mathbb{R}^k)$，有$\mathscr{L}_k(S(A)) = \mathscr{L}_k(A)\operatorname{Lip}(S)^k$，而今$\omega \in \Omega_0(s)$，所以

$$\mathscr{L}_k(S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma||\sigma|}(\mathring{E})) = \mathscr{L}_k(\mathring{E}) \prod_{n=1}^{|\sigma|} \operatorname{Lip}(S_{\sigma|n})^k. \tag{3.20}$$

由(3.16)、(3.19)、(3.20) 和 Γ_i 的定义得:

$$(2\operatorname{diam}(U_i))^k \mathscr{L}_k(B(0,1)) = \mathscr{L}_k(B(x_i, 2\operatorname{diam}(U_i)))$$
$$\geqslant \sum_{\sigma\in\Gamma_i} \mathscr{L}_k(S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma||\sigma|}(\mathring{E}))$$
$$= \sum_{\sigma\in\Gamma_i} \mathscr{L}_k(\mathring{E}) \prod_{n=1}^{|\sigma|} \operatorname{Lip}(S_{\sigma|n})^k$$
$$\geqslant \sum_{\sigma\in\Gamma_i} \mathscr{L}_k(\mathring{E}) \operatorname{diam}(U_i)^k \operatorname{Lip}(S_\sigma)^k / \operatorname{diam}(E)^k, \tag{3.21}$$

所以

$$\sum_{\sigma\in\Gamma_i} \operatorname{Lip}(S_\sigma)^k \leqslant \frac{2^k \mathscr{L}_k(B(0,1)) \operatorname{diam}(E)^k}{\mathscr{L}_k(\mathring{E})} \overset{\text{记作}}{=} \frac{1}{a}. \tag{3.22}$$

而由 Γ_i 的定义及(3.22) 有:

$$\sum_{i=1}^m \operatorname{diam}(U_i)^\alpha \geqslant \sum_{i=1}^m \max_{\sigma\in\Gamma_i} \operatorname{diam}(E)^\alpha \prod_{n=1}^{|\sigma|} \operatorname{Lip}(S_{\sigma|n})^\alpha$$
$$\geqslant \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{\sum_{\sigma\in\Gamma_i} \operatorname{Lip}(S_\sigma)^k} \right) \sum_{\sigma\in\Gamma_i} \operatorname{Lip}(S_\sigma)^k \operatorname{diam}(E)^\alpha \prod_{n=1}^{|\sigma|} \operatorname{Lip}(S_{\sigma|n})^\alpha$$
$$\geqslant a\ \operatorname{diam}(E)^\alpha \sum_{\sigma\in\bigcup_{i=1}^m \Gamma_i} \operatorname{Lip}(S_\sigma)^k \prod_{n=1}^{|\sigma|} \operatorname{Lip}(S_{\sigma|n})^\alpha. \tag{3.23}$$

易证：$\bigcup_{i=1}^{m}\Gamma_i$ 是 C 的一个“领先覆盖”. 再令

$$\Gamma=\{\sigma\in\bigcup_{i=1}^{m}\Gamma_i:\forall\ \tau\in\bigcup_{i=1}^{m}\Gamma_i,\text{有“}\tau<\sigma\Rightarrow\tau=\sigma\text{”}\},$$

则 $\Gamma\in\mathrm{Min}$. 事实上，$\forall\ \tilde{\sigma}\in C$，若存在 $\tau_1,\tau_2\in\Gamma$，使 $\tau_1<\tilde{\sigma},\tau_2<\tilde{\sigma}$，往证 $\tau_1=\tau_2$. 不妨令 $|\tau_1|\geqslant|\tau_2|$，则由 $\tau_1<\tilde{\sigma},\tau_2<\tilde{\sigma}$ 知 $\tau_2=\tilde{\sigma}\,|\,|\tau_2|=\tau_1\,|\,|\tau_2|$，此即 $\tau_2<\tau_1$. 故由 $\tau_1,\tau_2\in\bigcup_{i=1}^{m}\Gamma_i$ 及 Γ 之定义得 $\tau_1=\tau_2$.

再令

$$\Gamma(\delta)=\{\sigma\in D:\prod_{n=1}^{|\sigma|-1}\mathrm{Lip}(S_{\sigma|n})\geqslant\delta,\prod_{n=1}^{|\sigma|}\mathrm{Lip}(S_{\sigma|n})<\delta\},$$

则 $\Gamma(\delta)\in\mathrm{Min}$，$(\delta>0)$，且 $\Gamma(\delta)<\Gamma$. 所以由(3.23)得：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{diam}(U_i)^{\alpha}&\geqslant a\ \mathrm{diam}(E)^{\alpha}\sum_{\sigma\in\Gamma}\mathrm{Lip}(S_{\sigma})^{k}\prod_{n=1}^{|\sigma|}\mathrm{Lip}(S_{\sigma|n})^{\alpha}\\&\geqslant a\ \mathrm{diam}(E)^{\alpha}\inf\{\sum_{\sigma\in\Gamma^*}\mathrm{Lip}(S_{\sigma})^{k}\prod_{n=1}^{|\sigma|}\mathrm{Lip}(S_{\sigma|n})^{\alpha}:\\&\qquad\Gamma^*\in\mathrm{Min},\Gamma(\delta)<\Gamma^*\}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

由于 $K(\omega)$ 是紧集，$\{U_i,1\leqslant i\leqslant m\}$ 是 $K(\omega)$ 的任一有限的开覆盖且 $\mathrm{diam}(U_i)\leqslant\delta$. 所以由(3.24)及 $s^{\alpha}\text{-}m(K(\omega))$ 的定义得：$\forall\ \delta>0$ 有：

$$\begin{aligned}s^{\alpha}\text{-}m(K(\omega))&\geqslant a\ \mathrm{diam}(E)^{\alpha}\cdot\\&\inf\{\sum_{\sigma\in\Gamma^*}\mathrm{Lip}(S_{\sigma})^{k}\prod_{n=1}^{|\sigma|}\mathrm{Lip}(S_{\sigma|n})^{\alpha}:\Gamma^*\in\mathrm{Min},\Gamma(\delta)<\Gamma^*\}.\end{aligned}\tag{3.25}$$

但是，任取 $\Gamma_0\in\mathrm{Min}$ (Γ_0 必为有限集)，因为 $\mathrm{Lip}(S_\tau)>0$ $(\forall\ \tau\in D)$，所以由 Γ_0 是有限集得知存在 $\delta_0>0$，使

$$\delta_0<\min\{\prod_{n=1}^{|\sigma|}\mathrm{Lip}(S_{\sigma|n}):\sigma\in\Gamma_0\}.\tag{3.26}$$

所以

$$\Gamma_0<\Gamma(\delta_0).\tag{3.27}$$

由 $\Gamma_0\in\mathrm{Min}$ 可以任意，(3.25)对任意 $\delta>0$ 皆成立，再注意(3.27)

即得(3.10). 定理证毕.

定理3.3([77])　设对μ-$a.s.$的$(S_0,\cdots,S_{N-1})\in \mathrm{Con}(E)^N$及任何$\rho\in\{0,1,\cdots,N-1\}$,均存在常数$a>0$,使$d(S_\rho x,S_\rho y)\geqslant ad(x,y)$,($\forall\ x,y\in E$). 任意给定$\beta>0$,则

(1)$P_\mu(\{B\in\mathscr{K}(E): s^\beta\text{-}m(B)=0\})=0$或1;

(2)$P_\mu(\{B\in\mathscr{K}(E): s^\beta\text{-}m(B)=\infty\})=0$或1.

本定理中的E是任意有界完备可分距离空间,$P_\mu=\mu^D\circ\psi^{-1}$如定理2.2所定义.

为了说明本定理中的两条结论中的相应的集合的Borel可测性,需要下面的

引理3.1　任给$\beta\in[0,\infty)$及$\delta\in(0,\infty)$,则下列映射是由$\mathscr{K}(E)$到$[0,\infty]$的Borel可测映射:

(1)　$K\to\mu_\delta^\beta(K)$

$$\equiv\inf\left\{\sum_{i=1}^\infty \mathrm{diam}(G_i)^\beta:\begin{array}{l}G_i\text{是开集},\\ \bigcup_{i=1}^\infty G_i\supset K,\mathrm{diam}(G_i)\leqslant\delta\end{array}\right\}$$

$$(K\in\mathscr{K}(E));$$

(2)　$K\to s^\beta\text{-}m(K)=\lim_{\delta\downarrow 0}\mu_\delta^\beta(K)=\sup_{\delta>0}\mu_\delta^\beta(K)$,　$(K\in\mathscr{K}(E))$;

(3)　$K\to\dim(K)$,$(K\in\mathscr{K}(E))$.

证　(1)　任给$K_0\in\mathscr{K}(E)$,$\varepsilon>0$. 由$\mu_\delta^\beta(K_0)$的定义及K_0的紧性得知:必存在K_0的有限开覆盖$\{G_n,1\leqslant n\leqslant m\}$使$\mathrm{diam}(G_n)\leqslant\delta$ ($\forall\ 1\leqslant n\leqslant m$)且

$$\sum_{n=1}^m \mathrm{diam}(G_n)^\beta<\mu_\delta^\beta(K_0)+\varepsilon<\infty. \tag{3.28}$$

令$G=\bigcup_{n=1}^m G_n$,$\delta'=d(K_0,E\backslash G)>0$. 则由Hausdorff距离$\eta$的定义得知

$$\text{“}K\in\mathscr{K}(E),\eta(K_0,K)<\delta'\Rightarrow K\subset G\text{”}. \tag{3.29}$$

由(3.29)、(3.28)有

$$\mu_\delta^\beta(K) \leqslant \sum_{n=1}^{m} \operatorname{diam}(G_n)^\beta < \mu_\delta^\beta(K_0) + \varepsilon$$
$$(\forall\ K \in \mathscr{K}(E), \eta(K_0, K) < \delta'). \qquad (3.30)$$

而(3.30)的意思是 μ_δ^β 在 K_0 上半连续，而 $K_0 \in \mathscr{K}(E)$ 可任意，所以 $\mu_\delta^\beta(\cdot)$ 上半连续，更是 Borel 可测的.

(2)　由于 μ_δ^β 对 δ 单调下降，所以

$$s^\beta\text{-}m(K) = \sup_{\delta>0} \mu_\delta^\beta(K) = \sup_{n\geqslant 1} \mu_{\frac{1}{n}}^\beta(K),$$

因此，由(1)得知 $K \to s^\beta\text{-}m(K)$ 是 Borel 可测的.

(3)　任取 $\beta \in [0, \infty)$，由于

$$\{K \in \mathscr{K}(E): \dim(K) > \beta\} =$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{K \in \mathscr{K}(E): s^{\beta+\frac{1}{n}}\text{-}m(K) > 0\},$$

所以由(2)立得(3)中的映射是 Borel 可测的.

现在来证明定理 3.3.

(1) 由定理 2.2 有

$$P_\mu(\{B \in \mathscr{K}(E): s^\beta\text{-}m(B) = 0\})$$
$$= \mu \times P_\mu^N(\{(S_0, \cdots, S_{N-1}; K_0, \cdots, K_{N-1})$$
$$\in \operatorname{Con}(E)^N \times \mathscr{K}(E)^N: s^\beta\text{-}m(\bigcup_{i=0}^{N-1} S_i(K_i)) = 0\})$$
$$= \mu \times P_\mu^N(\{(S_0, \cdots, S_{N-1}; K_0, \cdots, K_{N-1})$$
$$\in \operatorname{Con}(E)^N \times \mathscr{K}(E)^N: s^\beta\text{-}m(S_i(K_i)) = 0,$$
$$i = 0, 1, \cdots, N-1\}). \qquad (3.31)$$

但是由 $S_i \in \operatorname{Con}(E)$，及 $d(S_ix, S_iy) \geqslant a\, d(x, y)$，$(\forall\ x, y \in E)$（对 μ-$a.s.$ 的 $(S_0, \cdots, S_{N-1}) \in \operatorname{Con}(E)^N$）知：对 μ-$a.s.$ 的

$$(S_0, \cdots, S_{N-1}) \in \operatorname{Con}(E)^N$$

及任何 $i \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$，有

$$\text{“}s^\beta\text{-}m(S_i(K_i)) = 0 \Leftrightarrow s^\beta\text{-}m(K_i) = 0\text{”}. \qquad (3.32)$$

以(3.32)代入(3.31)得

$$P_\mu(\{B \in \mathscr{K}(E): s^\beta\text{-}m(B) = 0\})$$
$$= \mu \times P_\mu^N(\{(S_0, \cdots, S_{N-1}) \in \operatorname{Con}(E)^N\} \times \{(K_0, \cdots, K_{N-1})$$

$$\in \mathscr{K}(E)^N : s^{\beta}\text{-}m(K_i) = 0, i = 0,1,\cdots,N-1\})$$

$$= P_{\mu}^N(\{(K_0,\cdots,K_{N-1}) \in \mathscr{K}(E)^N :$$

$$s^{\beta}\text{-}m(K_i) = 0, i = 0,1,\cdots,N-1\})$$

$$= [P_{\mu}(\{B \in \mathscr{K}(E) : s^{\beta}\text{-}m(B) = 0\})]^N, \tag{3.33}$$

由(3.33)立得(1).

(2) 仿(1)可证(2). 定理 3.3 证毕.

推论 3.1 在定理 3.3 的假定下,恒有 $\alpha \geqslant 0$ 使

$$P_{\mu}(\{B \in \mathscr{K}(E) : \dim(B) = \alpha\}) = 1. \tag{3.34}$$

证 令 $\alpha = \inf\{\beta \geqslant 0 : s^{\beta}\text{-}m(B) = 0$ 对 P_{μ}-a.s. 的 $B \in \mathscr{K}(E)$ 成立.$\}$,往证 α 即为所求.

(1) 先证

$$P_{\mu}(\{B \in \mathscr{K}(E) : \dim(B) \leqslant \alpha\}) = 1. \tag{3.35}$$

事实上,若 $\alpha = \infty$,则(3.35)显然成立;若 $\alpha < \infty$,则存在 $\beta_n \downarrow \alpha$ 使

$$P_{\mu}(\{B \in \mathscr{K}(E) : s^{\beta_n}\text{-}m(B) = 0, n = 1,2,\cdots\}) = 1. \tag{3.36}$$

由(3.36)及 $\dim(B)$ 的定义得(3.35)亦成立.

(2) 再证

$$P_{\mu}(\{B \in \mathscr{K}(E) : \dim(B) \geqslant \alpha\}) = 1. \tag{3.37}$$

事实上,若 $\alpha = 0$,则(3.37)显然成立;若 $\alpha > 0$,则可取 $\beta_n \in (0,\alpha)$,使 $\beta_n \uparrow \alpha$. 则由定理 3.3(1)及 α 的定义得知

$$P_{\mu}(\{B \in \mathscr{K}(E) : s^{\beta_n}\text{-}m(B) > 0, n = 1,2,\cdots\}) = 1. \tag{3.38}$$

由(3.38)及 $\dim(B)$ 的定义得(3.37)亦成立.

由(3.35)及(3.37)得(3.34). 推论 3.1 证毕.

注意:推论 3.1 的结果(3.34),若利用 $P_{\mu} = \mu^D \circ \psi^{-1}$, $\mu^D(\Omega_0) = 1$(ψ 的定义见定义 2.1)则可化为:

$$P_{\mu}(\{B \in \mathscr{K}(E) : \dim(B) = \alpha\})$$

$$= \mu^D \circ \psi^{-1}(\{B \in \mathscr{K}(E) : \dim(B) = \alpha\})$$

$$= \mu^D(\{\omega \in \Omega : \dim(\psi(\omega)) = \alpha\})$$

$$= \mu^D(\{\omega \in \Omega_0 : \dim(K(\omega)) = \alpha\}) = 1, \tag{3.34$'$}$$

其中 $K(\omega)$ 如定理 1.2 所定义.

为了进一步研究随机集的维数与定义，我们须要一些准备知识.

设　$g:\mathrm{Con}(E)\to[0,1)$ 且 Borel 可测；

$\forall\, \Gamma\subset D,\beta>0$，定义 $f_{\Gamma,\beta}:\Omega\to[0,\infty)$ 如下：

$$f_{\Gamma,\beta}(\omega)=\sum_{\sigma\in\Gamma}\prod_{n=1}^{|\sigma|}g(S_{\sigma|n})^{\beta},f_{\varnothing,\beta}(\omega)\equiv 1,\tag{3.39}$$

$$f_{q,\beta}\equiv f_{c_q,\beta},\tag{3.40}$$

$\alpha=\alpha(g)$ 是由下列方程式确定的唯一解：

$$\int\sum_{i=0}^{N-1}g(S_i)^{\alpha}d\mu(S_0,\cdots,S_{N-1})=1.\tag{3.41}$$

μ 是 $\mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N)$ 上的任一给定的概率测度.

命题 3.1　(1) 设 $\int\sum_{i=0}^{N-1}g(S_i)^0d\mu(S_0,\cdots,S_{N-1})>1,\alpha=\alpha(g)$ (0^0 定义为 0)，则

$$\mu^D(\{\omega\in\Omega:\sup_{\Gamma_0\in\mathrm{Min}}\inf\{f_{\Gamma,\alpha}(\omega):\Gamma\in\mathrm{Min},\Gamma_0\prec\Gamma\}<\infty\})=1;\tag{3.42}$$

(2) 设对 μ-$a.s.$ 的 $(S_0,\cdots,S_{N-1})\in\mathrm{Con}(E)^N$ 及任何 $i\in\{0,1,\cdots,N-1\}$，总有 $g(S_i)>0$. 令 $\beta<\alpha=\alpha(g),k\in\mathbb{N}$ 是任意正整数，则

$$\mu^D(\sup_{\Gamma_0\in\mathrm{Min}}\inf\{\sum_{\sigma\in\Gamma^*}g(S_\sigma)^k\prod_{n=1}^{|\sigma|}g(S_{\sigma|n})^{\beta}:\Gamma^*\in\mathrm{Min},\Gamma_0\prec\Gamma^*\}>0)=1;\tag{3.43}$$

(3)　在(1) 的条件下，下列陈述等价：

(a)　$\sum_{i=0}^{N-1}g(S_i)^{\alpha}=1$，对 μ-$a.s.$ 的 $(S_0,\cdots,S_{N-1})$，　(3.44)

(b)　$\sup_{\Gamma_0\in\mathrm{Min}}\inf\{f_{\Gamma,\alpha}(\omega):\Gamma\in\mathrm{Min},\Gamma_0\prec\Gamma\}>0$

对 μ^D-$a.s.$ 的 ω，　(3.45)

(c)　$\mu^D(\{\omega\in\Omega:\sup_{\Gamma_0\in\mathrm{Min}}\inf_{\Gamma_0\prec\Gamma}f_{\Gamma,\alpha}(\omega)>0\})>0.$　(3.46)

证　参见[77]6.5、6.8、6.11.

定理 3.4　设 $\int \sum_{i=0}^{N-1} (\mathrm{Lip}(S_i))^0 d\mu(S_0,\cdots,S_{N-1}) > 1$，$\alpha = \mathrm{Lip}(\alpha)$ 是由下列方程式所确定的唯一解：

$$\int \sum_{i=0}^{N-1} (\mathrm{Lip}(S_i))^\alpha d\mu(S_0,\cdots,S_{N-1}) = 1, \tag{3.47}$$

则

$$\begin{aligned} & P_\mu(\{B \in \mathscr{K}(E): s^\alpha\text{-}m(B) < \infty\}) \\ & = \mu^D \circ \psi^{-1}(\{B \in \mathscr{K}(E): s^\alpha\text{-}m(B) < \infty\}) \\ & = \mu^D(\{\omega \in \Omega_0: s^\alpha\text{-}m(K(\omega)) < \infty\}) = 1, \end{aligned} \tag{3.48}$$

更有

$$\begin{aligned} & P_\mu(\{B \in \mathscr{K}(E): \dim(B) \leqslant \alpha\}) \\ & = \mu^D(\{\omega \in \Omega_0: \dim(K(\omega)) \leqslant \alpha\}) = 1. \end{aligned} \tag{3.49}$$

其中 $\psi, K(\omega)$ 之定义见(3.34)′.

证　由定理 3.1，$\forall\ \omega \in \Omega_0$ 有

$$s^\alpha\text{-}m(K(\omega)) \leqslant \mathrm{diam}(E)^\alpha$$

$$\cdot \sup_{\Gamma_0 \in \mathrm{Min}} \inf\{\sum_{\sigma\in\Gamma} \prod_{\rho=1}^{|\sigma|} \mathrm{Lip}(S_{\sigma|\rho})^\alpha : \Gamma \in \mathrm{Min}, \Gamma_0 \prec \Gamma\}. \tag{3.1}$$

在命题 3.1 的(1) 中取 $g(S) = \mathrm{Lip}(S)$，用命题 3.1(1) 可知(3.1) 右方小于等于

$$\begin{aligned} & \mathrm{diam}(E)^\alpha \sup_{\Gamma_0 \in \mathrm{Min}} \inf_{\Gamma_0 \prec \Gamma \in \mathrm{Min}} f_{\Gamma,\alpha}(\omega) \\ & \qquad < \infty, (\text{对 } \mu^D\text{-}a.s. \text{ 的 } \omega). \end{aligned} \tag{3.50}$$

而 $\mu^D(\Omega_0) = 1$，所以

$$\mu^D(\{\omega \in \Omega_0: s^\alpha\text{-}m(K(\omega)) < \infty\}) = 1.$$

定理 3.4 证毕.

定理 3.4 的(3.49) 式，只给出了：对 μ^D-$a.s.$ 的 ω，$\dim(K(\omega))$ 的上界是 $\alpha = \alpha(\mathrm{Lip})$，或者说对 P_μ-$a.s.$ 的 $B \in \mathscr{K}(E)$，$\dim(B)$ 的上界是 $\alpha = \alpha(\mathrm{Lip})$. 定理 3.4 的更一般的形式由 Mauldin-Williams([159]) 所证明，不过那儿的证明复杂得多.

注意:(3.49) 只给出了维数的上界,确实存在这样的 μ 和 E,使

$$P_{\mu}(\{B \in \mathscr{K}(E):\dim(B) = \beta\}) = 1, \tag{3.51}$$

其中 $\beta < \alpha = \alpha(\mathrm{Lip})$.

例 3.1　取 $E = [0,1]^2$,d 是 E 中欧氏距离,定义由 $E \to E$ 的两个压缩映射:

$$T_0(x,y) = (\frac{1}{2}x, \frac{\sqrt{3}}{2}y),$$

$$T_1(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) + (\frac{1}{2}x, (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})y),$$

取 $\mu = \varepsilon_{(T_0,T_1)}$,即 μ 是 $\mathrm{supp}(\mu) = \{(T_0,T_1)\}$ 的概率测度. 则 $\mathrm{Lip}(T_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,$\mathrm{Lip}(T_1) = \frac{1}{2}$,而 $\alpha = \mathrm{Lip}(\alpha)$ 是由下列方程式决定的唯一解:

$$1 = \int (\mathrm{Lip}(S_0)^{\alpha} + \mathrm{Lip}(S_1)^{\alpha}) d\mu(S_0,S_1)$$

$$= \mathrm{Lip}(T_0)^{\alpha} + \mathrm{Lip}(T_1)^{\alpha} = (\frac{\sqrt{3}}{2})^{\alpha} + (\frac{1}{2})^{\alpha},$$

故 $\alpha = \alpha(\mathrm{Lip}) = 2$.

取例 2.1 中的 $\upsilon = \varepsilon_{(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})}$,即 υ 是 $\mathrm{supp}(\upsilon) = \{(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})\}$ 的概率测度,而例 2.1 中的

$$S_{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}}(u,v) = T_0(u,v),$$

$$T_{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}}(u,v) = T_1(u,v),$$

$$\xi(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = (T_0,T_1),$$

所以 $\upsilon \circ \xi^{-1}\{(T_0,T_1)\} = 1$,故 $\mu = \upsilon \circ \xi^{-1}$. 但是由例 2.1 有

$$\mathrm{supp}(P_{\mu}) = \mathrm{supp}(P_{\upsilon\circ\xi^{-1}}) = H$$

$= \{G_r(h): h$ 是由$[0,1]$ 到$[0,1]$ 上的严格升的同胚映射$\} \subset \mathscr{K}(E)$.

显然,$\forall B \in H$,有 $\dim(B) = 1$,所以

$$P_\mu(\{B \in \mathscr{K}(E) : \dim(B) = 1\}) = 1.$$

下面的定理是([159])中结果的一个特殊情形，它给出了

$$P_\mu(\{B \in \mathscr{K}(E) : \dim(B) = \alpha\}) = 1$$

的充分条件.

定理 3.5　设 $E \subset \mathbb{R}^d$，E 是紧集且 $\overset{\circ}{E} \neq \varnothing$，$d$ 是 E 中的欧氏距离，μ 是 $\mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N)$ 上任一概率测度，$N > 1$，若

(a)　$s\mathrm{Con}(E)^N \supset A^N \in \mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^N)$，$\mu(A^N) = 1$，$\mathrm{Lip}(S_\rho) > 0$，$(\forall\ S_\rho \in A)$；

(b)　$\forall\ \rho, \rho' \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$ 有：

$$\text{“}\rho \neq \rho',\ S_\rho, S_{\rho'} \in A \Rightarrow S_\rho(\overset{\circ}{E}) \cap S_{\rho'}(\overset{\circ}{E}) = \varnothing\text{”}, \tag{3.52}$$

则　$\mu^D(\{\omega \in \Omega_0 : \dim(K(\omega)) = \alpha\}) =$

$$P_\mu(\{B \in \mathscr{K}(E) : \dim(B) = \alpha\}) = 1. \tag{3.53}$$

(其中 $\alpha = \alpha(\mathrm{Lip})$ 如定理 3.4 中所定义，(3.52) 式称为“开集条件”.)

证　因为 $\forall\ S_\rho \in A \subset s\mathrm{Con}(E)$，必有 $0 < \mathrm{Lip}(S_\rho) < 1$，所以由 (a) 得

$$\int \sum_{\rho=0}^{N-1} \mathrm{Lip}(S_\rho)^0 d\mu(S_0, \cdots, S_{N-1})$$

$$\geqslant \int_{A^N} \sum_{\rho=0}^{N-1} \mathrm{Lip}(S_\rho)^0 d\mu(S_0, \cdots, S_{N-1}) = N\mu(A^N) = N > 1,$$

因此，由定理 3.4 有：

$$P_\mu(\{B \in \mathscr{K}(E) : \dim(B) \leqslant \alpha\}) = 1.$$

因此，为证定理 3.5，只需证明

$$P_\mu(\{B \in \mathscr{K}(E) : \dim(B) \geqslant \alpha\}) = 1, \tag{3.54}$$

为此又只需证明：$\forall\ \beta < \alpha$ 有

$$P_\mu(\{B \in \mathscr{K}(E) : s^\beta\text{-}m(B) > 0\})$$

$$= \mu^D(\{\omega \in \Omega_0 : s^\beta\text{-}m(K(\omega)) > 0\}) = 1. \tag{3.55}$$

$\forall\ \omega \in (A^N)^D \cap \Omega_0 \subset \Omega_0(s)$，$\omega = (\omega_\sigma, \sigma \in D)$，

必有 $\omega_\sigma = (S_{\sigma*0},\cdots,S_{\sigma*(N-1)}) \in A^N$，所以由 (b) 有

$$S_{\sigma*\rho}(\overset{\circ}{E}) \cap S_{\sigma*\rho'}(\overset{\circ}{E}) = \varnothing, (\rho \neq \rho'),$$

此即定理 3.2 中的“强开集条件”(3.9) 成立，而定理 3.2 中其它条件在定理 3.5 中显然成立，所以由定理 3.2 有 $a > 0$ 使

$$s^\beta\text{-}m(K(\omega)) \geqslant a \operatorname{diam}(E)^\beta \cdot \sup_{\Gamma_0 \in \mathrm{Min}} \inf\{\sum_{\sigma \in \Gamma^*} \mathrm{Lip}(S_\sigma)^k \prod_{\rho=1}^{|\sigma|} \mathrm{Lip}(S_{\sigma|\rho})^\beta : \Gamma^* \in \mathrm{Min}, \Gamma_0 < \Gamma^*\},$$

$$(3.56)$$

$(\forall\ \omega = (\omega_\sigma = (S_{\sigma*0},\cdots,S_{\sigma*(N-1)}), \sigma \in D) \in (A^N)^D \cap \Omega_0)$.

但是，由 (a) 知 $\mu^D((A^N)^D \cap \Omega_0) = 1$，所以对 μ^D-$a.s.$ 的 ω，(3.56) 成立. 但是由 (a) 还可知：$\mu(A^N) = 1$，且“$S_\rho \in A \Rightarrow 1 > \mathrm{Lip}(S_\rho) > 0$”，所以，由命题 3.1(2) 得(取 $g(s) = \mathrm{Lip}(S)$)：

$$\mu^D(\sup_{\Gamma_0 \in \mathrm{Min}} \inf\{\sum_{\sigma \in \Gamma^*} \mathrm{Lip}(S_\sigma)^k \prod_{\rho=1}^{|\sigma|} \mathrm{Lip}(S_{\sigma|\rho})^\beta : \Gamma^* \in \mathrm{Min}, \Gamma_0 < \Gamma^*\} > 0) = 1. \quad (3.57)$$

由 (3.56) 对 μ^D-$a.s.$ 的 ω 成立及 (3.57) 得

$$\mu^D(\{\omega \in \Omega_0 : s^\beta\text{-}m(K(\omega)) > 0\}) = 1.$$

定理 3.5 证毕.

定理 3.6([77])　在定理 3.5 的条件下，若

$$\mu(\{(S_0,\cdots,S_{N-1}) \in \mathrm{Con}(E)^N : \sum_{\rho=0}^{N-1} \mathrm{Lip}(S_\rho)^\alpha \neq 1\}) > 0,$$

则

$$\mu^D(\{\omega \in \Omega_0 : s^\alpha\text{-}m(K(\omega)) = 0\}) = P_\mu(\{B \in \mathscr{K}(E) : s^\alpha\text{-}m(B) = 0\}) = 1. \quad (3.58)$$

证　由定理 3.1 及 $\mu^D(\Omega_0) = 1$ 得：

$$\mu^D(\{\omega \in \Omega_0 : s^\alpha\text{-}m(K(\omega)) \leqslant \operatorname{diam}(E)^\alpha \cdot \sup_{\Gamma_0 \in \mathrm{Min}} \inf\{\sum_{\sigma \in \Gamma} \prod_{\rho=1}^{|\sigma|} \mathrm{Lip}(S_{\sigma|\rho})^\alpha : \Gamma \in \mathrm{Min}, \Gamma_0 < \Gamma\}) = 1. \quad (3.59)$$

由 (3.59) 及命题 3.1(3) 和定理 3.6 的假设即得 (3.58). 定理 3.6

证毕.

定理 3.7([77]) 在定理 3.5 的条件下,若还有
$\mu(\{(S_0,\cdots,S_{N-1})\in \mathrm{Con}(E)^N : \mathrm{Lip}(S_i)\geqslant\delta, i=0,1,\cdots N-1\})$
$=1$(其中 $\delta>0$),则下列三陈述等价:

(a) $\mu(\{(S_0,\cdots,S_{N-1})\in \mathrm{Con}(E)^N : \sum_{i=0}^{N-1}\mathrm{Lip}(S_i)^\alpha=1\})$
$=1$;

(b) $P_\mu(\{B\in\mathscr{K}(E) ; s^\alpha\text{-}m(B)>0\})$
$=\mu^D(\{\omega\in\Omega_0 : s^\alpha\text{-}m(K(\omega))>0\})=1$;

(c) $P_\mu(\{B\in\mathscr{K}(E) ; s^\alpha\text{-}m(B)>0\})$
$=\mu^D(\{\omega\in\Omega_0 : s^\alpha\text{-}m(K(\omega))>0\})>0$,

其中 $\alpha=\alpha(\mathrm{Lip})$ 如定理 3.4 中所定义.

证 (a)⇒(b). 设(a) 成立. 由定理3.2有(因为定理3.5中的条件保证了 $\mu^D(\Omega_0(s))=1$ 且对 μ^D-a.s. 的 ω,(3.9) 成立)

$$s^\alpha\text{-}m(K(\omega))\geqslant a\ \mathrm{diam}(E)^\alpha \sup_{\Gamma_0\in\mathrm{Min}}\inf\{\sum_{\sigma\in\Gamma^*}\mathrm{Lip}(S_\sigma)^k\prod_{\rho=1}^{|\sigma|}\mathrm{Lip}(S_{\sigma|\rho})^\alpha : \Gamma^*\in\mathrm{Min}, \Gamma_0\prec\Gamma^*\},\tag{3.60}$$

对 μ^D-a.s. 的 ω 成立. 再用本定理的假设知

$$s^\alpha\text{-}m(K(\omega))\geqslant a\ \mathrm{diam}(E)^\alpha\delta^k \sup_{\Gamma_0\in\mathrm{Min}}\inf\{\sum_{\sigma\in\Gamma^*}\prod_{\rho=1}^{|\sigma|}\mathrm{Lip}(S_{\sigma|\rho})^\alpha : \Gamma^*\in\mathrm{Min}, \Gamma_0\prec\Gamma^*\},\tag{3.61}$$

对 μ^D-a.s. 成立.

由(3.61) 及(a) 成立再用命题 3.1(3),可得(b) 成立.

(b)⇒(c) 显然成立.

(c)⇒(a) 由定理 3.6 立即可得.

定理 3.8 在定理 3.5 的条件下,若还满足:

(1) $\int\sum_{i=0}^{N-1}(\mathrm{Lip}(S_i))^0 d\mu(S_0,\cdots,S_{N-1})>1$;

(2) $\mu(\{(S_0,\cdots,S_{N-1}) \in \mathrm{Con}(E)^N : \mathrm{Lip}(S_i) \geqslant \delta,$
$i = 0,\cdots,N-1\}) = 1$,(其中 $\delta > 0$);

(3) $\mu(\{(S_0,\cdots,S_{N-1}) \in \mathrm{Con}(E)^N : \sum_{i=0}^{N-1}\mathrm{Lip}(S_i)^\alpha = 1\})$
$= 1$,

其中 $\alpha = \alpha(\mathrm{Lip})$ 如定理 3.4 所定义,则

$$P_\mu(\{B \in \mathscr{K}(E) : 0 < s^\alpha\text{-}m(B) < \infty\})$$
$$= \mu^D(\{\omega \in \Omega_0 : 0 < s^\alpha\text{-}m(K(\omega)) < \infty\})$$
$$= 1,$$

更有,对 μ^D-$a.s.$ 的 ω,$K(\omega)$ 的确切测度函数是 $\varphi_K(s) = s^\alpha$.

证 由定理 3.4 和定理 3.7 即得定理 3.8.

§4 例子

本节沿用前三节的符号.

例 4.1 各种意义下的 Cantor 集

例 4.1(a) 经典的 Cantor 集 K_c. 设 K_c 是第一章例 2.1 中定义的经典 Cantor 集,(那里用 C 表示,而本章 C 已做它用,故改用 K_c 表示)若用本章的语言,K_c 可表述如下:

取 $E = [0,1]$,$N = 2$,$\omega^* = (\omega_\sigma^* \equiv \omega_{\emptyset}^* = (S_0,S_1),\sigma \in D)$,其中 $S_0(x) = \frac{1}{3}x$,$S_1(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x\ (x \in E)$,$\Psi_{\omega^*}^{(n)}$ 如定理 1.3 所定义,$\sigma = (\sigma_0,\cdots,\sigma_n) \in C_{n+1}$,

$$K_c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\sigma \in C_{n+1}} S_{\sigma_0} \circ \cdots \circ S_{\sigma_n}(E) \doteq \lim_{n\to\infty}\Psi_{\omega^*}^{(n)}(E)$$
$$= K(\omega^*)$$

取 $\mu = \varepsilon_{(S_0,S_1)}$ 是测度集中在单点集 $\{(S_0,S_1)\}$ 的概率测度,则由定理 3.8 有

$$\dim(K_c) = \dim(K(\omega^*)) = \alpha,$$
$$0 < s^\alpha\text{-}m(K_c) < \infty,$$

其中 α 由

$$1 = \mathrm{Lip}(S_0)^\alpha + \mathrm{Lip}(S_1)^\alpha = (\frac{1}{3})^\alpha + (\frac{1}{3})^\alpha$$

而定，即是 $\alpha = \log 2/\log 3$. 其实第一章例 2.1 我们还具体算出了 $s^\alpha\text{-}m(K_c) = 1$.

例 4.1(*b*)　经典Cantor 集的随机表示 K_{rc}. 经典Contor 集 K_c 是将单位闭区间 $E = [0,1]$ 挖去中间 $\frac{1}{3}$ 长的开区间后，在剩下的两个长为 $\frac{1}{3}$ 的闭区间中再挖去各自的中间的长为 $(\frac{1}{3})^2$ 的开区间，… 仿此继续下去，最后得到的极限集合就是 K_c. 而今 K_{rc} 较广的地方在于每次挖去的 $\frac{1}{3}$，不一定是中间的那一段，而是以等概率(即 $\frac{1}{3}$) 挖去三段中的任一段都可以. 这样得到的极限集合就是 K_{rc}. 用我们这一章的语言来说 K_{rc} 可表述如下：

取 $E = [0,1]$, $N = 2$, $T_k(x) = \frac{1}{3}x + \frac{k}{3}$, $(x \in E)$, $k = 0,1,2$, $\mu = \frac{1}{3}(\varepsilon_{(T_0,T_1)} + \varepsilon_{(T_0,T_2)} + \varepsilon_{(T_1,T_2)})$

$$\Omega = (\mathrm{Con}(E)^2)^D, \mathscr{F} = \mathscr{B}(\Omega), \mu^D = (\frac{1}{3}(\varepsilon_{(T_0,T_1)} + \varepsilon_{(T_0,T_2)} + \varepsilon_{(T_1,T_2)}))^D.$$

则对 μ^D-*a. s.* 的 ω 有

$$K_{rc} = K_{rc}(\omega) = K(\omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\sigma \in C_{n+1}} S_{\sigma|1} \circ \cdots \circ S_{\sigma|(n+1)}(E),$$

它是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mu^D)$ 上的随机集.

解方程式

$$\begin{aligned}1 &= \int (\mathrm{Lip}(S_0)^\alpha + \mathrm{Lip}(S_1)^\alpha) d\mu(S_0, S_1) \\ &= \frac{1}{3}[(\mathrm{Lip}(T_0)^\alpha + \mathrm{Lip}(T_1)^\alpha) + (\mathrm{Lip}(T_0)^\alpha + \mathrm{Lip}(T_2)^\alpha) \\ &\quad + (\mathrm{Lip}(T_1)^\alpha + \mathrm{Lip}(T_2)^\alpha)] \\ &= 2(\frac{1}{3})^\alpha\end{aligned}$$

得 $\alpha = \log 2/\log 3$.

由定理3.8，有

$$P_{\mu}(\{B \in \mathscr{K}(E): 0 < s^{\alpha}\text{-}m(B) < \infty\})$$
$$= \mu^{D}(\{\omega \in \Omega_0 : 0 < s^{\alpha}\text{-}m(K_{\pi}(\omega)) < \infty\}) = 1.$$

例 4.1(c) Mauldin 构造的随机Cantor 集 K_{mc}.

Mauldin 在[159] 中构造 K_{mc} 的程序如下：

取 $\Delta = \{(x,y): 0 < x < y < 1\}$, $\tilde{\mu} = 2\mathscr{L}_2$, ($\mathscr{L}_2$ 是$\mathbb{R}^2$ 上的 Lebesgue 测度，从而 $\tilde{\mu}$ 是 Δ 上的概率测度)，$D = D(2) = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{0,1\}^n$ ($\{0,1\}^0$ 定义为空集 $\varnothing$)，$\forall\ \sigma \in D$，取 $\tilde{\Omega}_{\sigma} = \Delta$，再令 $\tilde{\Omega} = \times_{\sigma \in D} \tilde{\Omega}_{\sigma}$，遂得概率空间$(\tilde{\Omega}, \mathscr{B}(\tilde{\Omega}), \tilde{\mu}^D)$.

令 π_0, π_1 都是Δ上的坐标映射，即$\forall\ (x,y) \in \Delta$, $\pi_0(x,y) = x$, $\pi_1(x,y) = y$. $\forall\ \sigma \in D$, m_{σ} 亦为 $\tilde{\Omega}$ 上的坐标映射，即$\forall\ \tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_{\sigma}, \sigma \in D) \in \tilde{\Omega}$, $m_{\sigma}(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}_{\sigma}$. 取

$$J_{\varnothing}(\tilde{\omega}) \equiv [0,1], \tag{4.1}$$

$$J_0(\tilde{\omega}) = [0, \pi_0 \circ m_{\varnothing}(\tilde{\omega})], \tag{4.2}$$

$$J_1(\tilde{\omega}) = [\pi_1 \circ m_{\varnothing}(\tilde{\omega}), 1], \tag{4.3}$$

归纳地，若 $J_{\sigma}(\tilde{\omega}) = [a_{\sigma}(\tilde{\omega}), b_{\sigma}(\tilde{\omega})]$ 已定义，则定义

$$J_{\sigma*0}(\tilde{\omega}) = [a_{\sigma}(\tilde{\omega}), a_{\sigma}(\tilde{\omega}) + \pi_0 \circ m_{\sigma}(\tilde{\omega})(b_{\sigma}(\tilde{\omega}) - a_{\sigma}(\tilde{\omega}))], \tag{4.4}$$

$$J_{\sigma*1}(\tilde{\omega}) = [a_{\sigma}(\tilde{\omega}) + \pi_1 \circ m_{\sigma}(\tilde{\omega})(b_{\sigma}(\tilde{\omega}) - a_{\sigma}(\tilde{\omega})), b_{\sigma}(\tilde{\omega})], \tag{4.5}$$

最后定义

$$K_{mc}(\tilde{\omega}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\sigma \in \{0,1\}^n} J_{\sigma}(\tilde{\omega}). \tag{4.6}$$

显然，(4.6) 中定义的 $K_{mc}(\tilde{\omega})$ 满足[159] 中 $P.326$—327 中的三条件，它是概率空间$(\tilde{\Omega}, \mathscr{B}(\tilde{\Omega}), \tilde{\mu}^D)$ 上取值于 $\mathscr{K}([0,1])$ ([0,1] 中

全体非空紧子集）上的随机集.

下面我们用本章 §1 的语言来刻画$K_{mc}(\tilde{\omega})$，把它化为定理1.2中的 $K(\omega)$ 的形式.

取 $E=[0,1]$，E 中的距离 d 是欧氏距离，$N=2$，$C_n(N)=C_n(2)=\{0,1\}^n$，$D=D(2)=\bigcup_{n=0}^{\infty}C_n(2)=\bigcup_{n=0}^{\infty}C_n$.

定义由 $\tilde{\Omega}$ 到 Con(E) 的映射如下：$\forall\ \tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$，

$$S_{\sigma*0}(\tilde{\omega})(t)=(\pi_0\circ m_\sigma(\tilde{\omega}))(t),\quad (t\in E),\tag{4.7}$$

$$S_{\sigma*1}(\tilde{\omega})(t)=(\pi_1\circ m_\sigma(\tilde{\omega}))+(1-\pi_1\circ m_\sigma(\tilde{\omega}))t,\quad (t\in E),\tag{4.8}$$

$(\sigma\in D)$.

有时记 $S_\sigma(\tilde{\omega})(t)$ 为 $S_\sigma(\tilde{\omega},t)$. (4.9)

用归纳法可证：

$$S_{\sigma|1}(\tilde{\omega})\circ\cdots\circ S_{\sigma||\sigma|}(\tilde{\omega})(E)=J_\sigma(\tilde{\omega}),\begin{pmatrix}\forall\ \sigma\in D\\ \forall\ \tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}\end{pmatrix},\tag{4.10}$$

事实上，由定义（见(4.2)、(4.3)、(4.7)、(4.8)）有

$$S_0(\tilde{\omega},E)=J_0(\tilde{\omega}),S_1(\tilde{\omega},E)=J_1(\tilde{\omega}).\tag{4.11}$$

设

$$S_{\sigma|1}(\tilde{\omega})\circ\cdots\circ S_{\sigma||\sigma|}(\tilde{\omega})(E)=J_\sigma(\tilde{\omega})=[a_\sigma(\tilde{\omega}),b_\sigma(\tilde{\omega})],\tag{4.12}$$

（注意，由定义$J_\sigma(\tilde{\omega})$ 总是$E=[0,1]$中的闭子区间）. 由于$S_{\sigma|1}(\tilde{\omega})\circ\cdots\circ S_{\sigma||\sigma|}(\tilde{\omega})(t)$ 是t 的线性函数，令之为 $f(t)=pt+q$，而 $E=[0,1]$，所以由(4.12) 得

$$f(0)=a_\sigma(\tilde{\omega}),f(1)=b_\sigma(\tilde{\omega}),\tag{4.13}$$

从而

$$f(t)=a_\sigma(\tilde{\omega})+(b_\sigma(\tilde{\omega})-a_\sigma(\tilde{\omega}))t.\tag{4.14}$$

所以由(4.9)、(4.7) 和 $f(t)$ 的定义及(4.14) 得：

$$\begin{aligned}&S_{(\sigma*0)|1}(\tilde{\omega})\circ\cdots\circ S_{(\sigma*0)|(|\sigma|+1)}(\tilde{\omega})(E)\\&=(S_{\sigma|1}(\tilde{\omega})\circ\cdots\circ S_{\sigma||\sigma|}(\tilde{\omega}))(S_{\sigma*0}(\tilde{\omega},E))\end{aligned}$$

$$= f([0,\pi_0 \circ m_\sigma(\tilde{\omega})])$$

$$= [a_\sigma(\tilde{\omega}), a_\sigma(\tilde{\omega}) + (b_\sigma(\tilde{\omega}) - a_\sigma(\tilde{\omega}))\pi_0 \circ m_\sigma(\tilde{\omega})]$$

$$\overset{(4.4)}{=} J_{\sigma * 0}(\tilde{\omega}). \tag{4.15}$$

仿之可证：

$$S_{(\sigma * 1)|1}(\tilde{\omega}) \circ \cdots \circ S_{(\sigma * 1)|(|\sigma|+1)}(\tilde{\omega})(E) = J_{\sigma * 1}(\tilde{\omega}). \tag{4.16}$$

归纳法完成. (4.10) 证毕.

再令 $\xi = (\xi_\sigma, \sigma \in D)$ 是下面定义的由 $\tilde{\Omega}$ 到 $\Omega \equiv (\mathrm{Con}(E)^2)^D$ 的映射：

$$\xi_\sigma : \tilde{\Omega} \to \mathrm{Con}(E)^2,$$

$$\xi_\sigma(\tilde{\omega}) = (S_{\sigma * 0}(\tilde{\omega}), S_{\sigma * 1}(\tilde{\omega})), (\sigma \in D, \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}). \tag{4.17}$$

则由(4.6)、(4.10)、(4.9)、(4.17) 及定理 1.2 中 $K(\omega)$ 的定义有

$$K_{mc}(\tilde{\omega}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\sigma \in \{0,1\}^n} S_{\sigma|1}(\tilde{\omega}) \circ \cdots \circ S_{\sigma||\sigma|}(\tilde{\omega})(E)$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\sigma \in \{0,1\}^n} \overline{S_{\sigma|1}(\tilde{\omega}) \circ \cdots \circ S_{\sigma||\sigma|}(\tilde{\omega})(E)}$$

$$= K(\xi(\tilde{\omega})). \tag{4.18}$$

($\sigma \in \{0,1\}^n$ 中表 $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$, $K(\omega)$ 之定义见定理 1.2).

取 $\mu = \tilde{\mu}^D \circ \xi_\sigma^{-1}$ 是 $\mathscr{B}(\mathrm{Con}(E)^2)$ 上的概率测度，则 $\mu^D = \tilde{\mu}^D \circ \xi^{-1}$. 于是 $K(\omega)$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), \mu^D)$ 上的随机集. 解方程式：

$$1 = \int_{\mathrm{Con}(E)^2} [\mathrm{Lip}(T_0)^\alpha + \mathrm{Lip}(T_1)^\alpha] d\mu(T_0, T_1)$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} [\mathrm{Lip}(\pi_0(\xi_\sigma(\tilde{\omega})))^\alpha + \mathrm{Lip}(\pi_1(\xi_\sigma(\tilde{\omega})))^\alpha] \tilde{\mu}^D(d\tilde{\omega})$$

$$= \int_{\Delta} [\mathrm{Lip}(\pi_0(\xi_\sigma(\tilde{\omega})))^\alpha + \mathrm{Lip}(\pi_1(\xi_\sigma(\tilde{\omega})))^\alpha] \tilde{\mu}(d\tilde{\omega}_\sigma)$$

$$= \int_{\Delta} [\mathrm{Lip}(S_{\sigma * 0}(\tilde{\omega}))^\alpha + \mathrm{Lip}(S_{\sigma * 1}(\tilde{\omega}))^\alpha] \tilde{\mu}(d\tilde{\omega}_\sigma)$$

$$= 2\int_0^1 dx \int_x^1 dy [x^\alpha + (1-y)^\alpha], \tag{4.19}$$

得　$\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{17} - 3)$. 所以由定理 3.5 有

$$
\begin{aligned}
&P_\mu(\{B \in \mathscr{K}(E):\dim(B) = \alpha\}) \\
&= \mu^D(\{\omega \in \Omega : \dim(K(\omega)) = \alpha\}) \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

但是，$\mu^D = \tilde{\mu}^D \circ \xi^{-1}, K_{mc}(\tilde{\omega}) = K(\xi(\tilde{\omega}))$，所以

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\mu}^D(\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} : \dim(K_{mc}(\tilde{\omega})) = \alpha\}) \\
&\quad = \tilde{\mu}^D(\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} : \dim(K(\xi(\tilde{\omega}))) = \alpha\}) \\
&\quad = \mu^D(\{\omega \in \Omega : \dim(K(\omega)) = \alpha\}) = 1.
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

又因为

$$
\begin{aligned}
&\mu(\{(T_0,T_1) \in \mathrm{Con}(E)^2:\mathrm{Lip}(T_0)^\alpha + \mathrm{Lip}(T_1)^\alpha \neq 1\}) \\
&\quad = \tilde{\mu}^D \circ \xi_\sigma^{-1}(\{(T_0,T_1) \in \mathrm{Con}(E)^2:\mathrm{Lip}(T_0)^\alpha + \mathrm{Lip}(T_1)^\alpha \neq 1\}) \\
&\quad = \tilde{\mu}^D(\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} : \mathrm{Lip}(S_{\sigma*0}(\tilde{\omega}))^\alpha + \mathrm{Lip}(S_{\sigma*1}(\tilde{\omega}))^\alpha \neq 1\}),
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

但是由(4.7)、(4.8) 知

$$
\mathrm{Lip}(S_{\sigma*0}(\tilde{\omega})) = \pi_0 \circ m_\sigma(\tilde{\omega}) = \pi_0(\tilde{\omega}_\sigma), \tag{4.23}
$$

$$
\mathrm{Lip}(S_{\sigma*1}(\tilde{\omega})) = 1 - \pi_1 \circ m_\sigma(\tilde{\omega}) = 1 - \pi_1(\tilde{\omega}_\sigma), \tag{4.24}
$$

而由 $\tilde{\omega}_\sigma \in \Delta = \{(x,y):0 < x < y < 1\}$ 又知

$$
0 < \pi_0(\tilde{\omega}_\sigma) < \pi_1(\tilde{\omega}_\sigma) < 1 \tag{4.25}
$$

以(4.23)、(4.24)、(4.25) 代入(4.22) 得

$$
\begin{aligned}
&\mu(\{(T_0,T_1) \in \mathrm{Con}(E)^2:\mathrm{Lip}(T_0)^\alpha + \mathrm{Lip}(T_1)^\alpha \neq 1\}) \\
&\quad = \tilde{\mu}(\{\tilde{\omega}_\sigma \in \tilde{\Omega}_\sigma : \pi_0(\tilde{\omega}_\sigma)^\alpha + (1 - \pi_1(\tilde{\omega}_\sigma))^\alpha \neq 1\}) \\
&\quad = 2\mathscr{L}_2(\{(x,y) : 0 < x < y < 1, x^\alpha + (1-y)^\alpha \neq 1\}) \\
&\quad = 1,
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

所以由定理 3.6 得：

$$
\begin{aligned}
1 &= P_\mu(\{B \in \mathscr{K}(E):s^\alpha\text{-}m(B) = 0\}) \\
&= \mu^D(\{\omega \in \Omega : s^\alpha\text{-}m(K(\omega)) = 0\})
\end{aligned}
$$

$$= \tilde{\mu}(\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} : s^{\alpha}\text{-}m(K_{mc}(\tilde{\omega})) = 0\}). \tag{4.27}$$

例 4.1(d) 经典 Cantor 集的随机重排 K_{pc}. 取概率空间

$$(\bar{\Omega}, \bar{\mathscr{F}}, \bar{\mu}) = ([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \mathscr{L}_1)^{\mathbb{N}},$$

$\{X_n, n = 1,2,\cdots\}$ 是$(\bar{\Omega}, \bar{\mathscr{F}}, \bar{\mu})$ 上的独立随机变量列，且 $X_n(\omega) = \omega_n$，此处 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots) \in \bar{\Omega}$. 对几乎所有的 ω，存在关于正整数之间的一个随机偏序：$m < n \Leftrightarrow \omega_m < \omega_n$.

对于任何正整数 n，定义集合 $Q_n(\omega)$ 如下：$Q_n(\omega) = \{m \in \mathbb{N} : \omega_m < \omega_n\}$. 取$\{a_n, n = 1,2,\cdots\}$ 是 Cantor 序列$\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \cdots\}$，令 $t_n(\omega) = \sum_{s \in Q_n(\omega)} a_s$，$J_n(\omega) = (t_n(\omega), t_n(\omega) + a_n)$，

$$K_{pc}(\omega) = [0,1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n(\omega). \tag{4.28}$$

Hawkes 在[90] 中证明了：

$$\bar{\mu}(\{\omega \in \bar{\Omega} : \dim(K_{pc}(\omega)) = \alpha\}) = 1, \tag{4.29}$$

其中 $\alpha = \log2/\log3$.

胡晓予在[105] 中证明了：存在两个正实数 $c_1 > 0, c_2 > c_1$，使

$$\bar{\mu}(\{\omega \in \bar{\Omega} : c_1 < \varphi\text{-}m(K_{pc}(\omega)) < c_2\}) = 1, \tag{4.30}$$

其中

$$\varphi(t) = t^{\alpha}(\log\log\frac{1}{t})^{1-\alpha}, \alpha = \log2/\log3,$$

即对 $\bar{\mu}$-$a.s.$ 的 ω，$K_{pc}(\omega)$ 的确切 Hausdorff 测度函数皆为 $\varphi(t)$. 此结果证明甚繁，容后再证(见第九章定理 3.2).

例 4.1(e) 随机 Cantor 集 K_{uc}.

Mauldin 在[159] 依下列程序构造了另一种意义下的随机 Cantor 集 K_{uc}.

给定 $E = [0,1]$，取 $J_{\varnothing} = [0,1]$. 从$[0,1]$ 中依均匀分布抽取随机变量 u，再从$[0,u]$ 中依均匀分布抽取随机变量 x，而且独立

地从$[u,1]$中依均匀分布抽取随机变量y，令$J_0=[0,x]$，$J_1=[y,1]$，当J_σ取定后，再按上法取$J_{\sigma*0}$，$J_{\sigma*1}$，$\cdots$　$(\sigma\in D=\bigcup_{n=0}^{\infty}\{0,1\}^n)$.

令$K_{uc}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\sigma\in\{0,1\}^n}J_\sigma$，则有$\dim(K_{uc})=\sqrt{2}-1$，　a.s..

第九章

随机 Cantor 集的维数与测度

在第八章中，我们讨论了一类相当广泛的随机集 — 统计自相似集的结构、分布和 Hausdorff 测度. 在此章中，将要详细地讨论一种特殊的但十分重要的随机集 — 各种 Cantor 集的维数与测度理论.

§1 广义 Cantor 集的维数

定义 1.1 设$\{a_n, n \geqslant 1\}$是一个单调非升的正数序列，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1, I = (0,1)$，$E$ 是$[0,1]$中的有界闭子集，于是 $I - E$ 可表为可数个两两不交的开区间之并：$I - E = \bigcup_{n \geqslant 1} J_n$. 若 $\mathscr{L}(J_n) = a_n (\forall\ n \geqslant 1)$，则称 E 是$\{a_n\}$类集合，记之为 $E \in S(\{a_n\})$. 此处 $\mathscr{L}$ 是直线上的 Lebesgue 测度.

显然，经典的 Cantor 三分集是$\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \cdots\}$类集合，所以我们称 $S(\{a_n\})$ 中任一集合为广义 Cantor 集.

定理 1.1([24]) 设$\{a_n\}$如定义 1.1，令

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k, (n = 1, 2, \cdots), \tag{1.1}$$

$$\lambda(\beta, \{a_n\}) = \liminf_{m \to \infty} (m (\frac{r_m}{m})^{\beta}), (0 < \beta \leqslant 1). \tag{1.2}$$

再定义 $\alpha_m = \alpha_m(\{a_n\})$、$\alpha = \alpha(\{a_n\})$ 如下：

$$m(\frac{r_m}{m})^{\alpha_m} = 1, \qquad (m = 1, 2, \cdots), \tag{1.3}$$

$$\alpha = \liminf_{m\to\infty} \alpha_m \tag{1.4}$$

则

(1) $\forall\, \beta \in [0, \alpha]$, $\exists$ 闭集 E，使 $E \in S(\{a_n\})$ 且 $\dim(E) = \beta$，(其中 dim 表 Hausdorff 维数)；

(2) 若 $\alpha > 0$, $0 < \beta \leqslant \alpha$, γ 满足：$0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{1}{4}\lambda(\beta, \{a_n\})$，($\gamma$ 可为 ∞)，则存在闭集 $E \in S(\{a_n\})$，使 $\dim(E) = \beta$, $s^\beta\text{-}m(E) = \gamma$，此处 $s^\beta\text{-}m(\cdot)$ 表示由 s^β 产生的 Hausdorff 测度.

为证此定理，先证明几个引理.

引理 1.1 $\forall\, 0 < \beta \leqslant 1$，总有

$$s^\beta\text{-}m(E) \leqslant \lambda(\beta, \{a_n\}), (\forall\, E \in S(\{a_n\})). \tag{1.5}$$

证 不失普遍性可设 $\lambda(\beta, \{a_n\}) < \infty$. 由于 $E \in S(\{a_n\})$，故可令

$I - E = \bigcup_{n\geqslant 1} J_n$，$\{J_n\}$ 是一列两两不交的开区间，且 $\mathscr{L}(J_n) = a_n$，$(\forall\, n \geqslant 1)$.

令 $E_1 = [0,1]$, $E_n = E_1 - \bigcup_{k=1}^{n-1} J_k (n = 2, 3, \cdots)$，则 E_n 由 n 个闭区间所构成，($n \geqslant 1$，视孤立点为退化的闭区间)，且 $\mathscr{L}(E_n) = r_n$，$E_n \supset E$，$(\forall\, n \geqslant 1)$.

$\forall\, \varepsilon > 0, \eta > 0$，由(1.1)和(1.2)知：$\exists\, m = m(\beta, \varepsilon)$，使

$$r_m < \eta, m\left(\frac{r_m}{m}\right)^\beta < \lambda(\beta, \{a_n\}) + \varepsilon. \tag{1.6}$$

记 $E_m = \bigcup_{i=1}^m F_i^{(m)}$，则 $\{F_i^{(m)}, i = 1, \cdots, m\}$ 是 E 的一个闭区间覆盖，且 $\operatorname{diam}(F_i^{(m)}) \leqslant r_m < \eta$，$(\forall\, i)$，所以

$$\begin{aligned} s^\beta\text{-}m(E) &\leqslant \sup_{\eta>0} \sum_{i=1}^m [\operatorname{diam}(F_i^{(m)})]^\beta \\ &\leqslant \sup_{\eta>0}\left\{ m(\frac{r_m}{m})^\beta \right\} \leqslant \lambda(\beta, \{a_n\}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 可任意小，引理 1.1 得证.

推论 1.1 $\forall E \in S(\{a_n\})$,恒有

$$0 \leqslant \dim(E) \leqslant \alpha(\{a_n\}). \tag{1.7}$$

证 当 $\alpha(\{a_n\}) = 1$ 时,(1.7) 显然成立. 当 $\alpha(\{a_n\}) < 1$ 时, $\forall \beta \in (\alpha(\{a_n\}), 1]$,由(1.1)—(1.4)知 $\lambda(\beta, \{a_n\}) = 0$. 由引理1.1 得 $s^\beta\text{-}m(E) = 0$. 所以 $\dim(E) \leqslant \alpha(\{a_n\})$.

引理 1.2 $\forall \beta \in (0,1], E \in S(\{a_n\})$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\beta < \infty$, 则 $s^\beta\text{-}m(E) = 0$.

证 当 $\beta = 1$ 时,由 $E \in S(\{a_n\})$ 的定义知 $s^1\text{-}m(E) = \mathscr{L}(E) = 0$. 设 $0 < \beta < 1$,则

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k < a_n^{1-\beta} \sum_{k=n}^{\infty} a_k^\beta.$$

因此,

$$n\left(\frac{r_n}{n}\right)^\beta < (a_n^{1-\beta})^\beta n^{1-\beta}\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^\beta\right)^\beta = (na_n^\beta)^{1-\beta}\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^\beta\right)^\beta. \tag{1.8}$$

但是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\beta < \infty$,所以

$$\lim_{n\to\infty}(na_n^\beta) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty} a_k^\beta = 0. \tag{1.9}$$

由(1.8)、(1.9) 及引理 1.1 有

$$0 \leqslant s^\beta\text{-}m(E) \leqslant \lambda(\beta, \{a_n\}) = \liminf_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{r_n}{n}\right)^\beta\right)$$

$$\leqslant \liminf_{n\to\infty}(na_n^\beta)^{1-\beta}\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^\beta\right)^\beta = 0.$$

引理 1.2 证毕.

定义

$$\delta(\{a_n\}) = \inf\{\beta \geqslant 0: \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\beta < \infty\} \tag{1.10}$$

为 $\{a_n\}$ 的“收敛指数”. 显然 $0 \leqslant \delta(\{a_n\}) \leqslant 1$.

推论 1.2 $\forall E \in S(\{a_n\})$,恒有

$$0 \leqslant \dim(E) \leqslant \delta(\{a_n\}). \tag{1.11}$$

证 仿照引理1.1和推论1.1的方法，由引理1.2可得推论1.2.

引理1.3 任给两个正数α及δ，满足$0\leqslant\alpha\leqslant\delta\leqslant 1$，总存在单调非升正数序列$\{a_n\}$，满足$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$，使$\alpha=\alpha(\{a_n\}),\delta=\delta(\{a_n\})$.

证 (1) 先设$0<\alpha\leqslant\delta<1$. 定义一个速增数列$\{n_i\}$如下：

$$n_0=1, n_1=10, n_{k+1}=n_k^{n_k}(k\geqslant 1).$$

令$\beta_2=1/\alpha,\beta_1=1/\delta$，则$\infty>\beta_2\geqslant\beta_1>1$. 定义

$$\begin{cases}a_k=\mu k^{-\beta_2} & (\text{当 } n_{2i}\leqslant k<n_{2i+1});\\ a_k=\mu n_{2i+1}^{\beta_1-\beta_2}k^{-\beta_1} & (\text{当 } n_{2i+1}\leqslant k<n_{2i+2}),\end{cases}\quad (i=0,1,\cdots),$$

其中μ是使$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$的正常数. 易证

$$\alpha=\alpha(\{a_n\}),\delta=\delta(\{a_n\}).$$

(2) 当$\alpha=0$，或$\delta=1$，或$\alpha=0$且$\delta=1$时，将(1)中的$\{a_n\}$稍作修改即可. 引理1.3证毕.

推论1.3 存在单调非升正数序列$\{a_n\}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$，使得：$\forall E\in S(\{a_n\})$，皆有$\dim(E)<\delta(\{a_n\})$.

证 取$0\leqslant\alpha_0<\delta_0\leqslant 1$，由引理1.3，存在单调非升正数序列$\{a_n\}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$，使$\alpha_0=\alpha(\{a_n\}),\delta_0=\delta(\{a_n\})$. 而由推论1.1及推论1.2有

$$\dim(E)\leqslant\alpha(\{a_n\})=\alpha_0<\delta_0=\delta(\{a_n\}).$$

$\forall i\in\mathbb{N}$，定义$r(i)$为满足

$$2^{r(i)-1}\leqslant i<2^{r(i)} \tag{1.12}$$

的唯一整数，再令$\eta_i=(2i+1)2^{-r(i)}-1$. 记$Q_r=\{i\geqslant 1:\eta_i<\eta_r\}$，$r=1,2,\cdots$.

设$\{b_k\}$是任一正数序列且其和收敛，令

$$\delta_0 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \delta_r = \sum_{k \in Q_r} b_k, (r = 1, 2, \cdots), \tag{1.13}$$

$$I_r = (\delta_r, \delta_r + b_r), (r = 1, 2, \cdots), \tag{1.14}$$

$$E(\{b_k\}) = [0, \delta_0] - \bigcup_{r=1}^{\infty} I_r. \tag{1.15}$$

特别地，若 $\{b_k\}$ 是单调降正数序列且其和为 1，则 $E(\{b_k\}) \in S(\{b_k\})$ 且

$$(0,1) - E(\{b_k\}) = Q \equiv \bigcup_{r=1}^{\infty} I_r, \tag{1.16}$$

其中 I_r 是以 b_r 为长的开区间，且“I_r 在 I_s 的左方 $\Leftrightarrow \eta_r < \eta_s$”.

令

$$G_n = \bigcup_{r=1}^{2^n-1} I_r, E_n = [0, \delta_0] - G_n, \tag{1.17}$$

则 E_n 由 2^n 个闭区间所构成且

$$E(\{b_k\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n. \tag{1.18}$$

引理 1.4 设 $\{k_r\}$ 是单调降正数序列，

$$b_i = k_r \quad (\text{当 } 2^{r-1} \leqslant i < 2^r), r = 1, 2, \cdots, \tag{1.19}$$

$\sum_i b_i$ 收敛，则 $\forall\ 0 < \beta \leqslant 1$，有

$$s^{\beta}\text{-}m(E(\{b_i\})) \geqslant \frac{1}{2} \lambda(\beta, \{b_i\}), \tag{1.20}$$

其中

$$\lambda(\beta, \{b_i\}) = \liminf_{m \to \infty} \left[m \left(\frac{\sum_{k=m}^{\infty} b_k}{m} \right)^{\beta} \right]. \tag{1.21}$$

证 (1) $\lambda(\beta, \{b_i\}) = 0$ 时，(1.20) 显然成立.

(2) $0 < \lambda(\beta, \{b_i\}) < \infty$ 时，设 E_n 如(1.17)、(1.18) 所定义，简记 $E(\{b_i\})$ 为 E. 由(1.17)、(1.19)、(1.13)、(1.14) 知 E_n 由 2^n 个等长(不妨记为 l_n) 的闭区间所构成.

$\forall\ \varepsilon > 0$，由(1.19)、(1.21) 可知：$\exists\ n_0$，使

$$2^n l_n^{\beta} > (1 - \varepsilon) \lambda(\beta, \{b_i\}), (n \geqslant n_0). \tag{1.22}$$

$$\forall\ \eta \in (0, b_r), \text{其中 } r = 2^{n_0+1}. \tag{1.23}$$

欲证(1.20),只需证明:$\forall\ \varepsilon > 0$,对 E 的任何一个"由长度小于 η 的开区间构成的覆盖":

$$C(E,\eta,\Gamma) = \{开区间\ R_i : \mathrm{diam}(R_i) < \eta, i \in \Gamma\},$$

有:

$$\sum_{i\in\Gamma}\mathrm{diam}(R_i)^\beta > \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\lambda(\beta,\{b_i\}). \tag{1.24}$$

由于 E 是有界闭集,所以,又只需证明当 $C(E,\eta,\Gamma)$ 是 E 的有限开区间覆盖(即 $\#\Gamma < \infty$)且 $C(E,\eta,\Gamma)$ 中的区间两两不交时,(1.24) 成立即可. 故以下可设:$C(E,\eta,\Gamma)$ 是 E 的覆盖且

$$\#\Gamma < \infty, R_i \cap R_j = \varnothing, (i \neq j, i,j \in \Gamma). \tag{1.25}$$

因为 $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$,$\{E_n\}$ 是一列单调下降闭集,所以,由 $\bigcup_{i\in\Gamma} R_i \supset E$ 得知:存在 n_1 使

$$\bigcup_{i\in\Gamma} R_i \supset E_{n_1}. \tag{1.26}$$

(如果不然,则$\{E_n - \bigcup_{i\in\Gamma} R_i, n \geqslant 1\}$ 是一列单调降闭集,但其交为空集,此为不可能.)令 V_i 是含 $R_i \cap E_{n_1}$ 的最小闭区间且 V_i 恰含 E_{n_1} 中 v_i 个闭区间,则

$$\sum_{i\in\Gamma} v_i = 2^{n_1}, \tag{1.27}$$

(由于 E_{n_1} 恰由 2^{n_1} 个两两不交的闭区间所构成且其中每一个闭区间恰含于一个 V_i 中).

令 t_i 是由下式确定的唯一整数:

$$2^{t_i} \leqslant v_i < 2^{t_i+1}. \tag{1.28}$$

由于$\{k_r\}$ 是单调降正数序列,E_n 由 2^n 个长为 l_n 的不交闭区间所组成,所以恰含 E_{n_1} 中 2^{t_i} 个闭区间的区间 I,必有 $\mathrm{diam}(I) \geqslant l_{n_1-t_i}$. 因此

$$\eta > \mathrm{diam}(V_i) \geqslant l_{n_1-t_i}. \tag{1.29}$$

(因为 V_i 恰含 E_{n_1} 中 $v_i(\geqslant 2^{t_i})$ 个闭区间,$\mathrm{diam}(V_i) \leqslant \mathrm{diam}(R_i) < \eta$).

由(1.23) 有 $n_1 - t_i > n_0$,再用(1.29)、(1.22) 得:

$$\operatorname{diam}(V_i)^\beta \geqslant l^\beta_{n_1-t_i} > 2^{-(n_1-t_i)}(1-\varepsilon)\lambda(\beta,\{b_i\}).$$

再用(1.27)、(1.28) 得：

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\Gamma}\operatorname{diam}(R_i)^\beta &\geqslant \sum_{i\in\Gamma}\operatorname{diam}(V_i)^\beta \\ &> (1-\varepsilon)\lambda(\beta,\{b_i\})2^{-n_1}\sum_{i\in\Gamma}2^{t_i} \\ &\geqslant (1-\varepsilon)\lambda(\beta,\{b_i\})2^{-n_1}\sum_{i\in\Gamma}\frac{v_i}{2} \\ &= \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\lambda(\beta,\{b_i\}).\end{aligned}$$

(1.24) 得证.

(3) $\lambda(\beta,\{b_i\})=\infty$ 时，仿(2) 可证

$$s^\beta\text{-}m(E(\{b_i\}))=\infty.$$

引理 1.4 证毕.

引理 1.5 设$\{b_n\}$ 是单调降正数列且其和收敛，令$\{b'_n\}$ 定义如下：

$$b'_n=b_q(q=2^r-1,2^{r-1}\leqslant n<2^r,r=1,2,\cdots). \tag{1.30}$$

则 $\forall\ \beta\in(0,1]$，有

$$\lambda(\beta,\{b_n\})\geqslant\lambda(\beta,\{b'_n\})\geqslant\frac{1}{2}\lambda(\beta,\{b_n\}). \tag{1.31}$$

证 由$\{b'_n\}$ 及 $\lambda(\beta,\{b_n\})$ 的定义即得(1.31).

引理 1.6 设$\{b_n\}$ 是任一单调降正数列，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=1$，则

$$\forall\ 0<\beta\leqslant 1,\text{有}$$

$$\lambda(\beta,\{b_n\})\geqslant s^\beta\text{-}m(E(\{b_n\}))\geqslant\frac{1}{4}\lambda(\beta,\{b_n\}). \tag{1.31}$$

证 由于$E(\{b_n\})\in S(\{b_n\})$(见(1.16) 式前)，所以，由引理 1.1 得知

$$\lambda(\beta,\{b_n\})\geqslant s^\beta\text{-}m(E(\{b_n\})). \tag{1.32}$$

定义$\{b'_n\}$ 如(1.30). 则由$\{b_n\}$ 为单调降序列及(1.30) 可知：

$$b'_n\leqslant b_n,(n=1,2,\cdots),\sum_n b'_n=\sum_n b_n=1, \tag{1.33}$$

若记 $E = E(\{b_n\}), E' = E(\{b'_n\})$，则由(1.13)、(1.14)、(1.15)、(1.33) 可知：

$$E = \bigcup_{r=1}^{\infty} F_r, E' = \bigcup_{r=1}^{\infty} F'_r, \tag{1.34}$$

其中 $\mathrm{diam}(F_r) \leqslant \mathrm{diam}(F'_r), (\forall\ r \geqslant 1)$ 且 $\{F_r\}(\{F'_r\})$ 是两两不交的闭区间序列. 因此，若 $C(E,\eta,\Gamma) = \{$开区间 R_i: $\mathrm{diam}(R_i) < \eta, i \in \Gamma\}$ 是 E 的一个覆盖，则必存在

$$C'(E',\eta,\Gamma) = \{\text{开区间 } R'_i: \mathrm{diam}(R'_i) = \mathrm{diam}(R_i) < \eta, i \in \Gamma\}$$

是 E' 的一个覆盖，$(\forall\ \eta > 0)$. 所以由 Hausdorff 测度的定义知：

$$s^{\beta}\text{-}m(E) \geqslant s^{\beta}\text{-}m(E'). \tag{1.35}$$

再用引理 1.4 有

$$s^{\beta}\text{-}m(E') \geqslant \frac{1}{2}\lambda(\beta, \{b'_n\}). \tag{1.36}$$

由引理 1.5 有

$$\lambda(\beta, \{b'_n\}) \geqslant \frac{1}{2}\lambda(\beta, \{b_n\}). \tag{1.37}$$

由(1.35)、(1.36)、(1.37) 得：

$$s^{\beta}\text{-}m(E) \geqslant \frac{1}{4}\lambda(\beta, \{b_n\}). \tag{1.38}$$

由(1.32)、(1.38)，引理 1.6 得证.

引理 1.7 设 E 是 $\mathbb{R}^1$ 中任一闭子集，且 $\dim(E) = \delta \in (0,1]$. 则

(1) $\forall\ \beta \in (0,\delta), \gamma \in [0,\infty]$，必存在 E 的闭子集 E_1 使

$$\dim(E_1) = \beta, s^{\beta}\text{-}m(E_1) = \gamma. \tag{1.39}$$

(2) $\forall\ \zeta \in [0, s^{\delta}\text{-}m(E)]$，必存在 E 的一个闭子集 E_2 使

$$\dim(E_2) = \delta, s^{\delta}\text{-}m(E_2) = \zeta. \tag{1.40}$$

证 (1) 由 $0 < \beta < \delta = \dim(E)$ 及 $\dim(\cdot)$ 的定义知：$s^{\beta}\text{-}m(E) = \infty$.

(a) 若 $0 < \gamma < \infty$，由[90] 得知存在满足(1.39) 的 E_1.

(b) 若 $\gamma=\infty$，取 E_1 满足：$h-m(E_1)=1$，其中 $h(s)=s^{\beta}/(\log\frac{1}{s})$，则 E_1 满足(1.39).

(c) 若 $\gamma=0$，取 E_1 满足：$\varphi-m(E_1)=1$，其中 $\varphi(s)=s^{\beta}\log\frac{1}{s}$，则 E_1 满足(1.39).

(2)(a) 若 $s^{\delta}\text{-}m(E)=\infty$，视现在的 δ 为(1)中的 β，由(1)得知存在 E_2 满足(1.40).

(b) 若 $s^{\delta}\text{-}m(E)=0$，取 $E_2=E$，则 E_2 满足(1.40).

(c) 若 $0<s^{\delta}\text{-}m(E)<\infty$，且 $\zeta=0$，则 $\psi-m(E)=\infty$，其中 $\psi(s)=s^{\delta}\log\frac{1}{s}$. 取 E_2 满足 $\psi\text{-}m(E_2)=1$，则 E_2 满足(1.40).

(d) 若 $0<s^{\delta}\text{-}m(E)<\infty$，且 $0<\zeta\leqslant s^{\delta}\text{-}m(E)$，由[23]的引理2和3得知存在 E_2 满足(1.40).

现在我们应用前述诸引理来证明定理1.1.

(1)(a) 若 $\alpha=\alpha(\{a_n\})=0$，由推论1.1，$S(\{a_n\})$ 中任一集合 A 的 $\dim(A)=0$，而 $E(\{a_n\})\in S(\{a_n\})$，故(1)成立.

(b) 若 $0=\beta<\alpha$，取 E 为可数集，则 $E\in S(\{a_n\})$，且 $\dim(E)=0=\beta$.

(c) 若 $0<\beta\leqslant\alpha$，则(1)的结果含于(2)，下面若能证(2)，则(1)随之得证.

(2)(a) 设 $\lambda(\alpha(\{a_n\},\{a_n\})>0$. 由引理1.6有：

$$s^{\alpha}\text{-}m(E(\{a_n\}))\geqslant\frac{1}{4}\lambda(\alpha,\{a_n\})>0,(\alpha=\alpha(\{a_n\})). \quad (1.41)$$

由(1.41)和推论1.1有：$\dim(E(\{a_n\}))=\alpha.$ (1.42)

所以应用引理1.7(1)和(2)于 $E(\{a_n\})$，存在闭集 F 使

$$F\subset E(\{a_n\}),\dim(F)=\beta,s^{\beta}\text{-}m(F)=\gamma. \quad (1.43)$$

虽然 F 未必属于 $S(\{a_n\})$(若 $F\in S(\{a_n\})$ 则定理1.1得证)，但下面将证明 F 与 $S(\{a_n\})$ 中的某个闭集 E 只差一个可数集，再注意(1.43)，则 E 即为定理1.1(2)所要找的闭集. 下面构造这样的闭集 E.

因为 F 是闭集，所以

$$(0,1)-F=\bigcup_{r=1}^{\infty}I_r,\ \{I_r\}\ \text{为两两不交的开区间}.$$

再令

$$(0,1)-E(\{a_n\})=\bigcup_{r=1}^{\infty}J_r,\ \{J_r\}\ \text{为两两不交的开区间}.$$

但是任何 I_r 的每一个端点均属于 $F\subset E(\{a_n\})$，而均不属于 $\bigcup_{r=1}^{\infty}J_r$. 因此，对任何正整数 r，只要 $I_r\cap J_s\neq\varnothing$，必有 $J_s\subset I_r$. 令 $\Gamma_r=\{s: J_s\cap I_r\neq\varnothing\}$，则 $I_r\supset\bigcup_{s\in\Gamma_r}J_s$，且 $\operatorname{diam}(I_r)=\sum_{s\in\Gamma_r}\operatorname{diam}(J_s)$.（谬设 $\operatorname{diam}(I_r)>\sum_{s\in\Gamma_r}\operatorname{diam}(J_s)$，则存在开区间 $G_r\subset I_r$，$\operatorname{diam}(G_r)>0$，$G_r\,\overline{\in}\,\{J_s: s=1,2,\cdots\}$，于是 $\mathscr{L}(\bigcup_{s=1}^{\infty}J_s)<1$，此为不可能.）

把 $\{J_s: s\in\Gamma_r\}$ 重排成一个紧邻的开区间的降序列，并令 P_r 是这些开区间的全体端点. 取

$$E=F\cup\bigcup_{r=1}^{\infty}P_r,$$

往证：E 即为所求. 事实上，由(1.43) 及 P_r 可数得：

$$s^\beta\text{-}m(E)=s^\beta\text{-}m(F)=\gamma,\ \dim(E)=\dim(F)=\beta. \tag{1.44}$$

而 $\bigcup_{r=1}^{\infty}P_r$ 的极限点在 F 中，若记 A' 为 A 的极限点集，则由 F 是闭集可知：

$$E'=F'\cup(\bigcup_{r=1}^{\infty}P_r)'\subset F\cup F=F\subset E, \tag{1.45}$$

所以 E 是闭集，再注意 F 及 $\bigcup_{r=1}^{\infty}P_r$ 的定义易证：$E\in S(\{a_n\})$.

(2)(b) 设 $\lambda(\alpha(\{a_n\}),\{a_n\})=0$. 由(1) 存在直线上的闭子集 F^*，使

$$\dim(F^*)=\alpha(\{a_n\}),F^*\in S(\{a_n\}).$$

把 F^* 替代(2)(a) 中的 $E(\{a_n\})$，再用引理 1.7(1) 和(2)，仍能找出直线上的闭集 F，使

$$F\subset F^*,\dim(F)=\beta,s^\beta\text{-}m(F)=\gamma, \tag{1.43$'$}$$

从而仍能找出定理 1.1(2) 中所要求的 E. 定理证毕.

定理 1.2 设 $\{a_n\}$ 如定理 1.1, $\alpha(\{a_n\})$、$\delta(\{a_n\})$ 分别如 (1.4)、(1.10) 所定义,则

$$0 \leqslant \alpha(\{a_n\}) \leqslant \delta(\{a_n\}) \leqslant 1. \tag{1.46}$$

证 $\alpha(\{a_n\}), \delta(\{a_n\}) \in [0,1]$ 显然成立,下面只证

$$\alpha(\{a_n\}) \leqslant \delta(\{a_n\}). \tag{1.47}$$

由于 $\delta(\{a_n\}) = \inf\{\beta > 0: \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\beta < \infty\}$,故为证(1.47),只需证:

$$\text{“}\beta > 0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\beta < \infty \Rightarrow \alpha(\{a_n\}) \leqslant \beta\text{”}. \tag{1.48}$$

谬设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\beta < \infty$, $\alpha(\{a_n\}) > \beta$,则由

$$\liminf_{m\to\infty} \alpha_m = \alpha(\{a_n\}), m\left(\frac{\sum_{n=m}^{\infty} a_n}{m}\right)^{\alpha_m} = 1$$

得知:∃ M,使 $\alpha_m > \beta$(当 $m \geqslant M$ 时),故

$$m\left(\frac{\sum_{n=m}^{\infty} a_n}{m}\right)^{\beta} \geqslant m\left(\frac{\sum_{n=m}^{\infty} a_n}{m}\right)^{\alpha_m} = 1, (m \geqslant M). \tag{1.49}$$

但是由 $\{a_n\}$ 的单调非升性知:

$$m\left(\frac{\sum_{n=m}^{\infty} a_n}{m}\right)^{\beta} \leqslant (ma_m^\beta)^{1-\beta}\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n^\beta\right)^\beta$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^\beta\right)^{1-\beta}\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n^\beta\right)^\beta, (\forall\, m \geqslant 1). \tag{1.50}$$

而由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\beta < \infty$ 得知(1.50) 右边当 $m \to \infty$ 时趋于 0,这与(1.49) 矛盾,所以定理 1.2 得证.

定义 1.2 设 $\{a_n\}$、$\alpha(\{a_n\})$、$\delta(\{a_n\})$ 如定理 1.2. 称 $\alpha(\{a_n\})$、$\delta(\{a_n\})$ 分别为 $\{a_n\}$ 的 Besicovitch − Taylor 下、上指标,简称之为 B-T 下、上指标.

定理 1.3 设$\{a_n\}$、$\alpha(\{a_n\})$、$\delta(\{a_n\})$如定义 1.2，$\underline{\dim}_K(\cdot)$和$\overline{\dim}_K(\cdot)$为第一章(4.1)和(4.2)中所定义的 Kolmogorov 下熵指数和上熵指数，则对任何$E \in S(\{a_n\})$，有

$$\alpha(\{a_n\}) = \underline{\dim}_K(E), \delta(\{a_n\}) = \overline{\dim}_K(E). \tag{1.51}$$

证明请参见[90]定理 1.

§2 随机广义 Cantor 集的维数

在这一节中，取概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P) = ([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \mathscr{L})^{\mathbb{N}}$，(此处$\mathscr{L}$是一维 Lebesgue 测度，$\mathscr{B}([0,1])$是$[0,1]$中的全体 Borel 子集，$\mathbb{N}$是自然数集，)$\{X_n, n = 1,2,\cdots\}$是$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的独立同分布随机变量序列，其公共分布为$[0,1]$上的均匀分布，$X_n(\omega) = \omega_n, \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots) \in \Omega, n \geqslant 1$. 对几乎所有的样本点$\omega$，在$\mathbb{N}$中存在一个随机偏序$<$如下：

$$m < n \Leftrightarrow \omega_m < \omega_n. \tag{2.1}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$，定义随机集

$$Q_n(\omega) = \{m \in \mathbb{N} : \omega_m < \omega_n\}. \tag{2.2}$$

仍设$\{a_n\}$是一个单调非升的其和为 1 的正数序列. 令

$$l_n = l_n(\omega) = \sum_{s \in Q_n(\omega)} a_s, \tag{2.3}$$

$$J_n = J_n(\omega) = (l_n(\omega), l_n(\omega) + a_n), \tag{2.4}$$

$$K = K(\omega) = [0,1] - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n(\omega)\right), \tag{2.5}$$

于是$K \in S(\{a_n\})$.

定理 2.1([90]) 在上述约定下，有

$$\dim(K(\omega)) = \alpha(\{a_n\}) \quad a.s. \tag{2.6}$$

此处$\dim(\cdot)$仍为 Hausdorff 维数，$\alpha(\{a_n\})$是 $B\text{-}T$ 下指标.

为证定理 2.1，先作一些准备工作. 定义随机测度υ_ω和m_ω(有时简记之为υ和m)如下：

$$v_\omega[0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{\omega_n}[0,t), t \in [0,1], \tag{2.7}$$

$$m_\omega(A) = \mathscr{L}(\{t : v_\omega[0,t) \in A\}), A \in \mathscr{B}([0,1]), \tag{2.8}$$

其中 $\delta_{\omega_n}(B) = 1$ 或 0 当 $\omega_n \in B$ 或 $\omega_n \overline{\in} B$. 显然, v_ω 是 $\mathscr{B}([0,1])$ 上的测度, m_ω 是 $\mathscr{B}([0,1])$ 上的测度且其支撑为 $K(\omega)$.

引理 2.1 设 $0 \leqslant a < a + h \leqslant 1, J = [a, a+h), \lambda(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, \varepsilon)$, v 如(2.7) 所定义, 则

$$e^{-2hs\lambda(\frac{1}{s})} \leqslant \mathbf{E}(e^{-sv(J)}) \leqslant e^{-\frac{1}{2}hs\lambda(\frac{1}{s})}, \tag{2.9}$$

$(h \leqslant \frac{1}{2}, s > 0)$.

证 用 v 的定义及 $\{X_n\}$ 的独立性且服从均匀分布可得:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(e^{-sv(J)}) &= \mathbf{E}(e^{-s\sum_n a_n \delta_{\omega_n}(J)}) \\
&= \mathbf{E}(e^{-s\sum_n a_n 1_J(X_n)}) \\
&= \prod_n \mathbf{E}(e^{-sa_n 1_J(X_n)}) \\
&= \prod_n \left(\int_J e^{-sa_n} P(X_n \in dx) + P(X_n \in [0,1] - J) \right) \\
&= \prod_n (he^{-sa_n} + (1-h)) \\
&= \prod_n \{1 - h(1 - e^{-sa_n})\}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

但是

$$1 - x \leqslant e^{-x}, (\forall\, x \in (-\infty, \infty)), \tag{2.11}$$

$$1 - \frac{1}{2}x \geqslant e^{-x}, (\forall\, x \in (0,1)), \tag{2.12}$$

以(2.11). (2.12) 代入(2.10) 得:

$$e^{-2h\sum_n (1-e^{-sa_n})} \leqslant \mathbf{E}(e^{-sv(J)}) \leqslant e^{-h\sum_n (1-e^{-sa_n})} \tag{2.13}$$

另一方面

$$\sum_n (1 - e^{-sa_n}) \leqslant s \sum_n \min(a_n, s^{-1}) = s\lambda(s^{-1}), \tag{2.14}$$

$$\sum_n (1 - e^{-sa_n}) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{sa_n < 1} sa_n + (1 - e^{-1}) \sum_{sa_n > 1} s \cdot s^{-1}$$

$$\geqslant \frac{1}{2} s\lambda(s^{-1}). \tag{2.15}$$

以(2.14)、(2.15) 代入(2.13) 即得(2.9).

现在来证明定理2.1. 因为$K(\omega) \in S(\{a_n\})$，所以，由推论1.1中(1.7) 式知:

$$0 \leqslant \dim(K(\omega)) \leqslant \alpha(\{a_n\}), (\forall\ \omega \in \Omega). \tag{2.16}$$

若$\alpha(\{a_n\}) = 0$，则由(2.16) 知定理2.1成立. 下设$\alpha(\{a_n\}) > 0$. 取$0 < \gamma < \gamma' < \alpha(\{a_n\})$.

由定理 1.3，有

$$\alpha(\{a_n\}) = \underline{\dim}_K(K(\omega)), (\forall\ \omega \in \Omega). \tag{2.17}$$

由 $\lambda(\cdot)$ 的定义，可取正数 $c > 0$，使

$$s\lambda(s^{-1}) \geqslant cs^{\gamma'}, (\forall\ s > 1). \tag{2.18}$$

因此，当 $0 \leqslant a < a + h \leqslant 1, h \leqslant \frac{1}{2}$ 时，有

$$\mathbf{E}(v[a, a + h))^{-\gamma} = \Gamma(\gamma)^{-1} \int_0^\infty s^{\gamma-1} \mathbf{E}(e^{-sv[a,a+h)}) ds, \tag{2.19}$$

但是

$$\int_0^1 s^{\gamma-1} \mathbf{E}(e^{-sv[a,a+h)}) ds$$

$$\leqslant \int_0^1 s^{\gamma-1} ds = \gamma^{-1}, \tag{2.20}$$

而由引理 2.1 与(2.18) 式有

$$\int_1^\infty s^{\gamma-1} \mathbf{E}(e^{-sv[a,a+h)}) ds$$

$$\leqslant \int_0^\infty s^{\gamma-1} e^{-\frac{1}{2}hcs^{\gamma'}} ds$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma/\gamma')}{\gamma' \Gamma(\gamma)} (\frac{1}{2} ch)^{-\gamma/\gamma'}. \tag{2.21}$$

以(2.20)、(2.21) 代入(2.19) 得知: 存在常数 $M = M(\gamma, \gamma')$，使

$$\mathbf{E}(v[a,a+h))^{-\gamma} \leqslant Mh^{-\gamma/\gamma'}, \quad \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant a < a+h \leqslant 1, \\ h \leqslant \frac{1}{2} \end{array}\right\}. \tag{2.22}$$

仍记 m_ω 为(2.8) 式所定义的 $\mathscr{B}([0,1])$ 上的随机测度，其支撑为 $K(\omega)$. 则由(2.8) 及(2.22) 有

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\int_0^1\int_0^1 |x-y|^{-\gamma} m_\omega(dx) m_\omega(dy)\right) \\
&= \int_0^1\int_0^1 \mathbf{E}(|v_\omega[0,s) - v_\omega[0,t)|^{-\gamma}) dsdt \\
&= \int_0^1\int_0^1 \mathbf{E}(v_\omega[s,t)^{-\gamma}) dsdt \\
&\leqslant M\int_0^1\int_0^1 |s-t|^{-\gamma/\gamma'} dsdt < \infty \quad (\because \gamma < \gamma').
\end{aligned} \tag{2.23}$$

由(2.23) 知

$$\int_0^1\int_0^1 |x-y|^{-\gamma} m_\omega(dx) m_\omega(dy) < \infty \quad a.s.. \tag{2.24}$$

注意：$m_\omega(\cdot)$ 是具有紧支撑 $K(\omega)$ 的 $\mathscr{B}([0,1])$ 上的有限 Borel 测度，所以由(2.24) 知 $K(\omega)$ 的 γ- 容度 $C_\gamma(K(\omega)) > 0 \quad a.s.$，从而 $K(\omega)$ 的容度维数

$$\dim_C(K(\omega)) \geqslant \gamma \quad a.s.. \tag{2.25}$$

(γ- 容度 $C_\gamma(K)$ 及容度维数 $\dim_C(K)$ 的定义请参见第一章定义 4.4.)

由于 $K(\omega)$ 是紧集，所以由第一章定理 4.5(Frostman 定理) 得知

$$\dim(K(\omega)) = \dim_C(K(\omega)) \geqslant \gamma \quad a.s., \tag{2.26}$$

由于 $\gamma \in (0, \alpha(\{a_n\}))$ 可任意，所以

$$\dim(K(\omega)) \geqslant \alpha(\{a_n\}) \quad a.s., \tag{2.27}$$

由(2.16) 和(2.27) 即得知定理 2.1 成立.

§3 随机 Cantor 集的 Hausdorff 测度

在本节中，沿袭 §2 的符号，且取定 $\{a_n\}$ 为 Cantor 序列$\{\frac{1}{3},$

$\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{27},\frac{1}{27},\frac{1}{27},\cdots\}.$

本节材料取自[105]. 令

$$\psi(s) = s^{\frac{1}{\alpha}}\left(\log\log\frac{1}{s}\right)^{1-\frac{1}{\alpha}}, \varphi(s) = s^{\alpha}\left(\log\log\frac{1}{s}\right)^{1-\alpha}, \tag{3.1}$$

$$\alpha = \log 2/\log 3. \tag{3.2}$$

我们将要证明:$K(\omega)$ 的确切测度函数是 $\varphi(s)$. 先证明一些引理.

引理3.1 设$\{a_n\}$是Cantor序列,$\lambda(\varepsilon) = \sum_n \min(a_n,\varepsilon)$,则对任何 $\varepsilon \in (0,1)$ 有

$$\frac{5}{6}\varepsilon^{1-\alpha} \leqslant \lambda(\varepsilon) \leqslant \frac{5}{2}\varepsilon^{1-\alpha}, \tag{3.3}$$

证 $\forall\ 0<\varepsilon<1$,均存在正整数n_0,使

$$3^{-n_0-1} < \varepsilon \leqslant 3^{-n_0}. \tag{3.4}$$

又因为由(3.4)有

$$\begin{aligned}\lambda(\varepsilon) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}\min(a_n,\varepsilon)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}\min(3^{-k},\varepsilon) = \sum_{a_i<\varepsilon}a_i + \sum_{a_i\geqslant\varepsilon}\varepsilon\\ &= \sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{3^k} + \sum_{k=1}^{n_0}2^{k-1}\varepsilon\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n_0} + (2^{n_0}-1)\varepsilon.\end{aligned} \tag{3.5}$$

注意:$2^n = 3^{\alpha n}$ 及(3.4)易见:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{1-\alpha} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{n_0(1-\alpha)} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n_0}\left(=\sum_{a_i<\varepsilon}a_i\right) = 3^{-n_0(1-\alpha)}\\ &\leqslant (3\varepsilon)^{1-\alpha} = \frac{3}{2}\varepsilon^{1-\alpha};\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\varepsilon^{1-\alpha} \leqslant \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n_0} &= \frac{2^{n_0-1}}{3^{n_0+1}} \leqslant 2^{n_0-1}\varepsilon\\ &\leqslant (2^{n_0}-1)\varepsilon\left(=\sum_{a_i\geqslant\varepsilon}\varepsilon\right) < 2^{n_0}\varepsilon = 3^{\alpha n_0}\varepsilon\end{aligned}$$

$$\leqslant \varepsilon^{1-\alpha}. \tag{3.7}$$

以(3.6)、(3.7) 代入(3.5) 即得引理 3.1.

引理 3.2 设 $K(\omega)$ 是(2.5) 中定义的随机Cantor 集：

$$K(\omega) = [0,1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n(\omega) = [0,1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} (t_n(\omega), t_n(\omega) + a_n), \tag{3.8}$$

$$N_n = \#\{1 \leqslant j \leqslant 2^n : I_{j,n} \cap K(\omega) \neq \varnothing\}, \tag{3.9}$$

$$I_{j,n} = [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}), 1 \leqslant j \leqslant 2^n,$$

则有

$$2^{n\alpha} \leqslant N_n \leqslant \frac{5}{2} \cdot 2^{n\alpha}, \alpha = \log 2/\log 3. \tag{3.10}$$

证 令 $q_n = \max\{m : a_m \geqslant \frac{1}{2^n}\}$，则由 N_n 及 $K(\omega)$ 之定义有

$$\begin{aligned} N_n &= 2^n - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^n} \mathbf{1}_{\{I_{j,n} \subset J_k\}} \\ &= 2^n - \sum_{k=1}^{q_n} \sum_{j=1}^{2^n} \mathbf{1}_{\{I_{j,n} \subset J_k\}}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

但是

$$2^n a_k - 1 \leqslant \sum_{j=1}^{2^n} \mathbf{1}_{\{I_{j,n} \subset J_k\}} \leqslant 2^n a_k, \tag{3.12}$$

再用引理 3.1 中(3.5) 及(3.6) （取 $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$）有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{q_n} 2^n a_k &= 2^n \sum_{a_k \geqslant \frac{1}{2^n}} a_k \leqslant 2^n [1 - \sum_{a_k < \frac{1}{2^n}} a_k] \\ &\leqslant 2^n [1 - 2^{-n(1-\alpha)}], \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{q_n} (2^n a_k - 1) &= 2^n \sum_{a_k \geqslant \frac{1}{2^n}} a_k - q_n \\ &\geqslant 2^n [1 - \sum_{a_k < \frac{1}{2^n}} a_k] - q_n \end{aligned}$$

$$\geqslant 2^n\left[1-\frac{3}{2}\cdot 2^{-n(1-\alpha)}\right]-q_n, \tag{3.14}$$

以(3.13)、(3.14)代入(3.12)再代入(3.11)得:

$$\begin{aligned}2^{n\alpha} &= 2^n - 2^n\left[1-2^{-n(1-\alpha)}\right] \leqslant 2^n - \sum_{k=1}^{q_n} 2^n a_k \\ &\leqslant N_n \leqslant 2^n - \sum_{k=1}^{q_n}(2^n a_k - 1) \\ &\leqslant 2^n - 2^n\left[1-\frac{3}{2}\cdot 2^{-n(1-\alpha)}\right] + q_n \\ &= \frac{3}{2}\cdot 2^{n\alpha} + q_n.\end{aligned} \tag{3.15}$$

而由(3.7)(取 $\varepsilon = 2^{-n}$)有

$$q_n 2^{-n} \leqslant 2^{-n(1-\alpha)},$$

即是 $q_n \leqslant 2^{n\alpha}$,以此代入(3.15)得

$$2^{n\alpha} \leqslant N_n \leqslant \frac{5}{2}\cdot 2^{n\alpha}.$$

引理3.3 对Cantor序列$\{a_n\}$而言,存在常数c_1及c_2及λ_0,使

$$\exp(-c_1\lambda^{-\gamma}) \leqslant P(\upsilon(J) < \lambda h^{\frac{1}{\alpha}}) \leqslant \exp(-c_2\lambda^{-\gamma}), \tag{3.16}$$

其中 $J = [0,h]$,$0 < \lambda \leqslant \lambda_0$,$\alpha = \log 2/\log 3$,$\gamma = \alpha/(1-\alpha)$.

证 由引理2.1知:

$$\begin{aligned}\exp(-2hs\lambda(s^{-1})) &\leqslant \mathbf{E}(\exp(-s\upsilon(J))) \\ &\leqslant \exp\left(-\frac{1}{2}hs\lambda(s^{-1})\right),\end{aligned} \tag{3.17}$$

其中 $\lambda(\varepsilon) = \sum_n \min(a_n,\varepsilon)$.

由引理3.1,有

$$\frac{5}{6}s^{\alpha-1} \leqslant \lambda(s^{-1}) \leqslant \frac{5}{2}s^{\alpha-1}. \tag{3.18}$$

由(3.17)、(3.18)得:

$$\exp(-5hs^\alpha) \leqslant \mathbf{E}(\exp(-s\upsilon(J))) \leqslant \exp\left(-\frac{5}{12}hs^\alpha\right), \tag{3.19}$$

因此由(3.19)右方不等式得:

$$P(v(J)<\lambda h^{\frac{1}{\alpha}})=P(\exp(-sv(J))>\exp(-s\lambda h^{\frac{1}{\alpha}}))$$
$$\leqslant\exp(s\lambda h^{\frac{1}{\alpha}})\mathbf{E}(\exp(-sv(J)))$$
$$\leqslant\exp(s\lambda h^{\frac{1}{\alpha}}-\frac{5}{12}hs^{\alpha}). \tag{3.20}$$

令

$$s=c_3\lambda^{-1/(1-\alpha)}h^{-1/\alpha},\text{其中 } c_3-\frac{5}{12}c_3^{\alpha}\equiv c_4<0,$$

则(3.20) 化为

$$P(v(J)<\lambda h^{\frac{1}{\alpha}})\leqslant\exp(c_4\lambda^{-\gamma}). \tag{3.21}$$

再用(3.19) 左方不等式得:

$$P(v(J)<\lambda h^{\frac{1}{\alpha}})\geqslant\int_{(\exp(-sv(J))>\exp(-s\lambda h^{\frac{1}{\alpha}}))}e^{-sv(J)}dP$$
$$\geqslant\mathbf{E}(e^{-sv(J)})-\int_{(\exp(-sv(J))\leqslant\exp(-s\lambda h^{\frac{1}{\alpha}}))}e^{-sv(J)}dP$$
$$\geqslant\mathbf{E}(e^{-sv(J)})-\exp(-s\lambda h^{\frac{1}{\alpha}})$$
$$\geqslant\exp(-5hs^{\alpha})-\exp(-s\lambda h^{\frac{1}{\alpha}}). \tag{3.22}$$

令

$$s=c_5\lambda^{-1/(1-\alpha)}h^{-\frac{1}{\alpha}},\text{其中}\quad 5c_5^{\alpha}=\frac{1}{2}c_5,$$

则

$$\exp(-5hs^{\alpha})-\exp(-s\lambda h^{\frac{1}{\alpha}})$$
$$=\exp(-5c_5^{\alpha}\lambda^{-\gamma})-\exp(-c_5\lambda^{-\gamma})$$
$$=\exp(-\frac{1}{2}c_5\lambda^{-\gamma})-\exp(-c_5\lambda^{-\gamma})$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\exp(-\frac{1}{2}c_5\lambda^{-\gamma})\qquad(\text{当 }\lambda\text{ 很小})$$
$$\geqslant\exp(-c_5'\lambda^{-\gamma}). \tag{3.23}$$

以(3.23) 代入(3.22) 得:

$$P(v(J)<\lambda h^{\frac{1}{\alpha}})\geqslant\exp(-c_5'\lambda^{-\gamma}). \tag{3.24}$$

取 $c_1=c_5'$, $c_2=-c_4$, 综合(3.21)、(3.24) 即得引理 3.3.

引理3.4 对(3.8) 中的随机Cantor 集 $K(\omega)$ 而言,若令 $I-$

$[0,h)$，$\alpha = \log 2/\log 3$，则当 $\lambda > 1$ 充分大而 h 充分小时有

$$\frac{1}{12}\lambda^{-\alpha} \leqslant P(\upsilon(J) > \lambda h^{\frac{1}{\alpha}}) \leqslant 4\lambda^{-\alpha}. \tag{3.25}$$

证 令 $q(t) = \max\{m : a_m \geqslant t\}$，注意

$$\upsilon(J) = \sum_i a_i \mathbf{1}_{\{0 \leqslant \omega_i < h\}}, \qquad (X_i(\omega) = \omega_i),$$

则由 $\{X_i\}$ 独立同分布（$[0,1]$ 上的均匀分布）有：

$$\begin{aligned} P(\upsilon(J) > \lambda h^{\frac{1}{\alpha}}) &\geqslant P\Big(\sum_{a_i \geqslant \lambda h^{\frac{1}{\alpha}}} a_i \mathbf{1}_{\{0 \leqslant \omega_i < h\}} > \lambda h^{\frac{1}{\alpha}}\Big) \\ &\geqslant P(\exists\, i \leqslant q(\lambda h^{\frac{1}{\alpha}}), \text{使 } \mathbf{1}_{\{0 \leqslant \omega_i < h\}} = 1) \\ &= 1 - (1-h)^{q(\lambda h^{\frac{1}{\alpha}})}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

但是，由(3.7)有(取那里的 $\epsilon = \lambda h^{\frac{1}{\alpha}}$，并注意 $\sum_{a_i \geqslant \epsilon} \epsilon = \epsilon q(\epsilon)$)

$$\frac{1}{6}\lambda^{-\alpha} h^{-1} \leqslant q(\lambda h^{\frac{1}{\alpha}}) \leqslant \lambda^{-\alpha} h^{-1}. \tag{3.27}$$

若注意 $e^{-2x} \leqslant 1 - x \leqslant e^{-x}$，$(0 < 2x < 1)$，则当 h 充分小时，由(3.26)及(3.27)可得

$$\begin{aligned} P(\upsilon(J) > \lambda h^{\frac{1}{\alpha}}) &\geqslant 1 - (1-h)^{\frac{1}{6}\lambda^{-\alpha} h^{-1}} \\ &\geqslant 1 - \exp\Big(\frac{1}{6}\lambda^{-\alpha}\Big) \geqslant \frac{1}{12}\lambda^{-\alpha}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

再证(3.25)的右方不等式. 令

$$Z_i = a_i \mathbf{1}_{\{0 \leqslant \omega_i < h\}},$$

则由 $\upsilon(J) = \sum_i a_i \delta_{\omega_i}[0,h) = \sum_i a_i \mathbf{1}_{\{0 \leqslant \omega_i < h\}} = \sum_i Z_i$

知：

$$\begin{aligned} &P(\upsilon(J) > \lambda h^{\frac{1}{\alpha}}) \\ &\qquad \leqslant P\Big(\sum_{a_i < s^{-1}} Z_i > \frac{\lambda}{2} h^{\frac{1}{\alpha}}\Big) + P\Big(\sum_{a_i \geqslant s^{-1}} Z_i > \frac{\lambda}{2} h^{\frac{1}{\alpha}}\Big). \end{aligned}$$

取 $s = 2\lambda^{-1} h^{-\frac{1}{\alpha}}$，仿(3.26)、(3.27)、(3.28)有

$$P\Big(\sum_{a_i \geqslant s^{-1}} Z_i > \frac{\lambda}{2} h^{\frac{1}{\alpha}}\Big)$$

$$\leqslant P(\exists\ i \leqslant q(s^{-1}), 使\ \mathbf{1}_{\{0\leqslant \omega_i < h\}} = 1)$$

$$= [1-(1-h)^{q(s^{-1})}] = 1-(1-h)^{q(\frac{1}{2}\lambda h^{\frac{1}{\alpha}})}$$

$$\leqslant 1-(1-h)^{2^{\alpha}h^{-1}\lambda^{-\alpha}} \leqslant 1-\exp(-2^{\alpha+1}\lambda^{-\alpha})$$

$$\leqslant 2^{\alpha+1}\lambda^{-\alpha}. \tag{3.29}$$

又

$$P\Big(\sum_{a_i<s^{-1}} Z_i > \frac{\lambda}{2}h^{\frac{1}{\alpha}}\Big)$$

$$\leqslant \exp(-t\frac{\lambda}{2}h^{\frac{1}{\alpha}})\mathbf{E}(\exp(t\sum_{a_i<s^{-1}} Z_i)), \tag{3.30}$$

且由 $\{X_i\}$ 独立同分布(从而 $\{Z_i\}$ 亦然)得

$$\mathbf{E}(\exp(t\sum_{a_i<s^{-1}} Z_i))$$

$$= \prod_{a_i<s^{-1}} (1+h(e^{ta_i}-1))$$

$$\leqslant \exp(h\sum_{a_i<s^{-1}}(e^{ta_i}-1)) \quad (\because 1+x<e^x, \forall\ x>0)$$

$$\leqslant \exp(2h\sum_{a_i<s^{-1}} ta_i), (\because e^x-1\leqslant 2x, \forall\ 0<x<1)$$

$$\overset{(3.6)}{\leqslant} \exp(3hts^{\alpha-1}). \tag{3.31}$$

令 $t=h^{-\frac{1}{\alpha}}, s=2h^{-\frac{1}{\alpha}}\lambda^{-1}$,由(3.30)、(3.31)得:

$$P\Big(\sum_{a_i<s^{-1}} Z_i > \frac{\lambda}{2}h^{\frac{1}{\alpha}}\Big)$$

$$\leqslant \exp(-\frac{1}{2}t\lambda h^{\frac{1}{\alpha}} + 3hts^{\alpha-1})$$

$$\leqslant \exp(-\frac{1}{2}\lambda + 3\cdot(\frac{\lambda}{2})^{1-\alpha})$$

$$\leqslant (2-2^{\alpha})\lambda^{-\alpha}, (当\ \lambda\ 充分大). \tag{3.32}$$

由(3.29)及(3.32)得:

$$P(v(J) > \lambda h^{\frac{1}{\alpha}})$$

$$\leqslant P\Big(\sum_{a_i \geqslant s^{-1}} Z_i > \frac{\lambda}{2} h^{\frac{1}{\alpha}}\Big) + P\Big(\sum_{a_i < s^{-1}} Z_i > \frac{\lambda}{2} h^{\frac{1}{\alpha}}\Big)$$

$$\leqslant (2^{\alpha+1} + 2 - 2^{\alpha})\lambda^{-\alpha}$$

$$\leqslant 4\lambda^{-\alpha}.$$

引理 3.4 证毕.

引理3.5 令 $\alpha = \log 2/\log 3, \psi(s) = s^{\frac{1}{\alpha}}(\log\log\frac{1}{s})^{1-\frac{1}{\alpha}}, h_k = \exp(-k^{1+\delta}), J_k = [0, h_k)$，则存在正常数 c_7 及 M 和正整数 m_0 使 $m \geqslant m_0$ 时有

$$P(\bigcap_{k=m}^{2m+2}\{\upsilon(J_k) \geqslant (M+2)\psi(h_k)\})$$

$$\leqslant \exp(-m^{c_7}). \tag{3.33}$$

证 令 $r_k = q(\psi(h_k)), q(\cdot)$ 如引理 3.4 所定义，$(k = 1, 2, \cdots)$，再令

$$S_m^{(i)} = \{\sum_{j=r_{m+2i-1}+1}^{r_{m+2i+1}} a_j \mathbf{1}_{\{0 \leqslant \omega_j < h_{m+2i}\}} \geqslant M\psi(h_{m+2i})\},$$

$$T_m^{(i)} = \{\sum_{j=1}^{r_{m+2i-1}} a_j \mathbf{1}_{\{0 \leqslant \omega_j < h_{m+2i}\}} \geqslant \psi(h_{m+2i})\},$$

$$R_m^{(i)} = \{\sum_{j=r_{m+2i+1}+1}^{\infty} a_j \mathbf{1}_{\{0 \leqslant \omega_j < h_{m+2i}\}} \geqslant \psi(h_{m+2i})\},$$

$$S_m = \bigcap_{i=1}^{[m/2]} S_m^{(i)}, T_m = \bigcup_{i=1}^{[m/2]} T_m^{(i)}, R_m = \bigcup_{i=1}^{[m/2]} R_m^{(i)},$$

可以证明(注意 $\upsilon(J_k) = \sum_i a_i \mathbf{1}_{\{0 \leqslant \omega_i < h_k\}}$)

$$P(\bigcap_{k=m}^{2m+2}\{\upsilon(J_k) \geqslant (M+2)\psi(h_k)\})$$

$$\leqslant P(\bigcap_{i=1}^{[m/2]}\{\upsilon(J_{m+2i}) \geqslant (M+2)\psi(h_{m+2i})\})$$

$$\leqslant P(\bigcap_{i=1}^{[m/2]}\{\sum_{j=1}^{r_{m+2i+1}} a_j \mathbf{1}_{\{0 \leqslant \omega_j < h_{m+2i}\}} \geqslant (M+1)\psi(h_{m+2i})\}) + P(R_m)$$

$$\leqslant P(S_m) + P(T_m) + P(R_m). \tag{3.34}$$

(在(3.34)的推导中，两次地用到了：

$$\bigcap_i\{\xi_i+\eta_i\geqslant\alpha_i+\beta_i\}\subset\bigcap_i(\{\xi_i\geqslant\alpha_i\}\cup\{\eta_i\geqslant\beta_i\})$$
$$\subset(\bigcap_i\{\xi_i\geqslant\alpha_i\})\cup(\bigcup_i\{\eta_i\geqslant\beta_i\}).$$

现在我们逐项估计(3.34)右边的三个概率. 由$\{S_m^{(i)},i=1,2,\cdots\}$的相互独立性可知

$$P(S_m)=\prod_{i=1}^{[m/2]}P(S_m^{(i)})$$
$$\leqslant\prod_{i=1}^{[m/2]}(1-P(\upsilon(J_{m+2i})<M\psi(h_{m+2i})))$$
$$\leqslant\exp[-\sum_{i=1}^{[m/2]}P(\upsilon(J_{m+2i})<M\psi(h_{m+2i}))].\qquad(3.35)$$

选M使$c_8-c_7M^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}(1+\delta)<\frac{1}{2}$,再应用引理3.3可得

$$P(S_m)\leqslant\exp(-[m/2](2m)^{-c_8})$$
$$\leqslant\exp(-m^{c_9}),(0<c_9<1).\qquad(3.36)$$

对于$P(T_m)$,显然有

$$P(T_m^{(i)})\leqslant P(\exists\ j\leqslant r_{m+2i-1},\text{使}\ \mathbf{1}_{\{0\leqslant\omega_j<h_{m+2i}\}}=1)$$
$$\leqslant r_{m+2i-1}h_{m+2i}.\qquad(3.37)$$

而由q和r_k的定义及(3.7)(取那里的$\varepsilon=\psi(h_k)$)有:

$$r_k=q(\psi(h_k))\leqslant\psi(h_k)^{-1}\sum_{a_i\geqslant\psi(h_k)}\psi(h_k)$$
$$\leqslant\psi(h_k)^{-1}(\psi(h_k))^{1-\alpha}=\psi(h_k)^{-\alpha}$$
$$\leqslant c_{10}[\exp(k^{1+\delta})]\cdot(\log k)^{1-\alpha}.\qquad(3.38)$$

(注意$\alpha=\log2/\log3,\psi(h_k)$

$$=\exp(-\frac{1}{\alpha}k^{1+\delta})\cdot[(1+\delta)\log k]^{1-\frac{1}{\alpha}})$$

由(3.38)及h_k之定义得

$$r_{m+2i-1}\cdot h_{m+2i}\leqslant c_{10}\exp[(m+2i-1)^{1+\delta}]\cdot$$
$$[\log(m+2i-1)]^{1-\alpha}\cdot\exp[-(m+2i)^{1+\delta}]$$
$$\leqslant c_{10}\exp[-(m+2i-1)^{\delta}]\cdot[\log(m+2i-1)]^{1-\alpha}$$
$$\leqslant\exp[-(m+2i-1)^{\delta_0}],(\text{对某个}\ 0<\delta_0<\delta).\qquad(3.39)$$

所以用(3.39)代入(3.37)知存在常数 $c_{12}>0$ 使

$$P(T_m) \leqslant \sum_{i=1}^{[m/2]} P(T_m^{(i)}) \leqslant \exp(-m^{c_{12}}). \tag{3.40}$$

最后，估计 $P(R_m)$. 由 $R_m^{(i)}$ 的定义有

$$\begin{aligned} P(R_m^{(i)}) \leqslant \exp(&-\psi(h_{m+2i+1})^{-1}\psi(h_{m+2i})) \\ &\cdot \mathbf{E}(\exp(\psi(h_{m+2i+1})^{-1}\sum_{j=r_{m+2i+1}+1}^{\infty} a_j \mathbf{1}_{\{0\leqslant\omega_j<h_{m+2i}\}})). \end{aligned} \tag{3.41}$$

再用 $\psi(s)$ 和 h_k 的定义以及(3.31)(取(3.31)中的 $t=\psi(h_{m+2i+1})^{-1}$)，则(3.41)化为

$$\begin{aligned} P(R_m^{(i)}) &\leqslant \exp\{-[\exp(\frac{1}{\alpha}((m+2i+1)^{1+\delta} \\ &-(m+2i)^{1+\delta}))]\cdot[\log(m+2i)/\log(m+2i+1)]^{1-\frac{1}{\alpha}}\} \\ &\quad \cdot \exp\{3h_{m+2i}\psi(h_{m+2i+1})^{-\alpha}\} \\ &\leqslant \exp\{-[\exp(\frac{1}{\alpha}((m+2i+1)^{1+\delta}-(m+2i)^{1+\delta}))] \\ &\quad \cdot [\log(m+2i)/\log(m+2i+1)]^{1-\frac{1}{\alpha}}\} \\ &\quad \cdot \exp\{3\exp[-(m+2i)^{1+\delta}] \\ &\quad \cdot [\exp((m+2i+1)^{1+\delta}) \\ &\quad \cdot (1+\delta)\log(m+2i+1)^{1-\alpha}]\} \\ &\leqslant \exp(-\frac{1}{2}\exp((m+2i)^{\delta})) \\ &\leqslant \exp(-(m+2i)^{\delta}),(1\leqslant i\leqslant[\frac{m}{2}],m\text{ 充分大}). \end{aligned} \tag{3.42}$$

由(3.42)得

$$P(R_m) \leqslant \sum_{i=1}^{[m/2]} P(R_m^{(i)}) \leqslant \exp(-m^{\delta_1}), \tag{3.43}$$

(对某个 $0<\delta_1<\delta$, m 充分大).

把(3.36)、(3.40)、(3.43)代入(3.34)得知引理3.5成立.

附注 3.1 事实上，还有

$$P(\bigcap_{k=m}^{T}\{\upsilon(J_k)\geqslant(M+2)\psi(h_k)\})\leqslant\exp(-m^{c_{14}}),$$

$c_{14}>0$ 是常数，$(\forall\ T\geqslant 2m+2, m\geqslant m_0)$.　(3.44)

推论 3.1　令 $h_k=\exp(-k^{1+\delta}), u_k=(M+2)\psi(h_k), J_k=[0,h_k), J_k'=[0,u_k), D_k=\{\upsilon_\omega(J_k)\geqslant u_k\}, D_k'=\{m_\omega(J_k')<(2(M+2))^{-\alpha}\varphi(u_k)\}$，此处 υ_ω 与 m_ω 如(2.7)、(2.8) 所定义，则

$$P(\bigcap_{k=m}^{T}D_k')\leqslant\exp(-T^{c_{15}}), (T\geqslant 2m+2, m\geqslant m_0).\quad(3.45)$$

其中 $c_{15}>0$ 是常数.

证　因为

$$\begin{aligned}\varphi(u_k)&=u_k^\alpha(\log\log\frac{1}{u_k})^{1-\alpha}\\&=(M+2)^\alpha\psi(h_k)^\alpha\left(\log\log\frac{1}{(M+2)\psi(h_k)}\right)^{1-\alpha}\\&=(M+2)^\alpha h_k\left(\log\log\frac{1}{h_k}\right)^{\alpha-1}\left(\log\log\frac{1}{(M+2)\psi(h_k)}\right)^{1-\alpha}\\&\leqslant(M+2)^\alpha h_k\left(\log\log\frac{1}{h_k}\right)^{\alpha-1}\left(2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\log\log\frac{1}{h_k}\right)^{1-\alpha}\\&=2^\alpha(M+2)^\alpha h_k,\end{aligned}\quad(3.46)$$

所以

$$D_k'\subset\{m_\omega[0,u_k)<h_k\}\subset D_k,$$

因此由附注 3.1 有

$$P(\bigcap_{k=m}^{T}D_k')\leqslant\exp(-T^{c_{15}}), (T\geqslant 2m+2, m\geqslant m_0).$$

下面我们证明有关测度 m_ω 的一个密度定理.

定理 3.1　存在正常数 c_{16}、c_{17} 使

$$c_{16}\leqslant\limsup_{h\downarrow 0}\frac{m_\omega[0,h)}{\varphi(h)}\leqslant c_{17}\quad a.s.,\quad(3.47)$$

证　取 $h_k=2^{-k}, k=1,2,\cdots$，由引理 3.3 有

$$\begin{aligned}P(\upsilon[0,h_k)<c_{18}\psi(h_k))&\leqslant\exp(-c_2c_{18}^{-\gamma}\log\log 2^k)\\&\leqslant c_{18}'k^{-c_2c_{18}^{-\gamma}},\end{aligned}\quad(3.48)$$

其中 $c_{18}' = [\log 2]^{-c_{18}}$，$\gamma = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$.

选 c_{18} 使 $c_2 c_{18}^{\gamma} > 1$，则由(3.48)有

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\upsilon[0,h_k) < c_{18}\psi(h_k))$$

$$\leqslant c_{18}' \sum_{k=1}^{\infty} k^{-c_2 c_{18}^{-\gamma}} < \infty.$$

因此，由 Borel-Cantelli 引理知：

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\upsilon[0,h_k)}{\psi(h_k)} \geqslant c_{18} \quad a.s.. \tag{3.49}$$

但是，对每一个小 h，存在 k，使 $h_k \leqslant h < h_{k-1}$，所以

$$\frac{\upsilon[0,h)}{\psi(h)} \geqslant \frac{\psi(h_k)}{\psi(h)} \frac{\upsilon[0,h_k)}{\psi(h_k)} \geqslant \frac{1}{2} \frac{\upsilon[0,h_k)}{\psi(h_k)}. \tag{3.50}$$

因此由(3.49)及(3.50)有

$$\liminf_{h\to 0} \frac{\upsilon[0,h)}{\psi(h)} \geqslant \frac{1}{2} c_{18} > 0 \quad a.s.. \tag{3.51}$$

但是，当 h 很小时，$\varphi\circ\psi(h)$ 与 $\psi\circ\varphi(h)$ 皆靠近 h，所以由(3.51)及 υ 和 m(υ_ω 和 m_ω)的定义知：

$$\limsup_{h\to 0} \frac{m_\omega[0,h)}{\varphi(h)} < c_{19} < \infty \quad a.s.. \tag{3.52}$$

现在另取 u_k 及 $J_k' = [0,u_k)$ 和 D_k' 如推论 3.1，则由推论 3.1 有

$$P\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} D_k'\Big) = 0.$$

故

$$\limsup_{h\to 0} \frac{m_\omega[0,h)}{\varphi(h)} \geqslant \limsup_{k\to\infty} \frac{m_\omega(J_k')}{\varphi(u_k)}$$

$$\geqslant [2(M+2)]^{-\alpha}, \quad a.s. \tag{3.53}$$

由(3.52)、(3.53)即得定理 3.1.

定理 3.2 对 $a.s.$ 的 ω，$K(\omega)$ 的确切测度函数是 $\varphi(s)$. 即是存在正常数 c_{20} 和 c_{21}，使

$$c_{20} \leqslant \varphi - m(K(\omega)) \leqslant c_{21} \quad a.s.. \tag{3.54}$$

证 令

$$\Gamma = \{(t,\omega) \in [0,1] \times \Omega: \quad \limsup_{h \to 0} \frac{m_\omega[v[0,t) + h)}{\varphi(h)} < c_{19}\},$$

$$\Delta(\omega) = \{t \in [0,1]: (t,\omega) \in \Gamma\},$$

则由定理 3.1 及 Fubini 定理有

$$m_\omega(\Delta(\omega)) = 1, \qquad a.s.,$$

而 m_ω 的支撑为 $K(\omega)$，所以

$$m_\omega(K(\omega) \cap \Delta(\omega)) = 1. \qquad a.s.. \tag{3.55}$$

再用第一章定理 2.3（密度定理）及(3.52) 有

$$\begin{aligned} \varphi - m(K(\omega)) &\geqslant \varphi - m(K(\omega) \cap \Delta(\omega)) \\ &\geqslant \frac{1}{c_{19}} m_\omega(K(\omega) \cap \Delta(\omega)) = \frac{1}{c_{19}} > 0 \quad a.s., \end{aligned} \tag{3.56}$$

(3.54) 式的第一个不等式证毕.

下证(3.54) 式的第二个不等式：

我们首先考虑 $K(\omega)$ 的覆盖的结构. 令 $\Lambda_k = \{[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}): j = 1,2,\cdots\}$. 给定 $\varepsilon > 0$，选 k_0 使 $2^{-k_0} < \min(\frac{\varepsilon}{2}, u_{m_0})$，($m_0$ 和 u_k 的定义请见引理 3.5 和推论 3.1). 取 $m' > m_0$ 使 $u_{m'} < 2^{-k_0}$. 令

$$M_n = \max\{k: u_k \geqslant 2^{-n-1}\}, n = 1,2\cdots,$$

显然 $M_n \uparrow \infty$，所以可取 n 充分大，使

$$M_n > 2m' + 2, \text{且 } n > k_0. \tag{3.57}$$

由 u_k 及 M_n 的定义知：存在 $c_{22} > 0$ 使

$$M_n^{c_{15}} > n^{c_{22}}, (\text{当 } n \text{ 充分大}). \tag{3.58}$$

令 $I_{j,n} = [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n})$. 称区间 $I_{j,n}$ 关于样本点 ω 是“坏区间”，如果它满足：

(1) $K(\omega) \cap I_{j,n} \neq \varnothing$；

(2) $\bigcup_{k=k_0}^{n} \Lambda_k$ 中没有满足下列两条件的区间 $[a,b)$：(i) $[a,b) \supset K(\omega) \cap I_{j,n}$；(ii) $\frac{m_\omega[a,b)}{\varphi(b-a)} \geqslant \frac{d}{4}, d = (2(M+2))^{-\alpha}$.

不是坏区间者就称为“好区间”. 若 $I_{j,n}$ 是好区间，必有

$[a_{j,n},b_{j,n})\in\bigcup_{k=k_0}^{n}\Lambda_k$，使

$$m_\omega[a_{j,n},b_{j,n})(\varphi(b_{j,n}-a_{j,n}))^{-1}\geqslant\frac{1}{4}d,\tag{3.59}$$

$$[a_{j,n},b_{j,n})\supset K(\omega)\cap I_{j,n}.\tag{3.60}$$

注意：$a_{j,n},b_{j,n}$ 一般依赖于 ω.

令 $\mathscr{F}_n(\omega)=\{[a_{j,n},b_{j,n})$：它满足(3.59)、(3.60)，且每个好区间只被一个$[a_{j,n},b_{j,n})$ 所覆盖$\}$，则 $\varepsilon_n(\omega)=\{$一切坏区间 $I_{j,n}\}\cup\mathscr{F}_n(\omega)$ 是$K(\omega)$ 的一个覆盖.

下面首先证明：覆盖 $\varepsilon_n(\omega)$ 中由全部坏区间所提供的测度份额是小的，即要证明对几乎所有的 ω，均存在 $n_0=n_0(\omega)$，当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\sum\nolimits_n^{(\omega)}\equiv T_n(\omega)\varphi(\frac{1}{2^n})\leqslant\frac{1}{n},\tag{3.61}$$

其中 $T_n=T_n(\omega)$ 是相应于样本点 ω 的坏区间的个数.

事实上，若 $K(\omega)\cap I_{j,n}\neq\varnothing$，令 $s_j=\inf\{t\geqslant\frac{j-1}{2^n}:t\in K(\omega)\}$，由于$K(\omega)$ 是紧集，故 $s_j\in K(\omega)$. 令 $B_{k,j}=\{\omega:m_\omega[s_j,s_j+u_k)(\varphi(u_k))^{-1}<d\}$，$k=m',m'+1,\cdots,M_n$，$u_k$之定义见定理3.1.

由于$\{m_\omega[s_j,s_j+u_k)\}$ 与$\{m_\omega[0,u_k)\}$ 同分布，所以由推论3.1及(3.58)知

$$\begin{aligned}P(\bigcap_{k=m'}^{M_n}B_{k,j})&=P(\bigcap_{k=m'}^{M_n}D_k')\\&\leqslant\exp(-M_n^{c_{15}})\leqslant\exp(-n^{c_{22}}).\end{aligned}\tag{3.62}$$

设 $\omega\overline{\in}\bigcap_{k=m'}^{M_n}B_{k,j}$，则由 $B_{k,j}$ 之定义知：至少存在一个 k，使

$$m_\omega[s_j,s_j+u_k)(\varphi(u_k))^{-1}\geqslant d.\tag{3.63}$$

因为由 s_j 的定义知：$\bigcup_{k=k_0}^{n}\Lambda_k$ 中有一个区间$[a,b)(b-a\leqslant 4u_k)$能盖住$[s_j,s_j+u_k)$. 再注意 $\varphi(4h)\leqslant 4\varphi(h)$（当 h 充分小），则可知：

$$\frac{m_\omega[a,b)}{\varphi(b-a)}\geqslant\frac{m_\omega[s_j,s_j+u_k)}{\varphi(4u_k)}\geqslant\frac{1}{4}\,\frac{m_\omega[s_j,s_j+u_k)}{\varphi(u_k)}$$

$$\geqslant \frac{1}{4}d.$$

所以 $I_{j,n}$ 关于 ω 是好区间，从而

$$P(\{\omega: I_{j,n} \text{ 关于 } \omega \text{ 是坏区间}\}) \leqslant P(\bigcap_{k=m'}^{M_n} B_{k,j}). \tag{3.64}$$

令 $N_n = \#\{1 \leqslant j \leqslant 2^n : I_{j,n} \cap K(\omega) \neq \varnothing\}$ 是 $\{I_{j,n}\}$ 中被 $K(\omega)$ 击中的区间个数，则由引理 3.2 有

$$N_n \leqslant \frac{5}{2} 2^{n\alpha}. \tag{3.65}$$

所以由(3.65)、(3.64)、(3.62) 有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(T_n) &\leqslant \frac{5}{2} \cdot 2^{n\alpha} \sup_j P(\bigcap_{k=m'}^{M_n} B_{k,j}) \\ &\leqslant \frac{5}{2} \cdot 2^{n\alpha} \exp(-nc_{22}).\end{aligned} \tag{3.66}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\sum\nolimits_n) &= E\left(T_n \varphi(\frac{1}{2^n})\right) \\ &\leqslant c_{23} (\log n)^{1-\alpha} \exp(-n^{c_{22}}),\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}P(\sum\nolimits_n > \frac{1}{n}) &\leqslant c_{23}(\log n)^{1-\alpha} n \cdot \exp(-n^{c_{22}}) \\ &\leqslant \exp(-n^{c_{24}}), (c_{24} > 0),\end{aligned} \tag{3.67}$$

从而，由 Borel-Cantelli 引理可推出：对几乎所有的 ω，均存在 $n_0 = n_0(\omega)$，当 $n \geqslant n_0$ 时，有 $\sum_n(\omega) \leqslant \frac{1}{n}$. (3.61) 得证.

显然

$$\begin{aligned}&\sum_{[a_{j,n}, b_{j,n}) \in \mathscr{F}_n(\omega)} m_\omega[a_{j,n}, b_{j,n}) \\ &\leqslant 2m_\omega[0,1) \leqslant 2,\end{aligned} \tag{3.68}$$

所以由(3.59)(3.68) 得

$$\sum_{[a_{j,n}, b_{j,n}) \in \mathscr{F}_n(\omega)} \varphi[b_{j,n} - a_{j,n}) \leqslant \frac{4}{d} \cdot 2 = \frac{8}{d}. \tag{3.69}$$

由(3.61)、(3.69) 得知对几乎所有的 ω 有：

$$\sum_{A_i \in \xi_n(\omega)} \varphi(\operatorname{diam}(A_i)) \leq \frac{1}{n} + \frac{8}{d}, (n \geq n_0).$$

所以

$$\varphi - m(K(\omega)) \leq \frac{8}{d} \quad a.s.$$

取 $c_{21} = 8/d$,即得证定理3.2.

§4 随机Cantor集的Packing测度

如不特别声明,本节符号均沿袭§3.本节材料取自[106].

仍取概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P) = ([0,1],\mathscr{B}([0,1]),L)^{\mathbb{N}}$,$\{X_n,n=1,2,\cdots\}$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的独立同分布随机变量序列,其公共分布为$[0,1]$上的均匀分布,$X_n(\omega)=\omega_n$,$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots)\in\Omega$,$n\geq 1$. Y_n是$(-X_n)$的独立的复制,$(n=1,2,\cdots)$.

任取$t\in[0,1]$,定义

$$v^{(2)}(-t,0] = \sum_i a_i \mathbf{1}_{(-t<Y_i\leq 0)}, \tag{4.1}$$

其中$\{a_i\}$是Cantor序列. 再令

$$m(r) = m_1(r) + m_2(r), \tag{4.2}$$

其中

$$m_1(r) = \int_0^1 \mathbf{1}_{B(0,r)}(v[0,t))dt, \tag{4.3}$$

$$m_2(r) = \int_0^1 \mathbf{1}_{B(0,r)}(v^{(2)}(-t,0])dt, \tag{4.4}$$

其中v是(2.7)所定义的随机测度,$v^{(2)}$是(4.1)所定义的随机测度,$B(x,r)$是以x为中心以r为半径之开球(此处是开区间).

易证:$m_1(r)$、$m_2(r)$分别为$v[0,t)$和$v^{(2)}(-t,0]$在$B(0,r)$的总逗留时间,$m_1(r)$与$m_2(r)$独立同分布.

定理4.1 令$g(s)=s^{\alpha}f(s)$,$f(s)$单增右连续且$1\leq f(2s)/f(s)\leq K_f<\infty$,$(\forall s\geq 0)$,$f(0+)=0$,$\alpha=\log 2/\log 3$,则

$$\liminf_{r\downarrow 0} \frac{m_1(r)+m_2(r)}{g(2r)} = \begin{cases} 0 & a.s. \\ \infty & a.s. \end{cases} \tag{4.5}$$

依据

$$\int_{0+} \frac{|f(s)^2|}{s} ds = \begin{cases} = \infty \\ < \infty \end{cases} \tag{4.6}$$

来判定.

证 (1) 首先令 $\int_{0+} \frac{|f(s)^2|}{s} ds < \infty$. 固定 $a > 0$, 定义

$$E_{a,n} = \{\omega \in \Omega : m_1(2^{-n}) + m_2(2^{-n}) < ag(2^{-n+1})\},$$

$$D_{i,a,n} = \{\omega \in \Omega : m_i(2^{-n}) < ag(2^{-n+1})\}, i = 1, 2.$$

则 $D_{1,a,n}$ 与 $D_{2,a,n}$ 相互独立且概率相同,

$$E_{a,n} \subset D_{1,a,n} \cap D_{2,a,n}, \tag{4.7}$$

而且由引理 3.4 有

$$P(D_{i,a,n}) = P(\{\omega \in \Omega : v[0, ag(2^{-n+1})) > 2^{-n}\})$$

$$\overset{\text{引理3.4}}{\approx} c'_{23} f(2^{-n}), (i = 1, 2). \tag{4.8}$$

所以, 由(4.7)、(4.8) 及 $\int_{0+} |f(s)^2|/s \quad ds < \infty$ 得

$$\sum_n P(E_{a,n}) \leqslant c'_{24} \sum_n |f(2^{-n})|^2 < \infty. \tag{4.9}$$

因此, 由 Borel-Cantelli 引理可推出:

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{m_1(r) + m_2(r)}{g(2r)} = \infty \quad a.s. \tag{4.10}$$

(2) 再设

$$\int_{0+} \frac{|f(s)|^2}{s} ds = \infty.$$

令

$$E^c_{a,n} = \Omega - E_{a,n}, D^c_{i,a,n} = \Omega - D_{i,a,n}, (i = 1, 2),$$

则由(4.7) 有

$$E^c_{a,n} \supset D^c_{1,a,n} \cap D^c_{2,a,n}. \tag{4.11}$$

再令

$$H_{1,a,2m} = \left\{ \sum_{2^{-2m} \leqslant a_i < 2^{-2m+2}} a_i \mathbf{1}_{\{0 \leqslant X_i < ag(2^{-2m})\}} \geqslant 2^{-2m} \right\},$$

$$H_{2,a,2m} = \left\{ \sum_{2^{-2m} \leqslant a_i < 2^{-2m+2}} a_i \mathbf{1}_{\{-ag(2^{-2m}) < Y_i \leqslant 0\}} \geqslant 2^{-2m} \right\},$$

(此处至本定理完，m 是正整数流动指标，而非(2.8)式所定义的随机测度 m_ω)，若注意

$$D^c_{1,a,2m} = \{v[0, ag(2^{-2m+1})) > 2^{-2m}\}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbf{1}_{\{0 \leqslant X_i < ag(2^{-2m+1})\}} > 2^{-2m} \right\}, \tag{4.12}$$

则可知

$$H_{1,a,2m} \subset D^c_{1,a,2m},$$

仿之，

$$H_{2,a,2m} \subset D^c_{2,a,2m}.$$

显然，$H_{1,a,2m}$ 与 $H_{2,a,2m}$ 独立. 令

$$q_m = \max\{k : a_k \geqslant 2^{-m}\}, \tag{4.13}$$

则

$$\frac{1}{3} \cdot 2^{m\alpha} \leqslant q_m \leqslant 2^{m\alpha}. \tag{4.14}$$

下面我们来估计 $P(H_{i,a,2m})$ 的下界. 注意(4.13)、(4.14)得：

$$\begin{aligned}
&P(H_{1,a,2m}) \\
&\geqslant P(\exists\, q_{2m-2} < i \leqslant q_{2m}, \text{使 } \mathbf{1}_{\{0 \leqslant X_i < -ag(2^{-2m})\}} = 1) \\
&\overset{\{X_i\}\text{独立}}{=} 1 - (1 - ag(2^{-2m}))^{q_{2m} - q_{2m-2}} \\
&\geqslant 1 - (1 - ag(2^{-2m}))^{\frac{1}{3} \cdot 2^{2m\alpha} - \frac{1}{2} \cdot 2^{(2m-2)\alpha}} \\
&= 1 - (1 - ag(2^{-2m}))^{\beta_{m,\alpha}},
\end{aligned} \tag{4.15}$$

其中

$$\begin{aligned}
\beta_{m,\alpha} &= \frac{1}{3} \cdot 2^{2m\alpha} - \frac{1}{2} \cdot 2^{(2m-2)\alpha} \\
&= (2^{-2m})^{\alpha} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2^{-2\alpha} \right) \\
&= (ag(2^{-2m}))^{-1} (af(2^{-2m})) \left(\frac{1}{3} - 2^{-2\alpha-1} \right).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

以(4.16)代入(4.15)并注意

$$\lim_{m\to\infty}(1-ag(2^{-2m}))^{(ag(2^{-2m}))^{-1}}=e^{-1}$$

及 $1-e^{-t}\geqslant\frac{1}{2}t$ （当 $0<t<\frac{1}{2}$）可得：

$$P(H_{1,a,2m})\geqslant 1-\exp(-c_{24}f(2^{-2m}))$$
$$\geqslant c_{25}f(2^{-2m}),(\text{当 } m \text{ 充分大}). \quad (4.17)$$

类似地，有

$$P(H_{2,a,2m})\geqslant c_{26}f(2^{-2m}),(\text{当 } m \text{ 充分大}). \quad (4.18)$$

所以由 $H_{1,a,2m}$ 与 $H_{2,a,m}$ 独立可得：

$$P(H_{1,a,2m}\cap H_{2,a,m})\geqslant c_{26}'f^2(2^{-2m}),(m \text{ 充分大}). \quad (4.19)$$

但是，由 f 的控制增长性有

$$f^2(2^{-2m})\geqslant\left(\frac{1}{K_f}\right)^2 f^2(2^{-2m+1}), \quad (4.20)$$

由 $\int_{0+}\frac{f^2(s)}{s}ds=\infty$ 有

$$\sum_{m=1}^{\infty}f^2(2^{-m})=\infty. \quad (4.21)$$

由(4.20)及(4.21)得

$$\sum_{m=1}^{\infty}f^2(2^{-m})=\infty. \quad (4.22)$$

因此，由(4.19)、(4.22)及 Borel-Cantelli 引理得知

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}(H_{1,a,2m}\cap H_{2,a,2m}))=1, \quad (4.23)$$

从而由 $E_{a,n}^c\supset H_{1,a,n}\cap H_{2,a,n}$ 及(4.23)得

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}E_{a,2m}^c)=1. \quad (4.24)$$

令 $a\to 0$，(4.24)蕴含了：

$$\liminf_{r\downarrow 0}(m_1(r)+m_2(r))/g(r)=0 \quad a.s.. \quad (4.25)$$

但是

$$\frac{m_1(r)+m_2(r)}{g(2r)}\leqslant\frac{m_1(r)+m_2(r)}{g(r)},$$

所以

$$\liminf_{r \downarrow 0} \frac{m_1(r) + m_2(r))}{g(2r)} = 0 \quad a.s..$$

定理4.1得证.

定理4.2 设$f(s)$、$g(s) = s^\alpha f(s)$如定理4.1中所定义，$K(\omega)$如定理3.2所定义.则

$$g - p(K(\omega)) = \begin{cases} 0 & a.s. \\ \infty & a.s. \end{cases} \tag{4.26}$$

依据

$$\int_{0+} \frac{|f(s)^2|}{s} ds = \begin{cases} < \infty \\ = \infty \end{cases} \tag{4.27}$$

来判定.

证 本定理的证明思路类似于[199]定理2.首先，仿[199]定理2可证：

$$\text{“}\int_{0+} \frac{|f(s)|^2}{s} ds = \infty \quad \Rightarrow g - p(K(\omega)) = \infty \quad a.s.\text{”}.$$

其次，往证

$$\text{“}\int_{0+} \frac{|f(s)|^2}{s} ds < \infty \quad \Rightarrow g - p(K(\omega)) = 0 \quad a.s.\text{”}.$$

事实上，令$\bar{v}(t) = v[0,t)$，再令

$$G = \left\{ t_0 \in (0,1) : \liminf_{r \downarrow 0} \frac{m\{t \in [0,1] : |\bar{v}(t) - \bar{v}(t_0)| < r\}}{g(2r)} = \infty \right\},$$

$$G_n = \left\{ t_0 \in (0,1) : \liminf_{r \downarrow 0} \frac{m\{t \in [0,1] : |\bar{v}(t) - \bar{v}(t_0)| < r\}}{g(2r)} \leqslant n \right\},$$

此处m和v分别为(2.8)和(2.7)中所定义的随机测度，仿[199]可证：

$$g - p^{**}(\bar{v}(G)) = 0 \quad a.s.\ (\bar{v}(G)\text{为}\bar{v}\text{在}G\text{之像集})； \tag{4.28}$$

$$\mathbf{E}(g - p^{**}(\bar{v}(G_n))) = 0, (\forall\, n \geqslant 1), \tag{4.29}$$

此处$g-p$和$g-p^{**}$之定义见第一章(3.5)式. 由(4.29)得

$$g-p^{**}(\bar{v}(G_n))=0 \quad a.s. (\forall n\geqslant 1). \tag{4.30}$$

但是

$$\{0,1\}\cup\bar{v}(G\cup\bigcup_n G_n)\supset K(\omega) \quad a.s., \tag{4.31}$$

由(4.28)、(4.30)、(4.31)得

$$g-p^{**}(K(\omega))=0 \quad a.s.,$$

从而

$$g-p(K(\omega))=0 \quad a.s..$$

定理得证.

第十章

统计自仿射集

自仿射集组成一类重要的集类，它包括自相似集作为它的特殊情形. 仿射映射 $F:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是具有下面形式的映射：

$F(x) = Tx + b, x \in \mathbb{R}^d$,

其中 T 是$\mathbb{R}^d$ 上的线性变换(可以表示成一个 $d \times d$ 阶矩阵)，b 是$\mathbb{R}^d$ 中的一个向量. 如果 $F_1, F_2, \cdots, F_m$ 为$\mathbb{R}^d$ 上的仿射压缩映射，则存在 $F_1, F_2, \cdots, F_m$ 的唯一的紧不变集 K，并称 K 为自仿射集. 目前，关于自仿射集的研究还远没有自相似集深入，结果也没有自相似集丰富. Mcmullen 在[161] 中研究了一类自仿射集 —— 广义 Sierpinski 毯，得到了它的 Hausdorff 维数和盒维数。在这一章里，我们把广义Sierpinski 毯的生成过程每一步随机化，从而得到一类统计自仿射集，它包含了 Mcmullen 自仿射集作为其特例。我们在第 1 节中给出了统计自仿射集的定义；在第 2 节中介绍了与统计自仿射集相联系的简单Galton — Watson 分枝过程以及变化环境和随机环境中的分枝过程；在第 3 节中得到了统计自仿射集的 Packing 维数和盒维数；在第 4 节中得到了统计自仿射集的 Hausdorff 维数；在第 5 节中讨论了什么时候其 Hausdorff 维数和 Packing 维数相同。

§1 统计自仿射集的定义

我们先简要介绍一下 Mcmullen 自仿射集. 设 $E_0 = [0,1]^2 =$

单位实心正方形，$m,n \in \mathbb{N}$，$2 \leqslant m < n$，(本章中 m,n 均固定).

令 $\mathscr{Y} = \{R_{i,j}: 0 \leqslant i \leqslant n-1, 0 \leqslant j \leqslant m-1\}$

$$R_{i,j} = [in^{-1},(i+1)n^{-1}] \times [jm^{-1},(j+1)m^{-1}],$$

$\forall\ j \in \{0,1,2,\cdots,m-1\}$，

取定集合 $D_j = \{s_1^{(j)},\cdots,s_{t_j}^{(j)}\} \subset \{0,1,2,\cdots,n-1\}$，($D_j$ 可为$\varnothing$).

令

$$E_1 = \bigcup_{j=0}^{m-1} \bigcup_{s \in D_j} R_{s,j},$$

称 $R_{s,j}$ 为 E_1 的构成矩形. 仿上(以 E_1 代替 E_0，再仿上分法与取法)得 E_2. 递推地进行下去. 称 $E \triangleq \lim\limits_{n\to\infty} E_n$ 为广义 Sierpinski 毯.

由[161]有：

$$\dim(E) = \log_m\left(\sum_{j=0}^{m-1} t_j^{\log_n m}\right);$$

$$\mathrm{Dim}(E) = \log_m \pi(D) + \log_n \left(\frac{\sum\limits_{j=0}^{m-1} t_j}{\pi(D)}\right),$$

其中 $\pi(D) = \#\{j: 0 \leqslant j \leqslant m-1, \{R_{i,j}, 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$ 至少有 E_1 的一个构成矩形$\}$.

如果在上述构造中每一步都随机化，则得到统计自仿射集，下面我们具体构造统计自仿射集.

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个完备概率空间，为记号简便$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量 $Z(\omega)$ 和随机集 $K(\omega)$ 均略去 ω 而直接写成 Z 和 K.

记 $K_0 = [0,1]^2$ 为平面上的单位正方形，m,n 为自然数满足 $2 \leqslant m < n$，把 K_0 分成 mn 个全等的矩形

$$R_{i,j} = [in^{-1},(i+1)n^{-1}] \times [jm^{-1},(j+1)m^{-1}]$$

$i = 0,1,\cdots,n-1$，$j = 0,1,\cdots,m-1$，记$\{R_{i,j}, 0 \leqslant i \leqslant n-1, 0 \leqslant j \leqslant m-1\} = \{\widetilde{R}_v, 1 \leqslant v \leqslant mn\}$，并记 $A_v, v \in \{1,2,\cdots,mn\}$ 为$\mathbb{R}^2$ 中的仿射映射使得 $A_v K_0 = \widetilde{R}_v$，$(v = 1,2,\cdots,mn)$. 设 $S = \{1,2,\cdots,mn\}$. $\mathscr{P}^S$ 为 S 的子集全体，G 为 $\mathscr{P}^S$ 上的概率分布.

构造随机紧集列 $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ 如下：

第一步依分布 G 在 S 中取一个随机子集 s，记

$$K_1 = \bigcup_{v \in s} A_v K_0.$$

第二步对每一个第一步中已选取了的长、宽分别为$\frac{1}{n}$ 和$\frac{1}{m}$ 的矩形 $A_v K_0$，依分布 G 在 S 中取一个随机子集 s'，$A_v K_0$ 用 $\# s'$ 个长、宽分别为$\frac{1}{n^2}$ 和$\frac{1}{m^2}$ 的矩形 $A_v A_{v'} K_0 (v' \in s')$ 代替，(其中，s' 的取法与第一步 s 的取法独立，并且对不同的 $A_v K_0, v \in s$，其取法也相互独立)，记 K_2 为所有取得的长、宽分别为$\frac{1}{n^2}$ 和$\frac{1}{m^2}$ 的矩形之并. 依次照这样进行下去，得到一串单调下降的随机紧集列 $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$，称 $K = \bigcap_{k=0}^{\infty} K_k$ 为统计自仿射集.

上面对 $K = \bigcap_{k=0}^{\infty} K_k$ 的构造是描述性的，精确地说. 取

$$\Omega = \mathop{\times}_{k=1}^{\infty} \Omega^{(k)}, \Omega^{(1)} = \mathscr{P}^S, \Omega^{(k)} = \mathop{\times}_{v=1}^{mn} \Omega_v^{(k)},$$

$$\Omega_v^{(k)} = \mathscr{P}^S, (k = 2,3,\cdots, v = 1,2,\cdots,mn)$$

$$\mathscr{F}^{(1)} = \{\Omega^{(1)} \text{ 中一切子集}\},$$

$$\mathscr{F}_v^{(k)} = \{\Omega_v^{(k)} \text{ 中一切子集}\}, (k = 2,3,\cdots, v = 1,2,\cdots,mn),$$

$$\mathscr{F}^{(k)} = \mathop{\times}_{v=1}^{mn} \mathscr{F}_v^{(k)}, (k = 2,3,\cdots),$$

$$\mathscr{F} = \mathop{\times}_{k=1}^{\infty} \mathscr{F}^{(k)},$$

$$P = \mathop{\times}_{k=1}^{\infty} P^{(k)}, P^{(1)} = G, P^{(k)} = \mathop{\times}_{v=1}^{mn} P_v^{(k)},$$

$$P_v^{(k)} = G, (k = 2,3,\cdots, v = 1,2,\cdots,mn),$$

遂得概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$，注意，若记 Ω 中之元为 $\omega = (\omega^{(1)}; \omega_1^{(2)}, \cdots, \omega_{mn}^{(2)}; \cdots)$，$\omega_v^{(k)}, k = 2,3,\cdots, v = 1,2,\cdots,mn$，$\omega^{(1)}$ 皆为

$$S = \{1,2,\cdots,mn\}$$

中之一子集. 取

$$K_0 = [0,1]^2,$$

$$K_1 = \bigcup_{v^{(1)}\in\omega^{(1)}} \bigcup_{v^{(2)}\in\omega_{v^{(1)}}^{(2)}} A_{v^{(1)}} A_{v^{(2)}} K_0,$$

…

$$K_{k+1}(\omega) = \bigcup_{v^{(1)}\in\omega^{(1)}} \bigcup_{v^{(2)}\in\omega_{v^{(1)}}^{(2)}} \cdots \bigcup_{v^{(k+1)}\in\omega_{v^{(k)}}^{(k+1)}} A_{v^{(1)}}\cdots A_{v^{(k+1)}} K_0,$$

…

(当 $\omega = (\omega^{(1)};\omega_1^{(2)},\cdots,\omega_{mn}^{(2)};\cdots)$),

$$K(\omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} K_k(\omega).$$

显然 $K:(\Omega,\mathscr{F},P) \to (\mathscr{K}(E_0),\mathscr{B}(\mathscr{K}(E_0)),\eta)$ 为可测映射，其中 $\mathscr{K}(E_0)$ 为 E_0 的紧子集全体，η 为其上 Hausdorff 度量，$\mathscr{B}(\mathscr{K}(E_0))$ 为 Borel σ- 代数.

附注 1.1 若存在一个子集 $s \subset S$，使得 $G(\{s\}) = 1$，则上述统计自仿射集模型就转化为 Mcmullen([161]) 所研究过的广义 Sierpinski 毯模型，因此，统计自仿射集包含了 Mcmullen([161]) 所研究的一类自仿射集 —— 广义 Sierpinski 毯.

附注 1.2 对任意 $k \geqslant 0$，随机集 K_k 为单位正方形中一些长、宽分别为 $\frac{1}{n^k}$ 和 $\frac{1}{m^k}$ 的矩形之并，称每一个组成 K_k 的长、宽分别为 $\frac{1}{n^k}$ 和 $\frac{1}{m^k}$ 的矩形为一个 k 阶基本矩形. 若记 M_k 为 K_k 中 k 阶基本矩形的个数；则 $\{M_k,k \geqslant 0\}$ 为一个起始状态为 1 的 Galton-Watson 分枝过程，并且 $K = \varnothing$ 当且仅当存在 $k > 0$ 使得 $M_k = 0$.

记 $I = \{0,1,2,\cdots,m-1\}$,

$$I^k = \overbrace{I \times I \times \cdots \times I}^{k}, (k \geqslant 1), I^0 = \varnothing.$$

$$I^\infty = \{(i_1,i_2,\cdots): i_j \in I, j \geqslant 1\}, I^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} I^k$$

对每一个有限序列 $s = (s_1,s_2,\cdots,s_k) \in I^k$. 定义[0,1] 中长度为 m^{-k} 的闭区间如下：

$$I_s = [im^{-k},(i+1)m^{-k}], \text{其中 } i = \sum_{v=1}^{k} s_v m^{k-v},$$

$\forall\, k \geqslant 1, \forall\, s \in I^\infty \cup I^*, |s| \geqslant k$,（其中 $|s|$ 表 s 的长度），$s =$

$(s_1, s_2, \cdots)$，定义随机变量：

$N_k(s) = [0,1] \times I_{s_1, s_2, \cdots, s_k}$ 中所包含的 K_k 中 k 阶基本矩形的个数，

记 $N(s) = N_k(s)$，若 $|s| = k$.

若 $s = (s_1, s_2, \cdots)$，则

"$N_k(s) \geqslant 1, \forall\, k \geqslant 1$" 等价于

$$\text{“}\sum_{j=1}^{\infty} s_j m^{-j} \in \mathrm{proj}_2 K$$

$\triangleq \{y: \exists\ x \in [0,1]$ 使得$(x,y) \in K\}$".

记 $\mathbf{O} = \{i \in I, \mathbf{E}(N(i)) > 0\}$，(本章均沿用此符号)，其中 $\mathbf{E}$ 是由前述概率测度 P 所决定之期望算子，(下同).

在本章中，我们作以下假设：

1. $\mathbf{E}M_1 > 1$；
2. $\#\mathbf{O} \geqslant 2$；
3. 存在 $i \in \mathbf{O}$ 使得 $P\{N(i) \neq 1\} > 0$.

附注 1.3 若 $\mathbf{E}M_1 \leqslant 1$，则除了一种平凡情况 $P\{M_1 = 1\} = 1$ 外，由分枝过程的基本定理，$P(\lim\limits_{k\to\infty} M_k = 0) = 1$. 因此 $K = \varnothing$ P-$a.s.$. 若假设 2 不成立，$i.e.$ $\mathbf{O} = \{i\}$，其中 $i \in \{0,1,2,\cdots,m-1\}$，则 K 为$[0,1] \times \dfrac{i}{m-1}$ 上的一个类随机 Cantor 集，Mauldin 和 Williams[159] 中已经研究过这种情况. 若假设 3 不成立，则 K 的 Hausdorff 维数和盒维数可以从 Mauldin 和 Williams[159] 中已经研究过情况得到.

§2 与统计自仿射集相联系的分枝过程

上一节中，我们已经构造了$[0,1]^2$ 中的统计自仿射集 K，由假设1，$\{M_k, k \geqslant 0\}$ 是一个后代均值大于 1 的简单 Galton-Watson 分枝过程，其中 M_k 为 K_k 中所包含的 k 阶基本矩形的个数. 下面我们

进一步考察$\{N_k(s), k \geqslant 0\}$，其中$s \in I^{\infty}$.

对任意$s \in \bigcup_{k\geqslant 0} I^k$. 记$G_s$为随机变量$N(s)$的分布，对任意$k \geqslant 1$，记$\mathscr{F}_k = \sigma\{K_j$中一切基本矩形，$j \leqslant k\}$，注意每个$K_j$中的基本矩形$\sigma_{j,k}(\omega)$可视为由$\Omega$至$\mathscr{K}([0,1]^2)$的随机元. 对任意$s \in I^{\infty}$，随机变量序列$\{N_k(s), k \geqslant 0\}$具有如下性质：

(i)$N_0(s) = 1 \quad P\text{-}a.s.$；

(ii)$\forall\, k \geqslant 0$，在已知$N_k(s)$的条件下，$N_{k+1}(s)$为$N_k(s)$个独立同分布的随机变量之和，其中每个随机变量的分布为$G_{s_{k+1}}$，且均与$\mathscr{F}_k$独立.

附注 2.1　对任意$s \in I^{\infty}$，$\{N_k(s), k \geqslant 0\}$为一个变化环境中的分枝过程，(见 Athreya 和 Ney[7]).

引理 2.1　对任意$s \in \mathbf{O}^{\infty}$，

$$\left\{\frac{N_k(s)}{\prod_{v=1}^{k} \mathbf{E}N(s_v)}, \mathscr{F}_k, k \geqslant 1\right\}\text{为非负鞅.}$$

证

$$\mathbf{E}\left\{\frac{N_{k+1}(s)}{\prod_{v=1}^{k+1} \mathbf{E}N(s_v)}\middle|\mathscr{F}_k\right\}$$

$$= \mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{N_k(s)} f_i \,|\, \mathscr{F}_k\Big)\frac{1}{\prod_{v=1}^{k+1} \mathbf{E}N(s_v)}$$

其中$\{f_i : i = 1,2,\cdots\}$与$\mathscr{F}_k$独立且f_i具有分布$G_{s_{k+1}}$.

因此，

$$\mathbf{E}\left\{\frac{N_{k+1}(s)}{\prod_{v=1}^{k+1} \mathbf{E}N(s_v)}\middle|\mathscr{F}_k\right\}$$

$$= \frac{1}{\prod_{v=1}^{k+1} \mathbf{E}N(s_v)}\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N_k(s)=j\}}\mathbf{E}N(s_{k+1})$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N_k(s)=j\}} \cdot j}{\prod_{v=1}^{k} \mathbf{E}N(s_v)} = \frac{N_k(s)}{\prod_{v=1}^{k} \mathbf{E}N(s_v)}.$$

另外，用归纳法容易证明：$\forall\, k \geqslant 1$.

$$\mathbf{E}\, \frac{N_k(s)}{\prod_{v=1}^{k} \mathbf{E}N(s_v)} = 1.$$

引理 2.1 证毕.

引理 2.1 已经证明了对任意 $s \in \mathbf{O}^{\infty}$，

$$\left\{ \frac{N_k(s)}{\prod_{v=1}^{k} \mathbf{E}N(s_v)}, \mathscr{F}_k, k \geqslant 1 \right\}$$

为一个鞅，由鞅收敛定理，存在非负随机变量 $N_\infty(s)$ 使得

$$N_\infty(s) = \lim_{k\to\infty} \frac{N_k(s)}{\prod_{v=1}^{k} \mathbf{E}N(s_v)} \quad P\text{-}a.s.. \tag{2.1}$$

设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 为取值于 $\mathbf{O}$ 中的独立同分布的随机变量序列，使得 $\{\xi_j, j \geqslant 1\}$ 与 $\mathscr{F}_k$ 相互独立，$\forall\, k \geqslant 1$. 记 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$，则 $\{N_k(\xi), k \geqslant 1\}$ 为随机环境中的分枝过程，$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots)$ 为环境变量，(见[7]).

$\forall\, k \geqslant 1$，记

$\mathscr{G}_k = \mathscr{F}_k \vee \sigma(\xi_1, \xi_2, \cdots)$，

$\forall\, j \in \mathbf{O}, k \geqslant 1$，记

$g(j) = \mathbf{E}N(j), h(j) = \mathrm{Var}(N(j))$，

$g(\xi_k) = \sum_{i\in \mathbf{O}} \mathbf{E}N(i)\mathbf{1}_{\{\xi_k = i\}}, h(\xi_k) = \sum_{i\in\mathbf{O}} \mathrm{Var}N(i)\mathbf{1}_{\{\xi_k=i\}}$.

定理 2.1

$$\left\{ \frac{N_k(\xi)}{\prod_{v=1}^{k} g(\xi_v)}, \mathscr{G}_k, k \geqslant 1 \right\} \text{为非负鞅.}$$

证 $N_{k+1}(\xi)$ 可表示为 $\sum_{i=1}^{N_k(\xi)} f_i^{(k)}$，其中 $\{f_i^{(k)}, i \geqslant 1\}$ 独立，且 $P(f_i^{(k)} \leqslant x \mid \mathscr{F}_k, \xi_{k+1} = l) = P(N(l) \leqslant x)$，因此，

$$\mathbf{E}\left\{\frac{N_{k+1}(\xi)}{\prod_{v=1}^{k+1} g(\xi_v)} \middle| \mathscr{G}_k\right\}$$

$$= \frac{1}{\prod_{v=1}^{k+1} g(\xi_v)} \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{N_k(\xi)} f_i^{(k)} \mid \mathscr{G}_k\right)$$

$$= \frac{1}{\prod_{v=1}^{k+1} g(\xi_v)} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}\left\{\sum_{i=1}^{j} f_i^{(k)} \mathbf{1}_{\{N_k(\xi)=j\}} \mid \mathscr{G}_k\right\}$$

（约定 $\sum_{i=1}^{0} f_i^{(k)} \mathbf{1}_{\{N_k(\xi)=0\}} = 0$）

$$= \frac{1}{\prod_{v=1}^{k+1} g(\xi_v)} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N_k(\xi)=j\}} \sum_{l \in \mathbf{O}} \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{j} f_i^{(k)} \mid \mathscr{G}_k\right) \mathbf{1}_{\{\xi_{k+1}=l\}}$$

$$= \frac{1}{\prod_{v=1}^{k+1} g(\xi_v)} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N_k(\xi)=j\}} \sum_{l \in \mathbf{O}} \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{j} f_i^{(k)} \mid \xi_{k+1} = l, \mathscr{F}_k\right) \mathbf{1}_{\{\xi_{k+1}=l\}}$$

$$= \frac{1}{\prod_{v=1}^{k+1} g(\xi_v)} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N_k(\xi)=j\}} \sum_{l \in \mathbf{O}} j \mathbf{E} N(l) \mathbf{1}_{\{\xi_{k+1}=l\}}$$

$$= \frac{1}{\prod_{v=1}^{k+1} g(\xi_v)} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N_k(\xi)=j\}} j \cdot g(\xi_{k+1})$$

$$= \frac{N_k(\xi)}{\prod_{v=1}^{k} g(\xi_v)}.$$

定理 2.1 证毕.

由定理 2.1 以及鞅收敛定理，存在随机变量 $N_\infty(\xi)$，使得：

$$N_{\infty}(\xi)=\lim_{k\to\infty}\frac{N_k(\xi)}{\prod_{v=1}^{k}g(\xi_v)}\cdot P\text{-}a.s.. \tag{2.2}$$

引理 2.2 $\mathbf{E}[\log\mathbf{E}(N(\xi_1)|\xi_1)]=\sum_{i\in\mathbf{O}}\log\mathbf{E}N(i)P(\xi_1=i)$.

证 因为

$$N(\xi_1(\omega))(\omega)=\sum_{i\in\mathbf{O}}N(i)(\omega)\mathbf{1}_{\{\xi_1(\omega)=i\}}$$

因此,

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[\log\mathbf{E}(N(\xi_1)|\xi_1)]\\&=\mathbf{E}[\log\mathbf{E}(\sum_{i\in\mathbf{O}}N(i)\mathbf{1}_{\{\xi_1=i\}}|\xi_1)]\\&=\mathbf{E}[\log\sum_{i\in\mathbf{O}}\mathbf{E}N(i)\mathbf{1}_{\{\xi_1=i\}}]\\&=\sum_{i\in\mathbf{O}}\log\mathbf{E}N(i)P(\xi_1=i).\end{aligned}$$

引理 2.2 证毕.

下面分枝过程基本定理的证明参见[5],[6] 或[7].

定理 2.2

(i) $P(\lim_{k\to\infty}N_k(\xi)=0)+P(\lim_{k\to\infty}N_k(\xi)=\infty)=1$; (2.3)

(ii) $P(\lim_{k\to\infty}N_k(\xi)=\infty)>0$ 当且仅当

$$\mathbf{E}[\log\mathbf{E}(N(\xi_1)|\xi_1)]>0; \tag{2.4}$$

(iii) 若 $\mathbf{E}[\log\mathbf{E}(N(\xi_1)|\xi_1)]>0$,则

$$P(N_{\infty}(\xi)>0|\lim_{k\to\infty}N_k(\xi)=\infty)=1. \tag{2.5}$$

附注 2.3 若环境变量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$ 满足:存在 $r\geqslant 1$ 使得 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r),(\xi_{r+1},\xi_{r+2},\cdots,\xi_{2r}),\cdots$ 独立同分布,则定理 2.2(i) 仍然成立,(ii)、(iii) 相应地变为

(ii)′ $P(\lim_{k\to\infty}N_k(\xi)=\infty)>0$ 当且仅当

$$\sum_{v=1}^{r}\mathbf{E}(\log\mathbf{E}[N(\xi_v)|(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r)])>0; \tag{2.6}$$

(iii)′ 若 $\sum_{v=1}^{r}\mathbf{E}(\log\mathbf{E}[N(\xi_v)|(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r)])>0$,则

$$P(N_\infty(\xi) > 0 \mid \lim_{k\to\infty} N_k(\xi) = \infty) = 1. \tag{2.7}$$

定理 2.3　设环境变量 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ 满足：存在 $r \geqslant 1$ 使得 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r), (\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \cdots, \xi_{2r}), \cdots$ 独立同分布且与 $\{\mathscr{F}_k, k \geqslant 1\}$ 独立，若

$$P(\sum_{v=1}^{r} \log \mathbf{E}[N(\xi_v) \mid (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r)] > 0) = 1, \tag{2.8}$$

则　$\mathbf{E}(N_\infty^2(\xi)) < \infty.$ 　　(2.9)

证　只需对 $r = 1$ 的情况证明. 由定理 2.1 以及鞅收敛定理，只需证明 $\forall\, k \geqslant 1$,

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{N_{k+1}(\xi)}{\prod_{v=1}^{k+1} g(\xi_v)}\right)^2\right] < \infty.$$

因为　$N_{k+1}(\xi) = \sum_{i=1}^{N_k(\xi)} f_i^{(k)}$，(其中 $f_i^{(k)}$ 如定理 2.1)，

所以

$$N_{k+1}^2(\xi) = \sum_{i=1}^{N_k(\xi)} (f_i^{(k)})^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N_k(\xi)} f_i^{(k)} f_j^{(k)},$$

$$\mathbf{E}(N_{k+1}^2(\xi) \mid \mathscr{G}_k) = \mathbf{E}[\sum_{i=1}^{N_k(\xi)} (f_i^{(k)})^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N_k(\xi)} f_i^{(k)} f_j^{(k)} \mid \mathscr{G}_k]$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(\sum_{i=1}^{N_k(\xi)} (f_i^{(k)})^2 \mid \mathscr{G}_k) \\
&= \mathbf{E}(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j} (f_i^{(k)})^2 \mathbf{1}_{\{N_k(\xi)=j\}} \mid \mathscr{G}_k) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j} \mathbf{1}_{\{N_k(\xi)=j\}} \mathbf{E}[(f_i^{(k)})^2 \mid \mathscr{G}_k] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j} \mathbf{1}_{\{N_k(\xi)=j\}} \sum_{p\in\mathbf{O}} \mathbf{E}[(f_i^{(k)})^2 \mid \mathscr{F}_k, \xi_{k+1} = p] \mathbf{1}_{\{\xi_{k+1}=p\}} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j} \mathbf{1}_{\{N_k(\xi)=j\}} \sum_{p\in\mathbf{O}} \mathbf{E} N^2(p) \mathbf{1}_{\{\xi_{k+1}=p\}}
\end{aligned}$$

$$= N_k(\xi)\mathbf{E}N^2(\xi_{k+1})$$

$$= N_k(\xi)[h(\xi_{k+1}) + g^2(\xi_{k+1})]. \tag{2.10}$$

用同样的方法计算可得

$$\mathbf{E}(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N_k(\xi)} f_i^{(k)}f_j^{(k)}\,|\,\mathscr{G}_k)$$

$$= \frac{N_k^2(\xi) - N_k(\xi)}{2}g^2(\xi_{k+1}). \tag{2.11}$$

由(2.10)、(2.11)，有

$$\mathbf{E}(N_{k+1}^2(\xi)\,|\,\mathscr{G}_k)$$

$$= N_k(\xi)h(\xi_{k+1}) + N_k^2(\xi)g^2(\xi_{k+1}).$$

$$\mathbf{E}(N_{k+1}^2(\xi)\,|\,\xi)$$

$$= \mathbf{E}(N_k(\xi)\,|\,\xi)h(\xi_{k+1}) - \mathbf{E}(N_k^2(\xi)\,|\,\xi)g^2(\xi_{k+1}), \tag{2.12}$$

由(2.8)有$P(g(\xi_1) > 1) = 1$，因为随机变量$g(\xi_1)$至多可取有限个值，因此存在$\varepsilon > 0$，使得

$$g(\xi_1) \geqslant 1 + \varepsilon \text{ 且 } h(\xi_1) \leqslant \varepsilon^{-1} \quad P\text{-}a.s. \tag{2.13}$$

由(2.12)和(2.13)，

$$\mathbf{E}\left(\frac{N_{k+1}^2(\xi)}{\prod_{v=1}^{k+1}g(\xi)}\middle|\,\xi\right)$$

$$= \mathbf{E}\left(\frac{N_k(\xi)}{(\prod_{v=1}^{k+1}g(\xi_v))^2}\middle|\,\xi\right)h(\xi_{k+1}) + \mathbf{E}\left(\frac{N_k^2(\xi)}{(\prod_{v=1}^{k+1}g(\xi_v))^2}\middle|\,\xi\right)g^2(\xi_{k+1})$$

$$= \mathbf{E}\left[\left(\frac{N_k(\xi)}{\prod_{v=1}^{k}g(\xi_v)}\right)^2\middle|\,\xi\right] + \mathbf{E}\left(\frac{N_k(\xi)}{(\prod_{v=1}^{k+1}g(\xi_v))^2}\middle|\,\xi\right)h(\xi_{k+1})$$

$$\leqslant \mathbf{E}\left[\left(\frac{N_k(\xi)}{\prod_{v=1}^{k}g(\xi_v)}\right)^2\middle|\,\xi\right] + \mathbf{E}\left(\frac{N_k(\xi)}{\prod_{v=1}^{k}g(\xi_v)}\middle|\,\xi\right)(1+\varepsilon)^{-k-2}\varepsilon^{-1}$$

注意到 $\mathbf{E}\left[\frac{N_k(\xi)}{\prod_{v=1}^{k}g(\xi_v)}\right] = 1$，

因此，

$$\mathbf{E}[N_\infty^2(\xi)] \leqslant 1 + \varepsilon^{-2}(1+\varepsilon) < \infty.$$

定理 2.3 证毕.

对任意 $\theta \in [0,1]$，记 $\psi(\theta) = \log[\sum_{i\in \mathbf{O}} (\mathbf{E}N(i))^\theta]$.

附注 2.4 (i) 若存在 $i,j \in \mathbf{O}$，使得 $\mathbf{E}N(i) \neq \mathbf{E}N(j)$，则函数 $\psi(\theta)$ 具有严格正的二阶导数，因此为严格凸的；

(ii) 若对任意的 $i,j \in \mathbf{O}$，$\mathbf{E}N(i) = \mathbf{E}N(j)$，则 $\psi(\theta)$ 为 θ 之线性函数；

(iii) 若对任意的 $i \in \mathbf{O}$，$\mathbf{E}N(i) = 1$，则 $\psi(\theta) \equiv \log\mathbf{E}M_1$ 为常数.

在(i)，(ii) 两种情形，$\psi(\theta)$ 在 $\theta \in [0,1]$ 中有唯一的最小值点，记为 t，在情形(iii)，我们取 $t = 1$.

引理 2.3 $\psi(t) > 0$.

证 由假设 2，$\mathbf{O}$ 中至少有两个元素 i,j，使得 $\mathbf{E}N(i) > 0$，$\mathbf{E}N(j) > 0$. 若存在 $i \in \mathbf{O}$ 使得 $\mathbf{E}N(i) \geqslant 1$，则 $(\mathbf{E}N(i))^t \geqslant 1$，从而 $\sum_{j\in\mathbf{O}} (\mathbf{E}N(j))^t > 1$，因此 $\psi(t) > 0$. 若对于任意的 $i \in \mathbf{O}$，均有 $\mathbf{E}N(i) < 1$，则 $t = 1$，由假设 1，我们有

$$\sum_{i\in\mathbf{O}} [\mathbf{E}N(i)]^t = \sum_{i\in\mathbf{O}} \mathbf{E}N(i) = \mathbf{E}M_1 > 1,$$

因此，我们总有 $\psi(t) > 0$. 引理 2.3 证毕.

$\forall\, k \geqslant 1$，定义

$$Z_k = \sum_{s\in I^k} \mathbf{1}_{\{N(s)\geqslant 1\}}. \tag{2.14}$$

定理 2.4 $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \mathbf{E}Z_k = \psi(t)$

此定理的证明较繁杂，此处从略，有兴趣的读者请参见[44]，[70].

定理 2.5 $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log Z_k = \psi(t) \quad P\text{-}a.s.\ on \{K \neq \varnothing\}$.

证 $\forall\, a > 1$，由引理 2.3 和定理 2.4，存在 k_0，使得 $\forall\, k \geqslant k_0$，

有：

$$\frac{1}{k}\log \mathbf{E}Z_k \leqslant \frac{1+a}{2}\psi(t),$$

故

$$\begin{aligned} P(\frac{1}{k}\log Z_k \geqslant a\psi(t)) &= P(Z_k \geqslant e^{ak\psi(t)}) \\ &\leqslant \frac{e^{\frac{1+a}{2}k\psi(t)}}{e^{ak\psi(t)}} = e^{\frac{1-a}{2}k\psi(t)}, \end{aligned}$$

所以，

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\frac{1}{k}\log Z_k \geqslant a\psi(t)) < \infty,$$

由 Borel-Cantelli 引理，

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k}\log Z_k \leqslant a\psi(t) \quad P\text{-}a.s..$$

令 $a \downarrow 1$，有

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k}\log Z_k \leqslant \psi(t), P\text{-}a.s..$$

另一方面，由定理 2.4，$\forall\ \varepsilon > 0$，ε 充分小，存在 $k \geqslant 1$ 使得

$$\mathbf{E}Z_k \geqslant \exp\{k\psi(t) - k\varepsilon\} > 1.$$

现在构造一个新的简单 Galton-Watson 分枝过程 $\{Y_j, j \geqslant 0\}$ 如下：

$$Y_0 = 1, Y_j = Z_{jk}, j \geqslant 1,$$

由鞅收敛定理.

$$\lim_{j\to\infty} \frac{Y_j}{(\mathbf{E}Z_k)^j} = W \quad P\text{-}a.s..$$

其中 $\{W > 0\} = \{K \neq \varnothing\} P\text{-}a.s.$，因此，

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{1}{j}\log Z_{jk} \geqslant k(\psi(t) - \varepsilon) \quad P\text{-}a.s. on \{K \neq \varnothing\},$$

故

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\log Z_k}{k} \geqslant \psi(t) - \varepsilon \quad P\text{-}a.s. on \{K \neq \varnothing\}.$$

由 ϵ 的任意性可知：

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{\log Z_k}{k}\geqslant\psi(t)\quad P\text{-}a.s.\ on\{K\neq\varnothing\}.$$

定理证毕.

§3 统计自仿射集的Packing维数

沿袭以前的符号，仍用 $\overline{\dim}_K$ 和 Dim 分别记上盒维数和 Packing 维数.

$\forall\, l\geqslant 1$，设 F 为 $\mathbb{R}^l$ 中紧子集，记

$$\overline{\dim}_{MK}(F)=\inf\{\sup_i\overline{\dim}_K(F_i),F\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\}$$

引理 3.1 设 F 为 $\mathbb{R}^l$ 中紧子集，则

$$\mathrm{Dim}(F)=\overline{\dim}_{MK}(F)$$

证明请参见第一章定理 4.6.

引理 3.2 设 F 为 $\mathbb{R}^l$ 中紧子集，若 F 满足对于任意与 F 相交的开集 V，

$$\overline{\dim}_K(F\cap V)=\overline{\dim}_K(F)$$

则 $\quad\overline{\dim}_K(F)=\mathrm{Dim}(F)$

证 设 $F\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$，这里每个 F_i 都是闭的，由 Baire 纲定理，存在 i 和开集 V 使得 $F\cap V\subset F_i$，对这个 i，$\overline{\dim}_K(F_i)\geqslant\overline{\dim}_K(F)$，因此，

$$\begin{aligned}\overline{\dim}_{MK}(F)&=\inf\{\sup_i\overline{\dim}_K(F_i):F\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i,F_i\text{ 是闭集}\}\\&\geqslant\overline{\dim}_K(F)\end{aligned}$$

由引理 3.1 $\quad\overline{\dim}_K(F)=\mathrm{Dim}(F)$，故

$$\overline{\dim}_K(F)=\mathrm{Dim}(F)$$

引理 3.2 证毕.

$\forall\, l=1,2,\cdots$，令 $k(l)=[l\log_m n]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 显然 $k(1),k(2),\cdots$ 为一个单调上升趋于 ∞ 的正整数序列

并且对每一个 $l=1,2,\cdots,m^{k(l)}\leqslant n^l<m^{k(l)+1}$.

对每一个自然数 $l,p\in\{0,1,2,\cdots,n^l-1\},q\in\{0,1,2,\cdots,m^{k(l)-1}\}$,记

$$R_l(p,q)=[pn^{-l},(p+1)n^{-l}]\times[qm^{-k(l)},(q+1)m^{-k(l)}],$$

并称 $R_l(p,q)$ 为一个 l 阶"逼近方块". 注意对不同的数对 (p,q) 和 (p',q'),$R_l(p,q)$ 和 $R_l(p',q')$ 或者相交于一条线段,或者相交于一点,或者不相交,且每个"逼近方块"的高度和宽度的比值介于 1 和 m 之间.

引理 3.3 $\overline{\dim}_K(K)=\limsup\limits_{l\to\infty}\dfrac{\log C_l}{l\log m}$,

其中 C_l 为用 l 阶"逼近方块"覆盖 K 时所需的 l 阶"逼近方块"的最小个数.

证 $\forall\,\varepsilon>0$,用 $N(\varepsilon,K)$ 表示用半径为 ε 的能覆盖 K 的球的最小个数,并设 $\{B_1,B_2,\cdots,B_{N(\varepsilon,K)}\}$ 为 K 的一个半径为 ε 的球覆盖. 取 l 使得 $n^{-l-1}\leqslant\varepsilon<n^{-l}$,则对每个球 $B_j,1\leqslant j\leqslant N(\varepsilon,K)$,至多存在 9 个 l 阶"逼近方块",记之为 $A_j^{(1)},\cdots,A_j^{(9)}$,使得 $B_j\subset\bigcup\limits_{i=1}^{9}A_j^{(i)}$,因此,$C_l\leqslant 9N(\varepsilon,K)$,从而

$$\limsup_{l\to\infty}\frac{\log C_l}{l\log n}\leqslant\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\log 9N(\varepsilon,K)}{\log\dfrac{1}{\varepsilon}}=\overline{\dim}_K(K)\tag{3.1}$$

另一方面,设 $\{F_1,F_2,\cdots,F_{C_l}\}$ 为 K 的一个 l 阶"逼近方块"覆盖,对每一个 $j,1\leqslant j\leqslant C_l$,存在一个半径为 $m^{-k(l)}$ 的球 H_j 使得 $F_j\subset H_j$,因此

$$N(m^{-k(l)},K)\leqslant C_l,$$

$$\begin{aligned}\overline{\dim}_K(K)&=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\log N(\varepsilon,K)}{-\log\varepsilon}\\&=\limsup_{l\to\infty}\frac{\log N(m^{-k(l)},K)}{\log m^{k(l)}}\\&\leqslant\limsup_{l\to\infty}\frac{\log C_l}{-\log(mn^{-l})}\end{aligned}$$

$$= \limsup_{l\to\infty} \frac{\log C_l}{l\log n}. \tag{3.2}$$

综合(3.1),(3.2),我们有

$$\overline{\dim}_K(K) = \limsup_{l\to\infty} \frac{\log C_l}{l\log n}.$$

引理 3.3 证毕.

定理 3.1([70]) 设 m、n、$\psi(t)$、M_1 如前定义,则

$$\overline{\dim}_K(K) = \frac{\log \mathbf{E}M_1}{\log n} + \left(1 - \frac{\log m}{\log n}\right)\frac{\psi(t)}{\log m} \quad P\text{-}a.s.$$

$on\{K \neq \varnothing\}$.

$$\text{记}\, d = \frac{\log \mathbf{E}M_1}{\log n} + \left(1 - \frac{\log m}{\log n}\right)\frac{\psi(t)}{\log m} \tag{3.3}$$

$\forall\, l \geqslant 1$,记

$\mathscr{V}_l = \{R_l(p,q): R_l(p,q)$ 为 l 阶"逼近方块",且$(R_l(p,q)^0) \cap K_{k(l)} \neq \varnothing\}$,其中 A^0 表示 A 之开核,则 $\mathscr{V}_l$ 为 $K_{k(l)}$ 的一个 l 阶"逼近方块"覆盖,$\mathscr{V}_l$ 更为 K 的一个 l 阶"逼近方块"覆盖.

为证明定理 3.1,我们分几步进行,先证明下面几个引理.

引理 3.4

$$\limsup_{l\to\infty}\left\{\frac{\log(\#\mathscr{V}_l)}{l}\right\} \leqslant d\log n \quad P\text{-}a.s.. \tag{3.4}$$

证 注意到一个 l 阶"逼近方块"$R_l(p,q) \in \mathscr{V}_l$ 当且仅当存在一个 l 阶基本矩形 A 和一个 $k(l)$ 阶基本矩形 B,使得 $B \subset R_l(p,q) \subset A$,因此

$$\#\mathscr{V}_l = \sum_{i=1}^{M_l} Y_j^{(k(l)-l)} \tag{3.5}$$

其中 $Y_j^{(k(l)-l)}$ 是包含在第 j 个 l 阶基本矩形中的 l 阶"逼近方块"的个数,因此,在 $M_l = r \geqslant 1$ 已知的条件下,随机变量序列 $Y_1^{(k(l)-l)}, Y_2^{(k(l)-l)}, \cdots, Y_r^{(k(l)-l)}$ 独立同分布,且与 $Z_{k(l)-l}$ 有相同的分布,其中 $Z_{k(l)-l}$ 由(2.14)所定义. 若记 $u_{k(l)-l} = \mathbf{E}Z_{k(l)-l}$,则

$$\mathbf{E}(\#\mathscr{V}_l) = \mathbf{E}\sum_{i=1}^{M_l} Y_j^{(k(l)-l)}$$

$$= \mathbf{E}\sum_{r=0}^{r}\sum_{j=1}^{r} Y_j^{(k(l)-l)} \mathbf{1}_{\{M_l=r\}}$$

$$= u_{k(l)-l}\sum_{r=0}^{\infty} rP(M_l = r)$$

$$= u_{k(l)-l}\mathbf{E}M_l$$

$$= u_{k(l)-l}(\mathbf{E}M_1)^l$$

$\forall\ \varepsilon > 0$，由契比谢夫不等式有

$$P(\#\mathcal{Y}_l \geqslant (\mathbf{E}M_1)^l u_{k(l)-l} e^{\varepsilon l}) \leqslant e^{-\varepsilon l},$$

由 Borel-Cantelli 引理，有

$$P(\#\mathcal{Y}_l \geqslant (\mathbf{E}M_1)^l u_{k(l)-l} e^{\varepsilon l}\ i.o.) = 0,$$

由定理 2.4 及 $k(l)$ 和 $u_{k(l)-l}$ 之定义有：

$$\limsup_{l\to\infty}\left\{\frac{\log(\#\mathcal{Y}_l)}{l}\right\}$$

$$\leqslant \limsup_{l\to\infty}\frac{\log[(\mathbf{E}M_1)^l u_{k(l)-l} e^{\varepsilon l}]}{l}$$

$$= \log\mathbf{E}M_1 + (\log n - \log m)\frac{\psi(t)}{\log m} + \varepsilon \quad P\text{-}a.s.$$

由 ε 的任意性，

$$\limsup_{l\to\infty}\left\{\frac{\log\#\mathcal{Y}_l}{l}\right\} \leqslant d\log n \quad P\text{-}a.s..$$

引理 3.5

$$\liminf_{l\to\infty}\left\{\frac{\log\#\mathcal{Y}_l}{l}\right\} \geqslant d\log n \quad P\text{-}a.s.\ on\{K \neq \varnothing\}.$$

证 注意到$\{M_l, l \geqslant 0\}$为一个后代均值 $\mathbf{E}M_1 > 1$ 的简单 Galton-Watson 分枝过程，$\{K \neq \varnothing\} = \{\lim\limits_{l\to\infty} M_l = 0\}$ $P\text{-}a.s.$，并且由鞅收敛定理，存在随机变量 W，使得

$$\lim_{l\to\infty}\frac{M_l}{(\mathbf{E}M_1)^l} = W,$$

且 $W > 0$ $P\text{-}a.s.\ on\{K \neq \varnothing\}$，(见[7]). 而定理 2.5 说

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log Z_k = \psi(t) \quad P\text{-}a.s.\ on\{K \neq \varnothing\},$$

注意到 $\lim_{l\to\infty}(k(l)-l)=\infty$，因此，$\forall\ \varepsilon>0$，当 l 充分大时，

$$P(Z_{k(l)-l}\geqslant\exp\{(k(l)-l)(\psi(t)-\varepsilon)\})\geqslant\frac{1}{2}\rho,$$

其中 $\rho=P(K\neq\varnothing)>0$.

由(3.5)，$\#\mathscr{Y}_l=\sum_{j=1}^{M_l}Y_j^{(k(l)-l)}$，而在已知 $M_l=r$ 的条件下，$Y_j^{(k(l)-l)},j=1,2,\cdots,r$ 独立同分布且与 $Z_{k(l)-l}$ 有相同的分布，令

$$\xi_j^{(k(l)-l)}=\begin{cases}0,\text{若 } Y_j^{(k(l)-l)}<\exp\{(k(l)-l)(\psi(t)-\varepsilon)\};\\1,\text{若 } Y_j^{(k(l)-l)}\geqslant\exp\{(k(l)-l)(\psi(t)-\varepsilon)\},\end{cases}$$

则 $\forall\ i\leqslant j$，

$$\begin{aligned}&P(\xi_i^{(k(l)-l)}=1,M_l=j)\\&\quad=P(\xi_i^{(k(l)-l)}=1\,|\,M_l=j)P(M_l=j)\\&\quad\geqslant\frac{1}{2}\rho P(M_l=j),\end{aligned}\tag{$*$}$$

$\forall\ 0<\delta<1$，由契比谢夫不等式，

$$\begin{aligned}&P\Big(\sum_{j=1}^{M_l}\xi_j^{(k(l)-l)}<\frac{1}{4}\rho M_l,M_l\geqslant(\mathbf{E}M_1)^{(1-\delta)l}\Big)\\&=P\Big(\frac{\rho}{2}M_l-\sum_{j=1}^{M_l}\xi_j^{(k(l)-l)}>\frac{\rho}{4}M_l,M_l\geqslant(\mathbf{E}M_1)^{(1-\delta)l}\Big)\\&\overset{(*)}{\leqslant}P\Big(\sum_{j=1}^{M_l}P(\xi_j^{(k(l)-l)}=1\,|\,M_l)-\sum_{j=1}^{M_l}\xi_j^{(k(l)-l)}>\frac{\rho}{4}M_l,\\&M_l\geqslant(\mathbf{E}M_1)^{(1-\delta)l}\Big)\\&\leqslant P\Big(\sum_{j=1}^{M_l}P(\xi_j^{(k(l)-l)}=1\,|\,M_l)-\sum_{j=1}^{M_l}\xi_j^{(k(l)-l)}>\frac{\rho}{4}(\mathbf{E}M_1)^{(1-\delta)l}\Big)\\&\leqslant\frac{\mathbf{E}\Big[\sum_{j=1}^{M_l}P(\xi_j^{(k(l)-l)}=1\,|\,M_l)-\sum_{j=1}^{M_l}\xi_j^{(k(l)-l)}\Big]}{\frac{\rho}{4}(\mathbf{E}M_1)^{(1-\delta)l}}\\&=\frac{4}{\rho}(\mathbf{E}M_1)^{-(1-\delta)l}.\end{aligned}$$

由 Borel-Cantelli 引理得：

$$P\left(\sum_{j=1}^{M_l}\xi_j^{(k(l)-l)} < \frac{\rho}{4}M_l, M_l \geqslant (\mathbf{E}M_1)^{(1-\delta)l}, \text{对 } l\ i.o.\right) = 0.$$

注意到

$$\frac{M_l}{(\mathbf{E}M_1)^l} \to W > 0 \quad P\text{-}a.s.\ on\{K \neq \varnothing\},$$

因此，对$\{K \neq \varnothing\}$ 中的 $a.s.$ 的 ω，l 充分大时（l 依赖 ω），有

$$\sum_{j=1}^{M_l}\xi_j^{(k(l)-l)} > \frac{\rho}{4}M_l.$$

所以，

$$\begin{aligned}
&\liminf_{l\to\infty}\left\{\frac{\log\#\mathscr{V}_l}{l}\right\} \\
&\geqslant \liminf_{l\to\infty}\frac{\log\frac{\rho}{4}M_l}{l} + \lim_{l\to\infty}\frac{k(l)-l}{l}(\psi(t)-\varepsilon) \\
&= \log\mathbf{E}M_1 + \left(\frac{\log n}{\log m} - 1\right)(\psi(t)-\varepsilon).
\end{aligned}$$

由 ε 的任意性知：对$\{K \neq \varnothing\}$ 中 $a.s.$ 的 ω 有：

$$\liminf_{l\to\infty}\left\{\frac{\log\#\mathscr{V}_l}{l}\right\} \geqslant d\log n.$$

引理 3.5 证毕.

定理 3.1 的证明：由引理 3.3 和引理 3.4，我们有

$$\overline{\dim}_K(K) \leqslant d \quad P\text{-}a.s.$$

下面我们证明反向不等式.

由引理 3.3，只需证明

$$\limsup_{l\to\infty}\frac{1}{l}\log C_l \geqslant d\log n \quad P\text{-}a.s.\ on\{K \neq \varnothing\},$$

其中C_l表示用l阶“逼近方块”覆盖K时所需的l阶“逼近方块”的最小个数，记

$\mathscr{W}_l = \{R_l(p,q): R_l(p,q)$ 为 l 阶“逼近方块”，且 $R_l(p,q)^\circ \cap K \neq \varnothing\}$，

则 $\#C_l \geqslant \#\mathscr{W}_l$.

若 $R_l(p,q) \in \mathscr{V}_l$，则 $R_l(p,q)$ 至少包含一个 $k(l)$ 阶基本矩

形，而每一个 $k(l)$ 阶基本矩形内部包含有 K 中的点的概率为 ρ，并且这些事件相互独立，其中 $\rho = P(M_l$ 不趋于 $0) > 0$. 因此，

$$\# \mathscr{W}_l \geqslant \sum_{j=1}^{\# \mathscr{V}_l} \eta_j^{(l)}, \tag{3.6}$$

其中 $\{\eta_j^{(l)}, j \geqslant 1\}$ 关于 $\# \mathscr{V}_l$ 条件独立，具有相同的条件分布，且 $P(\eta_j^{(l)} \in \{0,1\}) = 1$，此外还满足

$$P(\eta_j^{(l)} \mid \# \mathscr{V}_l) \geqslant \rho,$$

而 $\{\# \mathscr{V}_l \to \infty\} \supset \{K \neq \varnothing\}$ P-$a.s.$，由强大数定理有：

$$\lim_{l \to \infty} \frac{1}{\# \mathscr{V}_l} \sum_{j=1}^{\# \mathscr{V}_l} \eta_j^{(l)} \geqslant \rho \quad P\text{-}a.s. on\{K \neq \varnothing\}.$$

因此，$\liminf\limits_{l \to \infty} \dfrac{\# \mathscr{W}_l}{\# \mathscr{V}_l} \geqslant \rho \quad P\text{-}a.s. on\{K \neq \varnothing\}.$ (3.7)

由引理 3.5 和(3.7)，有

$$\liminf_{l \to \infty} \frac{\log \# \mathscr{W}_l}{l} \geqslant d \log n \quad P\text{-}a.s. on\{K \neq \varnothing\},$$

故

$$\overline{\dim}_K(K) \geqslant d \log n \quad P\text{-}a.s. on\{K \neq \varnothing\}. \tag{3.8}$$

综合(3.6) 和(3.8) 得：

$$\overline{\dim}_K(K) = \frac{\log \mathbf{E} M_1}{\log n} + \left(1 - \frac{\log m}{\log n}\right) \frac{\psi(t)}{\log m} \quad P\text{-}a.s. on\{K \neq \varnothing\}.$$

定理 3.1 证毕.

推论 3.1

$$\mathrm{Dim}(K) = \frac{\log \mathbf{E} M_1}{\log n} + \left(1 - \frac{\log m}{\log n}\right) \frac{\psi(t)}{\log m} \quad P\text{-}a.s. on\{K \neq \varnothing\}.$$

证 由定理3.1、引理3.1和引理3.2以及统计自仿射集 K 的结构立即得到.（注意此时 $\overline{\dim}_K(K)$ 和 $\mathrm{Dim}K$ 为常数，P-$a.s. on\{K \neq \varnothing\}$，见后面引理 4.9 的证明).

§4 统计自仿射集的 Hausdorff 维数

沿用以前的记号，我们用 dim(·) 表示 Hausdorff 维数，K 是 §1 所定义的统计自仿射集.

附注 4.1 $\forall y \in [0,1]$，记 y 的 m 进制表示法为 $y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j m^{-j}, 0 \leqslant y_j \leqslant m-1$，则当 $y \overline{\in} \{jm^{-k}: 0 \leqslant j \leqslant m^k, k \geqslant 1\}$ 时，上述表示唯一. 当 $y \in \{jm^{-k}: 0 \leqslant j \leqslant m^k, k \geqslant 1\}$ 时，我们采用有限表示.

$\forall F \subset \mathbb{R}^2$，定义

$$\mathrm{proj}_2 F = \{y \in \mathbb{R} : (\mathbb{R} \times \{y\}) \cap F \neq \varnothing\}.$$

引理 4.1

$$\dim(\mathrm{proj}_2 K) = \overline{\dim}_K(\mathrm{proj}_2 K) = \frac{\psi(t)}{\log m} \quad P\text{-}a.s.\, on\{K \neq \varnothing\},$$

(其中 $\psi(t)$ 如引理 2.3).

证 $\forall l \geqslant 1$，$\mathrm{proj}_2 K_l$ 为一些形如$[jm^{-l}, (j+1)m^{-l}]$的区间之并，其个数为 Z_l，由定理 2.5，我们有

$$\overline{\dim}_K(\mathrm{proj}_2 K) \leqslant \frac{\psi(t)}{\log m} \quad P\text{-}a.s.\, on\{K \neq \varnothing\}.$$

另一方面，$\forall \varepsilon > 0$，由定理 2.4，存在 $k_0 \geqslant 1$，使得

$$\mathbf{E}Z_k \geqslant \exp\{k(\psi(t) - \varepsilon)\}, \forall k \geqslant k_0,$$

注意到$\mathrm{proj}_2 K$ 是一个类随机Cantor 集，因此，由[159](定理1.1)，

$$\dim(\mathrm{proj}_2 K) = \dim\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{proj}_2 K_{ik_0}\right) \geqslant \frac{\psi(t) - \varepsilon}{\log m} \quad P\text{-}a.s.\, on\{K \neq \varnothing\}.$$

由 ε 的任意性，有

$$\dim(\mathrm{proj}_2 K) \geqslant \frac{\psi(t)}{\log m} \quad P\text{-}a.s.\, on\{K \neq \varnothing\}.$$

引理 4.1 证毕.

记 $\alpha = \max\{t, \log_n m\}$.

引理 4.2　若 $\psi'(1) \leqslant 0$,($\psi(t)$ 如引理 4.1),则

$$\dim(K) = \overline{\dim}_K(K) = \frac{\psi(\alpha)}{\log m} \quad P\text{-}a.s. on\{K \neq \varnothing\}. \tag{4.1}$$

证　由附注 2.4 知,当 $\psi'(1) \leqslant 0$ 时,$t = 1$,因此由 $m < n$ 及 α 之定义得:

$$\alpha = t = 1$$

故

$$\psi(\alpha) = \psi(t) = \psi(1) = \log \mathrm{E} M_1.$$

由定理 3.1,

$$\overline{\dim}_K(K) = \frac{\psi(\alpha)}{\log m} \quad P\text{-}a.s. on\{K \neq \varnothing\},$$

由引理 4.1,

$$\dim(K) \geqslant \dim(\mathrm{proj}_2 K) = \frac{\psi(\alpha)}{\log m} \quad P\text{-}a.s. on\{K \neq \varnothing\},$$

因此,

$$\dim(K) = \overline{\dim}_K(K) = \frac{\psi(\alpha)}{\log m} \quad P\text{-}a.s. on\{K \neq \varnothing\}.$$

引理 4.2 证毕.

下面我们考虑 $\psi'(1) > 0$ 时统计自仿射集 K 的 Hausdorff 维数,注意:$\psi'(1) > 0$ 时,$0 \leqslant t \leqslant \alpha < 1$,且 $\forall\, \theta > t, \psi'(\theta) > 0$.

首先介绍分形几何中两个常用的基本结论.

设 $F \subset \mathbf{R}^2, y \in \mathbb{R}$,记

$F(y) = \{x \in \mathbb{R}, (x, y) \in F\}$,

$\mathrm{proj}_2 F = \{y \in \mathbb{R}, F(y) \neq \varnothing\}$.

引理 4.3(Marstrand 定理)　若 $\forall\, y \in \mathrm{proj}_2 F$, $\dim(F(y)) \geqslant \delta_1, \dim(\mathrm{proj}_2 F) \geqslant \delta_2$,则

$$\dim(F) \geqslant \delta_1 + \delta_2$$

证明可参见[58]第 7 章.

设 υ 为$\mathbb{R}^l$ 中的一个 Borel 概率测度,定义 υ 的 Hausdorff 维数为

$$\dim(v)=\inf\{\dim(F);v(F)=1,F\subset\mathbb{R}^l\}.$$

引理 4.4 若存在正数 δ_1,δ_2 使得

$$\delta_1\leqslant\liminf_{r\to0}\frac{\log v(B(x,r))}{\log r}\leqslant\limsup_{r\to0}\frac{\log v(B(x,r))}{\log r}\leqslant\delta_2\quad v\text{-}a.s.,$$

则

$$\delta_1\leqslant\dim(v)\leqslant\delta_2,$$

其中 $B(x,r)$ 表示以 x 为心，r 为半径的开球.

证明可参见[235].

设 $\{\xi_j,j\geqslant1\}$ 为 $i.i.d$ 的 $\mathbf{O}$ 值随机变量列，且与 $\{\mathscr{F}_k,k\geqslant1\}$ 独立，ξ_1 的分布为：

$$P(\xi_1=j)=e^{-\psi(\theta)}g(j)^\theta,(j\in\mathbf{O})\tag{4.2}$$

其中 $\theta\in[0,1]$ 固定，即 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$ 是随机环境中的分枝过程 $\{N_k(\xi),k\geqslant1\}$ 的随机环境，且有(4.2)型的分布.(如有必要，利用乘积空间的技巧，扩大概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，这种随机环境总是存在的，为简单计，扩大的概率空间仍用$(\Omega,\mathscr{F},P)$记之).

设 u_θ 为随机变量 $\sum_{j=1}^{\infty}\xi_jm^{-j}$ 的分布，记

$$g(\xi_k)=\sum_{j\in\mathbf{O}}\mathbf{E}N(j)\mathbf{1}_{\{\xi_k=j\}},$$

引理 4.5 (i) $\mathbf{E}\log g(\xi_1)=\psi'(\theta)$;

(ii) $\mathrm{Var}(\log g(\xi_1))=\psi''(\theta)$.

证 (i)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\log g(\xi_1)&=\mathbf{E}(\log\sum_{j\in\mathbf{O}}\mathbf{E}(N(j))\mathbf{1}_{\{\xi_1=j\}}),\\&=\sum_{j\in\mathbf{O}}\int_{\{\xi_1=j\}}\log\mathbf{E}(N(j))dP\\&=\sum_{j\in\mathbf{O}}\log\mathbf{E}(N(j))P(\xi_1=j)\\&=\sum_{j\in\mathbf{O}}\log\mathbf{E}(N(j))e^{-\psi(\theta)}(\mathbf{E}(N(j)))^\theta\\&=\frac{\sum_{j\in\mathbf{O}}[\log\mathbf{E}(N(j))]\cdot(\mathbf{E}(N(j)))^\theta}{\sum_{j\in\mathbf{O}}(\mathbf{E}(N(j)))^\theta}\end{aligned}$$

$$= \psi'(\theta).$$

(i) 得证. 类似可证(ii). 引理 4.5 证毕.

引理 4.6 设 $\theta > t, G \subset [0,1]$ 为 Borel 集满足 $u_\theta(G) = 1$，则

$$\dim(G \cap (\text{proj}_2 K)) \geqslant \frac{\psi(\theta) - \theta\psi'(\theta)}{\log m} \quad P\text{-}a.s.\, on\{K \neq \varnothing\}. \tag{4.4}$$

证 $P(u_\theta(\text{proj}_2 K) = 0)$ 是方程

$$z = \sum_{j=0}^{\infty} z^j P(M_1 = j)$$

的根，(类似结果引理 4.9 将详细证明，此处从略)，而此方程的根为 1 和 $P(K = \varnothing)$，由引理 2.2 及引理 4.5(i) 有：

$$\mathbf{E}(\log \mathbf{E}[N(\xi_1) | \xi_1]) = \psi'(\theta) > 0,$$

因此由 Fubini 定理和定理 2.2(ii)，有：

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}[u_\theta(\text{proj}_2 K)] \\ &\quad = \int_{[0,1]} P(y \in \text{proj}_2 K) u_\theta(dy) \\ &\quad = P(N_k(\xi) \geqslant 1, \forall\, k \geqslant 1) > 0, \end{aligned}$$

其中上式第二个等号根据以下讨论得到：

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]} P(y \in \text{proj}_2 K) u_\theta(dy) \\ &= \int_\Omega P(\{\omega : \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j(\omega) m^{-j} \in \text{proj}_2 K(\omega')\}) P(d\omega') \\ &\overset{\text{Fubini定理}}{=} P \times P(\{(\omega, \omega') : \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j(\omega) m^{-j} \in \text{proj}_2 K(\omega')\}) \\ &= \lim_{\delta \to 0} \lim_{l \to \infty} \sum_{(i_1, \cdots, i_l) \in \sigma^l} P \times P(\{(\omega, \omega') : \sum_{j=1}^{l} i_j m^{-j} \in (\text{proj}_2 K(\omega'))^\delta, \\ &\qquad (\xi_1(\omega), \cdots, \xi_l(\omega)) = (i_1, i_2, \cdots, i_l)\}) \\ &= \lim_{\delta \to 0} \lim_{l \to \infty} \sum_{(i_1, \cdots, i_l) \in \sigma^l} P(\sum_{j=1}^{l} i_j m^{-j} \in (\text{proj}_2 K)^\delta) \cdot \\ &\quad P((\xi_1, \cdots, \xi_l) = (i_1, \cdots, i_l)), \end{aligned}$$

其中 $(\text{proj}_2 K)^\delta = \{x \in \mathbb{R} : \exists\, y \in \text{proj}_2 K \text{ 使得 } |y - x| < \delta\}$.

而

$$P(\omega: N_k(\xi(\omega))(\omega) \geqslant 1, \forall\ k \geqslant 1)$$

$$= P(\omega: \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j(\omega) m^{-j} \in \mathrm{proj}_2 K(\omega))$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \lim_{l \to \infty} \sum_{(i_1, \cdots, i_l) \in \mathcal{O}^l} P(\omega: \sum_{j=1}^{l} i_j m^{-j} \in (\mathrm{proj}_2 K(\omega))^{\delta},$$

$$(\xi_1(\omega), \cdots, \xi_p(\omega)) = (i_1, \cdots, i_l))$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \lim_{l \to \infty} \sum_{(i_1, \cdots, i_l) \in \mathcal{O}^l} P(\sum_{j=1}^{l} i_j m^{-j}$$

$$\in (\mathrm{proj}_2 K)^{\delta}) P((\xi_1, \cdots, \xi_l) = (i_1, \cdots, i_l)).$$

又因为$\{u_\theta(\mathrm{proj}_2 K) > 0\} \subset \{K \neq \varnothing\}$,故

$$\{u_\theta(\mathrm{proj}_2 K) > 0\} = \{K \neq \varnothing\} \quad P\text{-}a.s.$$

从而

$$P\{u_\theta(\mathrm{proj}_2 K) > 0 | K \neq \varnothing) = 1.$$

$\forall\ A \subset [0,1]$,定义

$$\upsilon_\theta(A) = \frac{u_\theta(A \cap \mathrm{proj}_2 K)}{u_\theta(\mathrm{proj}_2 K)}, (约定 \frac{0}{0} = 0),$$

因此,对 $P\text{-}a.s.$ 的 $\omega \in \{K \neq \varnothing\}$,$\upsilon_\theta$ 为$[0,1]$上的概率测度.

$\forall\ y \in [0,1], 0 < r < 1$,有

$$\frac{\log \upsilon_\theta(B(y,r))}{\log r} = \frac{\log u_\theta(B(y,r) \cap \mathrm{proj}_2 K)}{\log r} - \frac{\log u_\theta(\mathrm{proj}_2 K)}{\log r}$$

$$\geqslant \frac{\log u_\theta(B(y,r))}{\log r} - \frac{\log u_\theta(\mathrm{proj}_2 K)}{\log r},$$

因此,

$$\liminf_{r \to 0} \frac{\log \upsilon_\theta(B(y,r))}{\log r} \geqslant \liminf_{r \to 0} \frac{\log u_\theta(B(y,r))}{\log r}.$$

另一方面,

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log u_\theta(B(x,r))}{\log r} = \frac{\psi(\theta) - \theta\psi'(\theta)}{\log m} \quad u_\theta\text{-}a.s. \qquad (*)$$

为证(*),我们只需证

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\log u_\theta([x,x+m^{-k}])}{-k\log m}=\frac{\psi(\theta)-\theta\psi'(\theta)}{\log m}\quad u_\theta\ a.s.\ in\Gamma_\theta$$
$$\triangleq \mathrm{supp}(u_\theta).$$

$\forall\ x\in\Gamma_\theta$，总有$(x_1,x_2,\cdots)\in \mathbf{O}^\infty$，使得

$$x=\sum_{j=1}^{\infty}x_j m^{-j}.$$

令 $\pi_j(x)=x_j,j\geqslant 1$.

$$r_j^\theta(x_1,x_2,\cdots)=u_\theta(\pi_j^{-1}(x_j)),j\geqslant 1,$$

则 π_j 是$(\Gamma_\theta,\mathscr{B}(\Gamma_\theta),u_\theta)$ 到 $\mathbf{O}$ 上的随机变量，且$\{\pi_j:j\geqslant 1\}$ 独立，$P\xi_j^{-1}=u_\theta\pi_j^{-1},(j\geqslant 1)$.

$\forall\ x=\sum_{j=1}^{\infty}x_jm^{-j}\in\Gamma_\theta$，取

$$x^*=\sum_{j=1}^{k}x_jm^{-j},x^{**}=\sum_{j=1}^{k+1}x_jm^{-j}+m^{-k-1},$$

由于$m\geqslant 2$，故

$$[x^{**},x^{**}+m^{-k-1}]\subset[x,x+m^{-k}]\subset[x^*,x^*+m^{-k+1}],$$

故在估计$\log u_\theta([x,x+m^{-k}])$时，只需对下述形式的

$$x=\sum_{j=1}^{k}x_jm^{-j}$$

来计算即可，而

$$\begin{aligned}
&\log u_\theta([\sum_{j=1}^{k}x_jm^{-j},\sum_{j=1}^{k}x_jm^{-j}+m^{-k}])\\
&=\log u_\theta(\{x\in\Gamma_\theta:\pi_1(x)=x_1,\cdots,\pi_k(x)=x_k\})\\
&=\log u_\theta\Big(\prod_{j=1}^{k}\pi_j^{-1}(\{x_j\})\Big)\\
&=\sum_{j=1}^{k}\log u_\theta\pi_j^{-1}(\{x_j\})\\
&=\sum_{j=1}^{k}\log r_j^\theta(x_1,x_2,\cdots) \qquad (**)
\end{aligned}$$

显然$\{r_j^\theta,j\geqslant 1\}$是概率空间$(\mathbf{O}^\infty,\mathscr{B}(\mathbf{O}^\infty),\bigtimes_{k=1}^{\infty}u_\theta\pi_k^{-1})$上的独立同分

布随机变量列，故

$$\int_{\mathbf{O}^\infty}\log r_1^\theta(x_1,x_2,\cdots)\mathop{\times}_{k=1}^{\infty}u_\theta\pi_k^{-1}(dx_1dx_2\cdots)$$

$$=\int_{\mathbf{O}}\log u_\theta\pi_1^{-1}(x_1)(u_\theta\pi_1^{-1})(dx_1)$$

$$=\sum_{i\in\mathbf{O}}\log[u_\theta\pi_1^{-1}(i)]\cdot u_\theta\pi_1^{-1}(i)$$

$$=\sum_{i\in\mathbf{O}}[\log P(\xi_1=i)]P(\xi_1=i)$$

$$=\sum_{i\in\mathbf{O}}[\log(e^{-\psi(\theta)}g(i)^\theta)]P(\xi_1=i)$$

$$=-\psi(\theta)+\sum_{i\in\mathbf{O}}(\theta\log g(i))P(\xi_1=i)$$

$$=-\psi(\theta)+\theta\mathbf{E}(\log g(\xi_1))$$

$$\overset{\text{引理4.5(i)}}{=}-\psi(\theta)-\theta\psi'(\theta) \qquad (***)$$

再用强大数定理，(由(**)，(***))，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\log u_\theta([x,x+m^{-k}])}{-k\log m}=\frac{\psi(\theta)-\theta\psi'(\theta)}{\log m}\quad u_\theta\text{-}a.s.\ in\Gamma_\theta.$$

(*)得证.

由(*)式，有：对 P-$a.s.\ \omega\ on\{K\neq\varnothing\}$，

$$\liminf_{r\to0}\frac{\log v_\theta(B(x,r))}{\log r}\geqslant\frac{\psi(\theta)-\theta\psi'(\theta)}{\log m}\quad v_\theta\text{-}a.s..$$

设 $G\subset[0,1]$ 为任一满足 $u_\theta(G)=1$ 的 Borel 集，则 $v_\theta(G\cap\mathrm{proj}_2K)=1$，因此

$$\begin{aligned}\dim(G\cap\mathrm{proj}_2K)&\\ &\geqslant\dim(v_\theta)\\ &\geqslant\frac{\psi(\theta)-\theta\psi'(\theta)}{\log m}\quad P\text{-}a.s.\ on\{K\neq\varnothing\}.\end{aligned}$$

引理 4.6 证毕.

引理 4.7 设 $\forall\ j\in\mathbf{O},\mathbf{E}N(j)>1$，则 $\forall\ \theta>t$，有：

$$u_\theta\Big(y\in[0,1]:\dim(K(y))\geqslant\frac{\psi'(\theta)}{\log m}\Big)=u_\theta(\mathrm{proj}_2K)\quad P\text{-}a.s.\ on\{K\neq\varnothing\}. \tag{4.5}$$

其中 t 如引理 2.3 中所定义，$K(y)=\{x\in[0,1]:(x,y)\in K\}$ 为 K 的 y 截口.

证 为证(4.5)，只需证明

$$\dim(K(\xi))\geqslant\frac{\psi'(\theta)}{\log m}\quad P\text{-}a.s.\ on\{K(\xi)\neq\varnothing\},\tag{4.6}$$

其中 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 为 $i.i.d.$ **O** 值随机变量序列满足

$$P(\xi_1=j)=e^{-\psi(\theta)}g(j)^{\theta},$$

$$K(\xi)\triangleq K\cap\{[0,1]\times(\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i m^{-i})\}.$$

因为若(4.6)成立，即

$$\dim(K(\xi))\geqslant\frac{\psi'(\theta)}{\log m}\quad P\text{-}a.s.\ on\ \{K(\xi)\neq\varnothing\},$$

从而

$$P(\dim(K(\xi))\geqslant\frac{\psi'(\theta)}{\log m},K(\xi)\neq\varnothing)=P(K(\xi)\neq\varnothing),$$

因此

$$P\times P((\omega,\omega'):\dim(K(\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j(\omega)m^{-j})(\omega'))\geqslant\frac{\psi'(\theta)}{\log m},$$

$$K(\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j(\omega)m^{-j})(\omega')\neq\varnothing)$$

$$=P\times P((\omega,\omega'):K(\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j(\omega)m^{-j})(\omega')\neq\varnothing),$$

所以

$$\mathbf{E}(u_\theta\{y\in[0,1]:\dim(K(y))\geqslant\frac{\psi'(\theta)}{\log m},K(y)\neq\varnothing\})$$

$$=\mathbf{E}(u_\theta\{y\in[0,1]:K(y)\neq\varnothing\}),$$

故

$$u_\theta\{y\in[0,1]:\dim(K(y))\geqslant\frac{\psi'(\theta)}{\log m},K(y)\neq\varnothing\}$$

$$=u_\theta\{y\in[0,1]:K(y)\neq\varnothing\}\quad P\text{-}a.s.,$$

注意到当 $\psi'(1)>0$，$\psi'(\theta)>0$，$\forall\, t<\theta\leqslant 1$，因此有：

$$u_\theta\{y\in[0,1]:\dim(K(y))\geqslant\frac{\psi'(\theta)}{\log m}\}=u_\theta(\mathrm{proj}_2K)\quad P\text{-}a.s.$$

故(4.5)成立.

现往证(4.6)成立.

$\forall\, k \geqslant 1, K_k(\xi)$ 为一些长度为 n^{-k} 的闭区间之并，其个数为 $N_k(\xi)$，在 $K_k(\xi)$ 上取随机概率测度 $\lambda_k = \lambda_k(\omega)\,(k \geqslant 1)$ 如下：对任意 $A = [a, a + n^{-k}] \subset K_k(\xi)$，有 $\lambda_k(A) = \dfrac{1}{N_k(\xi)}$，(注意：在$\{K \neq \varnothing\}$ 上一切 $N_k(\xi) \geqslant 1$)，记 λ 为$\{\lambda_k, k \geqslant 1\}$ 的一个弱收敛极限，则显然 λ 支撑在 $K(\xi)$ 上.

$\forall\, k \geqslant 1$，记$J_k^{(i)}, i = 1, 2, \cdots, N_k(\xi)$，为组成$K_k(\xi)$ 的长度为$\dfrac{1}{n^k}$ 的闭区间，则 $\forall\, r \geqslant 1$，

$$\lambda_{k+r}(J_k^{(i)}) = \frac{N_r^{(i)}(\sigma^k \xi)}{N_{k+r}(\xi)},$$

其中σ 为$\mathbf{O}^\infty$ 上的推移算子，(即$\sigma(\xi_1, \xi_2, \cdots) = (\xi_2, \xi_3, \cdots)$)，在已知$\xi$ 的条件下，$N_r^{(i)}(\sigma^k \xi)$ 与 $N_r(\sigma^k(\xi))$ 同分布，并且在已知ξ 和 $N_k(\xi)$ 的条件下，过程$\{N_r^{(i)}(\sigma^k(\xi)), r \geqslant 0\}, i = 1, 2, \cdots N_k(\xi)$，相互独立.

注意到

$$N_{k+r}(\xi) = \sum_{i=1}^{N_k(\xi)} N_r^{(i)}(\sigma^k \xi),$$

由定理 2.1，存在随机变量 $N_\infty^{(i)}(\sigma^k \xi)$ 和 $N_\infty(\xi)$ 使得

$$\lambda(J_k^{(i)}) = \frac{N_\infty^{(i)}(\sigma^k \xi)}{\sum_{i=1}^{N_k(\xi)} N_\infty^{(i)}(\sigma^k \xi)} = \frac{N_\infty^{(i)}(\sigma^k \xi)}{N_\infty(\xi) \prod_{v=1}^{k} \mathbf{E}[N(\xi_v \mid \xi)]} \tag{4.7}$$

因为$\forall\, i \in \mathbf{O}, \mathbf{E}N(i) > 1$，由定理 2.3，有：

$$\mathbf{E}N_\infty^2(\xi) < \infty \text{ 且 } \mathbf{E}N_\infty(\xi) = 1.$$

$\forall\, \varepsilon > 0, \forall\, k \geqslant 1$，由契比谢夫不等式：

$$P(N_\infty(\xi) \geqslant e^{\varepsilon k}) \leqslant e^{-\varepsilon k},$$

再用 Cauchy-Schwartz 不等式有：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}\{N_\infty(\xi) \mathbf{1}_{\{N_\infty(\xi) \geqslant e^{\varepsilon k}\}}\}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}(\mathbf{E}N_{\infty}^{2}(\xi))^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\varepsilon k}{2}}<\infty.$$

记 $\mathscr{B}_k=\{i:i\in\{1,2,\cdots,N_k(\xi)\},N_{\infty}^{(i)}(\sigma^k\xi)\geqslant e^{\varepsilon k}\}$，

注意到 $N_{\infty}(\xi)$ 和 $N_{\infty}^{(i)}(\sigma^k\xi)$ 具有相同的分布，我们有：

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}((N_k(\xi))^{-1}\sum_{i\in\mathscr{B}_k}N_{\infty}^{(i)}(\sigma^k\xi))\mathbf{1}_{\{N_k(\xi)\geqslant 1\}}\Big)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}\Big[(N_k(\xi))^{-1}\sum_{i=1}^{N_k(\xi)}N_{\infty}^{(i)}(\sigma^k\xi)\mathbf{1}_{\{N_{\infty}^{(i)}(\sigma^k\xi)\geqslant e^{\varepsilon k}\}}\mathbf{1}_{\{N_k(\xi)\geqslant 1\}}\Big]\\
&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}\big[N_{\infty}(\xi)\mathbf{1}_{\{N_{\infty}(\xi)\geqslant e^{\varepsilon k}\}}\big]<\infty,
\end{aligned}$$

所以，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(N_k^{-1}(\xi)\sum_{i\in\mathscr{B}_k}N_{\infty}^{(i)}(\sigma^k\xi)\Big)\mathbf{1}_{\{N_k(\xi)\geqslant 1\}}<\infty\quad P\text{-}a.s.. \tag{4.8}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i\in\mathscr{B}_k}\lambda(J_k^{(i)})\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sum_{i\in\mathscr{B}_k}N_{\infty}^{(i)}(\sigma^k\xi)}{N_{\infty}(\xi)\prod_{v=1}^{k}\mathbf{E}(N(\xi_v)\mid\xi)}\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{N_k(\xi)N_k^{-1}(\xi)\sum_{i\in\mathscr{B}_k}N_{\infty}^{(i)}(\sigma^k\xi)}{N_{\infty}(\xi)\prod_{v=1}^{k}\mathbf{E}(N(\xi_v)\mid\xi)}
\end{aligned}$$

又由定理 2.1，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{N_k(\xi)}{\prod_{v=1}^{k}\mathbf{E}(N(\xi_v)\mid\xi)}=N_{\infty}(\xi)\quad P\text{-}a.s..$$

注意到

$$\{K(\xi)\neq\varnothing\}=\{N_k(\xi)\geqslant 1,\forall\, k\geqslant 1\},$$

由定理 2.2，$P(N_{\infty}(\xi)\mid K(\xi)\neq\varnothing)=1$. 因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i\in\mathscr{B}_k}\lambda(J_k^{(i)}) < \infty, P\text{-}a.s.\ on\{K(\xi)\neq\varnothing\}. \tag{4.9}$$

设 $x\in\operatorname{supp}(\lambda)$，其中 $\operatorname{supp}(\lambda)$ 表示 λ 的支撑，则 $x\in K(\xi)$，因此，$\forall\ k\geqslant 1$，存在 $i\in\{1,2,\cdots,N_k(\xi)\}$，使得 $x\in J_k^{(i)}$，记此区间为 $J_k(x)$. $J_k(x)$ 至多与 $\{J_k^{(i)}: i=1,2,\cdots,N_k(\xi), J_k^{(i)}\neq J_k(x)\}$ 中两个区间相交. 记之为 $J_k'(x), J''_k(x)$，则由 (4.8)，(4.9) 以及 Borel-Cantelli 引理，

$$\lambda\{x:\lambda(J_k(x))+\lambda(J_k'(x))+\lambda(J_k''(x))$$
$$\geqslant\frac{3e^{\varepsilon k}}{N_\infty(\xi)\prod_{v=1}^{k}\mathbf{E}N(\xi_v\mid\xi)}, i.o.\}$$
$$=0. \tag{4.10}$$

而由强大数定理，

$$\left[\prod_{v=1}^{k}\mathbf{E}(N(\xi_v)\mid\xi)\right]^{\frac{1}{k}}\to e^{\psi'(\theta)}\quad P\text{-}a.s.$$

从而有：

$$\lambda\{x:\lambda(J_k(x))+\lambda(J_k'(x))+\lambda(J_k'(x))$$
$$\geqslant\frac{3e^{2\varepsilon k}}{N_\infty(\xi)}e^{-k\psi'(\theta)}\quad i.o.\}=0. \tag{4.11}$$

$\forall\ x\in\operatorname{supp}(\lambda), r>0$ 充分小，取 $k\geqslant 1$ 使得

$$n^{-k-1}\leqslant r<n^{-k},$$

则 $B(x,r)\subset J_k(x)\cup J_k'(x)\cup J_k''(x)$，由 (4.11)，对 $\{K(\xi)\neq\varnothing\}$ 中的几乎一切 ω，有：

$$\liminf_{r\to 0}\frac{\log\lambda(B(x,r))}{\log r}\geqslant\frac{\psi'(\theta)-\varepsilon}{\log n}\quad\lambda\text{-}a.s.,$$

由 ε 的任意性，

$$\dim(\lambda)\geqslant\frac{\psi'(\theta)}{\log n}\quad P\text{-}a.s.\ on\{K(\xi)\neq\varnothing\}.$$

故

$$\dim(K(\xi))\geqslant\frac{\psi'(\theta)}{\log n}\quad P\text{-}a.s.\ on\{K(\xi)\neq\varnothing\}.$$

引理 4.7 证毕.

推论 4.1 设 $\psi'(1)>0$，若对每个 $i\in \mathbf{O}$，$\mathbf{E}N(i)>1$，则

$$\dim(K)\geqslant\frac{\psi(\alpha)}{\log m}\quad P\text{-}a.s.\ on\{K\neq\varnothing\},$$

其中 $\alpha=\max\{t,\frac{\log m}{\log n}\}$，($t$ 之定义见引理2.3).

证 $\forall\ \theta>t$，由引理4.7知：对几乎所有的 $\omega\in\{K\neq\varnothing\}$，存在一个Borel集 $G\subset[0,1]$ 使得：$u_\theta(G)=1$ 且 $\forall\ y\in G\cap \mathrm{proj}_2K$，

$$\dim(K(y))\geqslant\frac{\psi'(\theta)}{\log n}.$$

由引理4.6，

$$\dim(G\cap\mathrm{proj}_2K)\geqslant\frac{\psi(\theta)-\theta\psi'(\theta)}{\log m}.$$

令

$$K'=K\backslash(\bigcup_{x\in G\cap\mathrm{proj}_2K}[0,1]\times\{x\})^c,$$

则由引理4.3

$$\dim(K)\geqslant\dim(K')\geqslant\frac{\psi'(\theta)}{\log n}+\frac{\psi(\theta)-\theta\psi'(\theta)}{\log m}\quad P\text{-}a.s.\ on\{K\neq\varnothing\},$$

而

$$\sup_{1\geqslant\theta>t}\left(\frac{\psi'(\theta)}{\log n}+\frac{\psi(\theta)-\theta\psi'(\theta)}{\log m}\right)=\frac{\psi'(\alpha)}{\log n}+\frac{\psi(\alpha)-\alpha\psi'(\alpha)}{\log m},$$

当 $t\geqslant\frac{\log m}{\log n}$ 时，$\alpha=t$，此时 $\psi'(\alpha)=0$；当 $t<\frac{\log m}{\log n}$ 时，$\alpha=\frac{\log m}{\log n}$.

总之，

$$\dim(K)\geqslant\frac{\psi(\alpha)}{\log m}\quad P\text{-}a.s.\ on\{K\neq\varnothing\}.$$

推论4.1证毕.

下面我们设法在推论4.1中去掉假定 $\mathbf{E}N(i)>1,\forall\ i\in\mathbf{O}$. 为此，只需在引理4.7中去掉假设 $\mathbf{E}N(i)>1,\forall\ i\in\mathbf{O}$. $\forall\ r\geqslant 2$，定义

$$\mathbf{O}^r_+ = \{(y_1, y_2, \cdots, y_r) \in \mathbf{O}^r : \prod_{v=1}^{r} g(y_v) > 1\},$$

$$\psi_r(\theta) = \log\{\sum_{(y_1,\cdots,y_r)\in \mathbf{O}^r_+} \prod_{v=1}^{r} g(y_v)^\theta\}, \text{其中 } g(i) = \mathbf{E}N(i).$$

令$\{\xi_j^{(r)}, j \geqslant 1\}$为$i.i.d.$的$\mathbf{O}^r_+$值随机变量，其分布为

$$P(\xi_j^{(r)} = (y_1, y_2, \cdots, y_r)) = e^{-\psi_r(\theta)} \prod_{v=1}^{r} g(y_v)^\theta.$$

记$\xi_k^{(r)} = (\eta_{r(k-1)+1}, \eta_{r(k-1)+2}, \cdots, \eta_{rk})$，记随机变量$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j m^{-j}$的分布为$u_\theta^{(r)}$，注意到(2.6)，类似于引理4.6，引理4.7的方法可以证明：

引理 4.6′ 设$\theta > t, r \geqslant 2, G = G_r \subset [0,1]$为Borel集使得$u_\theta^{(r)}(G) = 1$，则

$$P(\dim(G \cap \text{proj}_2 K) \geqslant \frac{\psi_r(\theta) - \theta\psi_r'(\theta)}{r\log m} | K \neq \varnothing) > 0.$$

引理 4.7′ 设$\theta > t, r \geqslant 2$，则

$$u_\theta^{(r)}\left(y \in [0,1] : \dim(K(y)) \geqslant \frac{\psi_r'(\theta)}{r\log n} \right) = u_\theta^{(r)}(\text{proj}_2 K)$$

$$P\text{-}a.s.\ on\{u_\theta^{(r)}(\text{proj}_2 K) > 0\}.$$

同推论4.1一样，我们有

推论 4.1′ $\forall\ \theta > t, r \geqslant 2$，

$$P\left(\dim(K) \geqslant \frac{\psi_r'(\theta)}{r\log n} + \frac{\psi_r(\theta) - \theta\psi_r'(\theta)}{r\log m} \right) > 0. \tag{4.12}$$

引理 4.8 若$t < \theta < 1$，则

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1}\psi_r(\theta) = \psi(\theta); \tag{4.13}$$

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1}\psi'_r(\theta) = \psi'(\theta). \tag{4.14}$$

证 设$\beta_1, \beta_2, \cdots$为$i.i.d.$ $\mathbf{O}$值随机变量序列，其分布为

$$P(\beta_1 = j) = e^{-\psi(\theta)} g(j)^\theta, j \in \mathbf{O}.$$

注意到

$$e^{r\psi(\theta)} = \sum_{(y_1,\cdots,y_r)\in \mathbf{O}^r} \prod_{v=1}^{r} g(y_v)^\theta,$$

则

$$\frac{\exp\{\psi_r(\theta)\}}{\exp\{r\psi(\theta)\}}=\frac{\sum\limits_{(y_1,\cdots,y_r)\in\sigma_+^r}\prod\limits_{v=1}^{r}g(y_v)^\theta}{\sum\limits_{(y_1,\cdots,y_r)\in\sigma^r}\prod\limits_{v=1}^{r}g(y_v)^\theta}$$

$$=P\Big(\sum_{v=1}^{r}\log g(\beta_v)>0\Big).$$

又因为 $\mathbf{E}\log g(\beta_1)=\psi'(\theta)>0$，由强大数定理，

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\exp(\psi_r(\theta))}{\exp(r\psi(\theta))}=1,$$

故

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\psi_r(\theta)}{r}=\psi(\theta).$$

又因为 $\psi(\theta),\psi_r(\theta)$ 均为 θ 之解析函数，所以

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\psi'_r(\theta)}{r}=\psi'(\theta).$$

引理 4.9　存在非负常数 c，使得

$\dim(K)=c\quad P\text{-}a.s.\ on\{K\neq\varnothing\}$.

证　由统计自仿射集 K 的构造，K 总可表为：

$$K=\bigcup_{s=1}^{M_1}\tilde{B}_s(K^{(s)}),$$

其中 $\tilde{B}_s$ 为仿射压缩映射，在给定 M_1 的条件下，$\{K^{(s)},s=1,2,\cdots,M_k\}$ 作为随机集相互独立且与 K 同分布，因此，

$$\{\dim(K^{(s)}),s=1,2,\cdots,M_k\}$$

独立同分布且与 $\dim(K)$ 同分布，故

$$\dim(K)=\sup_{1\leqslant s\leqslant M_1}\dim(\tilde{B}_s(K^{(s)}))=\sup_{1\leqslant s\leqslant M_1}\dim(K^{(s)}).$$

因此，$\forall\ x\geqslant 0$，

$$P(\dim(K)\leqslant x)$$

$$=P((\sup_{1\leqslant s\leqslant M_1}\dim(K^{(s)}))\leqslant x)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} P(\bigcap_{s=1}^{r} \{\dim(K^{(s)}) \leqslant x\}, M_1 = r),$$

(约定 $\bigcap_{s=1}^{0} \{\dim(K^{(s)}) \leqslant x\} = \varnothing$),

$$= \sum_{r=0}^{\infty} P(\dim(K) \leqslant x)^r P(M_1 = r).$$

此即 $P(\dim(K) \leqslant x)$ 是方程

$$z = \sum_{r=0}^{\infty} P(M_1 = r) z^r$$

的一个根，而上述方程式的解为 1 或者 $P(K = \varnothing)$.

反设引理 4.9 的结论不成立，则

$P(\dim(K) \leqslant x | K \neq \varnothing)$ 是非退化分布，

则存在 $x_0 \geqslant 0$，使得

$$0 < P(\dim(K) \leqslant x_0 | K \neq \varnothing) < 1,$$

于是

$$P(\dim(K) \leqslant x_0 | K \neq \varnothing) > 0,$$
$$P(\dim(K) > x_0 | K \neq \varnothing) > 0,$$

从而

$$P(\dim(K) \leqslant x_0 | K \neq \varnothing) > 0, P(\dim(K) > x_0, K \neq \varnothing) > 0.$$

取 $\Lambda_1 = \{\dim(K) \leqslant x_0, K \neq \varnothing\}$;

$\Lambda_2 = \{\dim(K) > x_0, K \neq \varnothing\}$,

则有

$$\Lambda_1 \subset \{K \neq \varnothing\}, \ \Lambda_2 \subset \{K \neq \varnothing\},$$

且 $P(\dim(K) \leqslant x_0)$

$$= P(\dim(K) \leqslant x_0, K = \varnothing) + P(\Lambda_1)$$
$$= P(K = \varnothing) + P(\Lambda_1).$$

故

$$P(K = \varnothing) < P(\dim(K) \leqslant x_0) < 1,$$

而前面已证，$\forall\, x \geqslant 0$,

$P(\dim(K) \leqslant x)$ 不是 1 就是 $P(K = \varnothing)$,

这与上述不等式矛盾，从而引理 4.9 成立.

定理 4.1 记 $\alpha = \max\{t, \frac{\log m}{\log n}\}$，则

$$\dim(K) \geqslant \frac{\psi(\alpha)}{\log m} \quad P\text{-}a.s.\ on\ \{K \neq \varnothing\}.$$

证 仿推论 4.1 的证明方法，用引理 4.6′、引理4.7′、引理 4.8 和引理 4.9 知定理 4.1 在 $\psi'(1) > 0$ 的场合成立，再用引理 4.2 得知定理 4.1 成立.

下面我们将证明定理 4.1 中相反的不等式仍然成立，从而得到统计自仿射集 K 的 Hausdorff 维数.

设 $y \in [0,1]$，y 的 m 进制展开为 $y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j m^{-j}, y_j \in I$，$\forall\, k \geqslant 1$，定义 k 阶频率函数 $f_k(y)$ 如下：

$$f_k(y) = (f_k^{(i)}(y))_{i \in I},$$

$$f_k^{(i)}(y) = \frac{1}{k} \sum_{v=1}^{k} \mathbf{1}_{\{y_v = i\}}, i \in I.$$

附注 4.2 因为当 $i \in I \backslash \mathbf{O}$ 时，$\mathbf{E}N(i) = 0$，因此，我们只需考虑[0,1]中如下子集：

$$A = \{y \in [0,1]: y \text{ 的 } m \text{ 进制展开为} \sum_{j-1}^{\infty} y_j m^{-j}, y_j \in \mathbf{O}\}.$$

为记号简单起见，我们不妨假设 $\mathbf{O} = I$.

记 $\mathscr{P} = \{\vec{p} = (p_0, p_1, \cdots, p_{m-1}) \in [0,1]^m : \sum_{i\ 0}^{m-1} p_i = 1\}$，

$\forall\, \vec{p} \in \mathscr{P}$，定义

$$H(\vec{p}) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i, (\text{约定 } 0\log 0 = 0),$$

$\forall\, \delta > 0, \vec{p} \in P$，记

$$B_\delta(\vec{p}) = \{\vec{q} \in \mathscr{P}: |p_i - q_i| < \delta, 0 \leqslant i \leqslant m-1\},$$

$$u(\vec{p}) = \sum_{i \in I} p_i \log(\mathbf{E}N(i)),$$

$$d_1(\vec{p}) = \frac{H(\vec{p})}{\log m} + \frac{u(\vec{p})}{\log n},$$

$$d_2(\vec{p}) = \frac{H(\vec{p}) + u(\vec{p})}{\log m}.$$

$$A(\vec{p},\delta) = \{y \in [0,1]: f_k(y) \in B_\delta(\vec{p}), i.o.\},$$

$$A^*(\vec{p},\delta) = \{y \in A(\vec{p},\delta): \limsup_{k\to\infty} u(f_k(y)) \leqslant \sup_{\vec{q}\in B_\delta(\vec{p})} u(\vec{q})\},$$

$$F^*(\vec{p},\delta) = \{(x,y) \in K: y \in A^*(\vec{p},\delta)\}.$$

附注4.3 当$u(\vec{p})$大于(小于或等于0)时,$d_2(\vec{p})$大于(小于或等于)$d_1(\vec{p})$.

附注4.4 $\forall\, \delta > 0$,$[0,1]$可被有限多个$A^*(\vec{p},\delta)(\vec{p}\in \mathscr{P})$覆盖,故$K$可被有限多个$F^*(\vec{p},\delta)$覆盖,$(\vec{p}\in \mathscr{P})$.

引理4.10 对任意$\varepsilon > 0$,存在$\delta > 0$,使得$\forall\, \vec{p}\in \mathscr{P}$,有:

$$\dim(F^*(\vec{p},\delta)) \leqslant \max\{0,\min\{d_1(\vec{p}),d_2(\vec{p})\}\} + \varepsilon. \tag{4.15}$$

证 为证明引理4.10,只需证明

$$\dim(F^*(\vec{p},\delta)) \leqslant \max(0,d_1(\vec{p})) + \varepsilon \tag{4.16}$$

和

$$\dim(F^*(\vec{p},\delta)) \leqslant \max(0,d_2(\vec{p})) + \varepsilon \tag{4.17}$$

我们先证明(4.17).记$F(\vec{p},\delta) = \{(x,y) \in K:$ $y \in A(\vec{p},\delta)\}$,则$F^*(\vec{p},\delta) \subset F(\vec{p},\delta)$,从而为证明(4.17),又只需证明:

$$\dim(F(\vec{p},\delta)) \leqslant \max(0,d_2(\vec{p})) + \varepsilon.$$

$\forall\, s = (s_1,s_2,\cdots,s_k) \in I^k, \forall\, 1 \leqslant r \leqslant k$,定义

$$\overline{f}_r(s) = (\overline{f}_r^{(i)}(s))_{i\in I},$$

其中$\overline{f}_r^{(i)}(s) = \dfrac{1}{r}\sum_{v=1}^{r} \mathbf{1}_{(s_v=i)}, i \in I$;

$$A_k(\vec{p},\delta) = \{s \in I^k: \overline{f}_k(s) \in B_\delta(\vec{p})\}, (k \geqslant 1);$$

$$F_k(\vec{p},\delta) = \{(x,y) \in K_k: (y_1,y_2,\cdots,y_k) \in A_k(\vec{p},\delta)\},$$

其中$y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j m^{-j}, (k \geqslant 1)$.

则 $\forall\ k \geqslant 1, F(\vec{p},\delta) \subset \bigcup_{l \geqslant k} F_l(\vec{p},\delta)$

令

$$\mathscr{U}_k = \{[jn^{-k},(j+1)n^{-k}] \times I_s:$$
$$[jn^{-k},(j+1)n^{-k}] \times I_s \subset K_k, s \in A_k(\vec{p},\delta)\},$$

其中 I_s 之定义见附注 1.2 后面，$s \in I^k$. 则

$$\#\mathscr{U}_k = \sum_{s \in A_k(\vec{p},\delta)} N_k(s),$$

注意到若 $s \in A_k(\vec{p},\delta)$，则

$$u(\vec{f}_k(s)) \leqslant u(\vec{p}) + v\delta,$$

其中 $v = \sum_{i \in I} |\log \mathbf{E} N(i))|$，因此，$\forall\ s \in A_k(\vec{p},\delta)$，

$$\mathbf{E}(N_k(s)) = \exp\{ku(\vec{f}_k(s))\} \leqslant \exp\{ku(\vec{p}) + kv\delta\}.$$

另一方面，$\# A_k(\vec{p},\delta) \leqslant \exp\{kH(\vec{p}) + kv'(\delta)\}$，其中 $v'(\delta) > 0$，且当 $\delta \to 0$ 时，$v'(\delta)$ 关于 $\vec{p} \in \mathscr{P}$ 一致趋于 0，故

$$\mathbf{E}(\#\mathscr{U}_k) \leqslant \exp\{k(u(\vec{p}) + H(\vec{p})) + k\beta(\delta)\},$$

其中 $\beta(\delta) = v\delta + v'(\delta)$. 由契比谢夫不等式和 Borel-Cantelli 引理有：

$$P(\#\mathscr{U}_k \geqslant \exp\{k(u(\vec{p}) + H(\vec{p})) + 2k\beta(\delta)\} \text{ 对 } k\ i.o.) = 0,$$

因此，$\forall\ d > \max(d_2(\vec{p}) + \dfrac{2\beta(\delta)}{\log m}, 0)$，有

$$P(\sum_{k=1}^{\infty} m^{-kd}(\#\mathscr{U}_k) < \infty) = 1. \tag{4.18}$$

$\forall\ \rho > 0$，令 $k(\rho)$ 满足 $m^{-k(\rho)} < \rho \leqslant m^{-k(\rho)+1}$，因为 $\mathscr{U}_k$ 为 $F_k(\vec{p},\delta)$ 的一个覆盖，且若 $(x,y) \in F(\vec{p},\delta)$，有 $y \in A(\vec{p},\delta)$. 因此 $\bigcup_{k \geqslant k(\rho)} \mathscr{U}_k$ 为 $F(\vec{p},\delta)$ 的一个覆盖，又因为 $\mathscr{U}_k$ 为有限个长和宽分别为 $\dfrac{1}{n^k}$ 和 $\dfrac{1}{m^k}$ 的矩形组成，每一个这样的矩形直径小于 $\sqrt{2}\,m^{-k}$，因此，$\bigcup_{k \geqslant k(\rho)} \mathscr{U}_k$ 中每一个元素的直径小于 $\sqrt{2}\,\rho$，由(4.18)，

$$\forall\ d > \max(d_2(\vec{p}) + \frac{2\beta(\delta)}{\log m}, 0),$$

$$s^d\text{-}m(F(\vec{p},\delta)) \leqslant \lim_{\rho\to 0}\sum_{k=k(\rho)}^{\infty} m^{-kd}(\#\mathscr{U}_k) = 0,$$

又因为$\lim\limits_{\delta\to 0}\beta(\delta) = 0$关于$\vec{p}\in\mathscr{P}$一致成立，因此，$\forall\ \varepsilon > 0$，当$\delta$充分小时，有

$$\dim(F^*(\vec{p},\delta)) \leqslant \dim(F(\vec{p},\delta)) \leqslant \max(0, d_2(\vec{p})) + \varepsilon.$$

下面我们来证明(4.16). $\forall\ l \geqslant 1$，令 $k(l) = [l\log_m n]$，定义

$$A_l^*(\vec{p},\delta) = \{s \in A_{k(l)}(\vec{p},\delta) : u(\vec{\mathcal{F}}_l(s)) \leqslant \sup_{\vec{q}\in B_\delta(\vec{p})} u(\vec{q}) + \delta\},$$

$$\vec{p}\in\mathscr{P},$$

$$F_l^*(\vec{p},\delta) = \{(x,y) \in K_{k(l)} : (y_1, y_2, \cdots, y_{k(l)}) \in A_l^*(\vec{p},\delta)\},$$

其中 $y = \sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j m^{-j}$，

则 $\forall\ L = 1, 2, \cdots, F^*(\vec{p},\delta) \subset \bigcup\limits_{l\geqslant L} F_l^*(\vec{p},\delta)$. 记

$$\mathscr{V}_l = \{R_l(p,q) : R_l(p,q) \text{ 为 } l \text{ 阶“逼近方块”，且 } (R_l(p,q))^0 \cap F_l^*(\vec{p},\delta) \neq \varnothing\},$$

则$\mathscr{V}_l$为$F_l^*(\vec{p},\delta)$的一个覆盖，一个l阶“逼近方块”$R_l(p,q) \in \mathscr{V}_l$当且仅当：(i) 它包含一个 $k(l)$ 阶基本矩形；(ii) 存在 $s \in A_l^*(\vec{p},\delta)$，使得 $R_l(p,q) \subset [0,1] \times I_s$. 因此，

$$\#\mathscr{V}_l = \sum_{s\in A_l^*(\vec{p},\delta)} N_l(s).$$

而 $$\mathbf{E}(N_l(s)) = \exp\{lu(\vec{\mathcal{F}}_l(s))\}$$

$$\leqslant \exp\{l\sup_{\vec{q}\in B_\delta(\vec{p})} u(\vec{q}) + l\delta\}$$

$$\leqslant \exp\{lu(\vec{p}) + l(v+1)\delta\},$$

其中 $v = \sum\limits_{i\in I} |\log(\mathbf{E}N(i))|$.

又因为

$$\# A_l^*(\vec{p},\delta) \leqslant \# A_{k(l)}(\vec{p},\delta),$$

因此，

$$\mathbf{E}(\# \mathcal{Y}_l^*) \leqslant \exp\{k(l)H(\vec{p}) + lu(\vec{p}) + k(l)c(\delta)\},$$

其中 $c(\delta)$ 满足$\lim\limits_{\delta\to 0} c(\delta) = 0$ 关于 $\vec{p}\in \mathscr{P}$ 一致成立，仿照(4.17)的证明我们可以得到：当 δ 充分小时，

$$\dim(F^*(\vec{p},\delta)) \leqslant \max\{d_1(\vec{p}),0\} + \varepsilon.$$

引理 4.10 证毕.

引理 4.11　$\sup\limits_{\vec{p}\in\mathscr{P}} \min(d_1(\vec{p}),d_2(\vec{p})) = \dfrac{\psi(\alpha)}{\log m} > 0.$

证　因为$d_1(\vec{p})$ 和 $d_2(\vec{p})$ 均为 $H(\vec{p})$ 和 $u(\vec{p})$ 的线性组合且组合系数大于 0，我们分别考察 $u(\vec{p})$ 和 $H(\vec{p})$.

$$u(\vec{p}) = \sum_{i=0}^{m-1} p_i \log(\mathbf{E}N(i)),$$ 其中$\vec{p}=(p_0,p_1,\cdots,p_{m-1})$，当$\vec{p}$ 在 $\mathscr{P}$ 中变化时，$u(\vec{p})$ 关于 $\vec{p}$ 在$[a,b]$ 中连续变化；其中

$$a = \min_{0\leqslant i\leqslant m-1} \log(\mathbf{E}N(i)),\quad b = \max_{0\leqslant i\leqslant m-1} \log(\mathbf{E}N(i)).$$

$\forall\, \theta \in \mathbb{R}$，定义

$$\vec{p}^{\theta} = (p_0^{\theta},\cdots,p_{m-1}^{\theta}),\ \text{其中 } p_i^{\theta} = e^{-\psi(\theta)}(\mathbf{E}N(i))^{\theta},\ i \in I.$$

当 θ 在$\mathbb{R}$ 中变化时，若 $a \neq b$，$u(\vec{p}^{\theta})$ 在(a,b) 中变化. 若 $a = b$，$u(\vec{p}) = a = b$，$\forall\, \vec{p}\in \mathscr{P}$. 只需考虑前一种情况，$\forall\, c \in (a,b)$，存在 $\theta_1 \in \mathbb{R}$ 使得 $u(\vec{p}^{\theta_1}) = c$，由拉格朗日乘子法，存在 $\theta_2 \in \mathbb{R}$ 使得

$$\max_{\vec{q}\in\{\vec{p}:u(\vec{p})=c\}} H(\vec{q}) = H(\vec{p}^{\theta_2}),$$

故

$$\sup_{\vec{p}\in\mathscr{P}} \min(d_1(\vec{p}),d_2(\vec{p})) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \min(d_1(\vec{p}^{\theta}),d_2(\vec{p}^{\theta})).$$

而

$$d_1(\vec{p}^{\theta}) = \frac{\psi(\theta) - \theta\psi'(\theta)}{\log m} + \frac{\psi'(\theta)}{\log n};$$

$$d_2(\vec{p}^{\theta}) = \frac{\psi(\theta) - \theta\psi'(\theta) + \psi'(\theta)}{\log m},$$

因此，

$$\min(d_1(\vec{p}^\theta),d_2(\vec{p}^\theta))=\begin{cases}\dfrac{\psi(\theta)+(1-\theta)\psi'(\theta)}{\log m},\theta<t;\\[2ex]\dfrac{\psi(\theta)-\theta\psi'(\theta)}{\log m}+\dfrac{\psi'(\theta)}{\log n},\theta\geqslant t.\end{cases}$$

通过计算可得

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\min(d_1(\vec{p}^\theta),d_2(\vec{p}^\theta))=\frac{\psi(\alpha)}{\log m}.$$

引理 4.11 证毕.

定理 4.2 记 $\alpha=\max\left(t,\dfrac{\log m}{\log n}\right)$，则

$$\dim(K)\leqslant\frac{\psi(\alpha)}{\log m}\quad P\text{-}a.s..$$

证 由附注 4.4 以及引理 4.10，引理 4.11 立即得到本定理.

综合定理 4.1 和定理 4.2，我们有

定理 4.3([70]) 记 $\alpha=\max\left(t,\dfrac{\log m}{\log n}\right)$，则

$$\dim(K)=\frac{\psi(\alpha)}{\log m}\quad P\text{-}a.s. on\{K\neq\varnothing\}.$$

§5 统计自仿射集的分形准则

定理 5.1 $\dim(K)=\mathrm{Dim}(K)$ P-$a.s.$ 当且仅当 $t=1$ 或者 $\forall\, i,j\in\mathbf{O},\mathbf{E}N(i)=\mathbf{E}N(j)$，($t$ 如引理 2.3 所定义).

证 充分性.

若 $t=1$，则 $\alpha=t=1$，注意到 $\psi(1)=\log\mathbf{E}M_1$，由定理 3.1 和定理 4.3 有：

$$\begin{aligned}\overline{\dim}_K(K)&=\frac{\log\mathbf{E}M_1}{\log n}+\left(1-\frac{\log m}{\log n}\right)\frac{\psi(\alpha)}{\log m}\\&=\frac{\psi(\alpha)}{\log m}=\dim(K)\quad P\text{-}a.s. on\{K\neq\varnothing\},\end{aligned}$$

而当 $K=\varnothing$ 时，$\overline{\dim}_K(K)=\dim(K)=0$，故

$$\overline{\dim}_K(K)=\mathrm{Dim}(K)=\dim(K)\quad P\text{-}a.s..$$

若 $t<1$，且存在 $\beta\in(0,\infty)$ 使得 $\mathbf{E}N(i)=\beta,\forall\, i\in\mathbf{O}$，则 ψ 为线性函数，故 ψ 在 $[0,1]$ 上的最小值点不是 0 就是 1，而今 $t<1$ 且 t 是最小值点，故 $t=0$，从而 $\alpha=\dfrac{\log m}{\log n}$，由定理 4.3 及定理 3.1 得：

$$\begin{aligned}\dim(K)&=\frac{\psi(\alpha)}{\log m}=\log_m\Big(\sum_{i\in\mathbf{O}}(\mathbf{E}N(i))^{\log_n m}\Big)\\&=\log_m\left[(\#\mathbf{O})\beta^{\log_n m}\right]\\&=\log_m(\#\mathbf{O})+\log_n\beta\\&=\overline{\dim}_K(K)\quad P\text{-}a.s.\,on\{K\neq\varnothing\},\end{aligned}$$

因此，

$$\dim(K)=\overline{\dim}_K(K)=\mathrm{Dim}(K)\quad P\text{-}a.s..$$

必要性. 设 $\dim(K)=\mathrm{Dim}(K)=\overline{\dim}_K(K)\quad P\text{-}a.s..$

若 $t<1$，往证 $t<\log_n m$. 谬设 $t\geqslant\log_n m$，则 $\alpha=t$. 因此，

$$\dim(K)+\frac{\log\mathbf{E}M_1-\psi(t)}{\log n}=\overline{\dim}_K(K)\quad P\text{-}a.s.\,on\{K\neq\varnothing\},\tag{5.1}$$

故

$$\psi(t)=\log\mathbf{E}M_1\quad P\text{-}a.s.\,on\{K\neq\varnothing\},\tag{5.2}$$

由附注 2.4，当 $\log_n m\leqslant t<1$ 时，附注 2.4 中(ii)，(iii) 均不可能发生，因此，ψ 为严格凸的. 故

$$\psi(1)-\psi(t)=\log\mathbf{E}M_1-\psi(t)>0,$$

这与(5.2) 矛盾，所以 $t<\dfrac{\log m}{\log n}$，从而 $\alpha=\dfrac{\log m}{\log n}$.

因为 $\dim(K)=\overline{\dim}_K(K)\quad P\text{-}a.s.$，所以

$$\frac{\log\mathbf{E}M_1}{\log n}+\frac{\psi(t)}{\log m}-\frac{\psi(t)}{\log n}=\frac{\psi(\log_n m)}{\log m}.\tag{5.3}$$

再谬设存在 $i,j\in\mathbf{O}$，使得 $\mathbf{E}N(i)\neq\mathbf{E}N(j)$，则 ψ 在 $[0,1]$ 为严格凸的，因此，

$$\psi(\log_n m)<\frac{1-\log_n m}{1-t}\psi(t)+\frac{\log_n m-t}{1-t}\psi(1),$$

即

$$t\psi(1) + (1-t)\psi(\log_n m)$$

$$< \left[\frac{\psi(t)}{\log m}(1-\log_n m) + \frac{\psi(1)}{\log n}\right]\log m \tag{5.4}$$

注意到 $t\psi(1) + (1-t)\psi(\log_n m) \geqslant \psi(\log_n m)$，以及 $\psi(1) = \log \mathbf{E}M_1$，我们有

$$\psi(\log_n m) < \left[\frac{\psi(t)}{\log m} - \frac{\psi(1)}{\log n} + \frac{\log \mathbf{E}M_1}{\log n}\right]\log m \tag{5.5}$$

而这与(5.3)矛盾，必要性获证. 定理 5.1 证毕.

第十一章

分形集上的随机过程简介

分形集上的随机过程的研究是概率论中的一个新课题。近几年来，这方面的研究日益活跃并迅速发展起来。我们知道，欧氏空间中的热传导方程、波动方程都离不开 Laplace 算子. 当 F 为一个分形集合时，如何在其上定义Laplace 算子呢?Laplace 算子是一个微分算子，而 F 上未必有微分结构，但是 Laplace 算子是 Brown 运动的生成算子，因此一个自然的想法，就是在 F 上构造一个"类似于"Brown 运动的扩散过程(实际上与通常的 Brown 运动的性质有很大区别)，定义其生成算子即为 F 上的Laplace 算子，而其转移概率密度就是分形集上的热传导方程的基本解. 基于这种想法，在概率论中本质的问题就是在分形集上构造扩散过程并研究其性质. 本章中我们对这方面的研究作一个简单介绍.

§1 Sierpinski 垫上的 Brown 运动

本节主要结果取自[14]. 我们先给出平面上(无界)Sierpinski 垫的构造.

记 $a_0=(0,0)$, $a_1=(1,0)$, $a_2=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $F_0=\{a_0,a_1,a_2\}$, J_0 为以 a_0,a_1,a_2 为顶点的单位等边实心三角形，归纳地定义：

$$F_{n+1}=F_n\cup(2^na_1+F_n)\cup(2^na_2+F_n),\ n=0,1,2,\cdots$$

(其中若 $y\in\mathbb{R}^2$, $A\subset\mathbb{R}^2$, $\lambda\in\mathbb{R}$，记 $y+A=\{y+x:x\in A\}$, λA

$=\{\lambda x: x\in A\})$.

令$G'_0=\bigcup_{n=0}^{\infty}F_n$，$G''_0$为$G'_0$关于$y$轴的反射，$G_0=G'_0\cup G''_0$. $\forall\ n\in\mathbb{Z}$（整数集合），记$G_n=2^{-n}G_0$，令$G_\infty=\bigcup_{n=0}^{\infty}G_n$，我们称$G=\overline{G}_\infty$为平面上（无界）Sierpinski 垫. 容易看到G为平面上一个连通闭子集并且满足$2G=G$，G的Hausdorff 维数为$\frac{\log 3}{\log 2}$. 设$G^{(0)}$为把G_0中距离为1的且其联线在G中的点连结起来所构成的图，$\forall\ n\in\mathbb{Z}$，记$G^{(n)}=2^{-n}G^{(0)}$，$\forall\ x\in G_n$，记$N_n(x)=\{y\in G_n:\overline{xy}\subset G^{(n)},|x-y|=2^{-n}\}$，（其中$\overline{xy}$表$x,y$两点的连线），则$\# N_n(x)\equiv 4$. $\mathbb{R}^2$中子集A称为一个G_n-三角形（或n阶三角形），若A为顶点在G_n中的三角形且A可由$2^{-n}J_0$平移得来. 设μ为唯一支撑在G上的Borel概率测度且满足：对于任意n阶三角形A，$\mu(A)=3^{-n}$. 为以后方便，我们现在约定对于任意状态空间为G的连续（或离散）时间参数随机过程ξ，均采用以下记号：

$\forall\ m\in\mathbb{Z}$，$A\subset G$，记

$T_{-1}^m(\xi)=0$,

$T^m(\xi)\equiv T_0^m(\xi)=\inf\{t\geqslant 0:\xi(t)\in G_m\}$,

$T^{-\infty}(\xi)=\inf\{t\geqslant 0:\xi(t)=(0,0)\}$，（以后在不致引起混淆的情况下，简记$(0,0)$为0），

$T_{i+1}^m(\xi)=\inf\{t>T_i^m(\xi):\xi(t)\in G_m\setminus\{\xi(T_i^m(\xi))\}\}$,

$W_i^m(\xi)=T_i^m(\xi)-T_{i-1}^m(\xi),i\geqslant 1$,

$\mathscr{F}_t^0(\xi)=\sigma(\xi(s),s\leqslant t)$,

$T(A,\xi)=\inf\{t\geqslant 0:\xi(t)\in A\},A\subset G$.

定义 1.1 一个取值于G_n的马氏链$\{Y(r),r\geqslant 0\}$称为一个G_n上的简单随机徘徊，若其转移概率满足$\forall\ r\geqslant 0$,

$$P(Y(r+1)=y|Y(r)=x)=\begin{cases}\frac{1}{4},若\ y\in N_n(x);\\ 0,其它.\end{cases}$$

设$\{Y(r),r\geqslant 0\}$为G_0上的一个从原点出发的简单随机徘徊，

由$\{G_m, m \in \mathbb{Z}\}$的结构我们容易得到

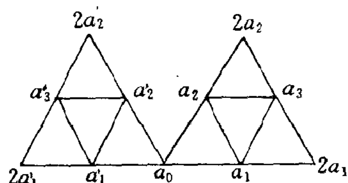
引理 1.1　$\forall\, m \in \mathbb{N}$, $Y^m(i) \triangleq Y(T_i^{-m}(Y))$ 为 G_{-m} 上的一个从原点出发的简单随机徘徊.

设$\{Y(r), r \geqslant 0\}$为G_0上的一个从原点出发的简单随机徘徊，$\forall\, m \in \mathbb{N}$，记$N_m = T_1^{-m}(Y)$，$H_m = \sum\limits_{0 \leqslant r \leqslant N_m} \mathbf{1}_{\{Y(r)=0\}}$. $\forall\, 0 \leqslant u \leqslant 1$，记 $f(u) = E(u^{N_1})$，$h(u) = \mathbf{E}(u^{H_1})$.

引理 1.2　(i) $f(u) = \dfrac{u^2}{4-3u}$，$h(u) = \dfrac{3u}{5-2u}$，

$$\text{(ii)}\ \mathbf{E}(N_m) = 5^m, \mathbf{E}(H_m) = \left(\frac{5}{3}\right)^m.$$

证　(i) 记$a_3 = a_1 + a_2$，a_1, a_2, a_3关于y轴的反射分别记为a_1', a_2', a_3'，见右图，由定义，$N_1 = T_1^{-1}(Y)$为简单随机徘徊$\{Y(r), r \geqslant 0\}$从a_0出发首次击中$\{2a_1, 2a_2, 2a_1', 2a_2'\}$的时刻，记$f_i(u) = \mathbf{E}^{a_i}(u^{N_1})$，$i = 0,1,2,3$，$\mathcal{f}_i(u) = \mathbf{E}^{a_i'}(u^{N_1})$，$i = 1,2,3$. 由对称性有$f_i(u) = \mathcal{f}_i(u)$，$i = 1,2,3$，且$f_1(u) = f_2(u)$，(其中$\mathbf{E}^a$表由$P(\cdot \mid Y(0) = a)$决定之期望算子). $f_0(u)$等于



$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}^{a_0}(u^{N_1}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} u^k P^{a_0}(N_1 = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} u^k P^{a_0}(N_1 = k, Y(1) = a_1') + \sum_{k=1}^{\infty} u^k P^{a_0}(N_1 = k, Y(1) = a_2') \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} u^k P^{a_0}(N_1 = k, Y(1) = a_1) + \sum_{k=1}^{\infty} u^k P^{a_0}(N_1 = k, Y(1) = a_2) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} u^k P^{a_1'}(N_1 = k-1) + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} u^k P^{a_2'}(N_1 = k-1) \\
&\quad + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} u^k P^{a_1}(N_1 = k-1) + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} u^k P^{a_2}(N_1 = k-1)
\end{aligned}$$

$$= uf(u).$$

同理可得：

$$f_1(u) = \frac{u}{4}(f_0(u) + f_1(u) + f_3(u) + 1),$$

$$f_3(u) = \frac{u}{2}(f_1(u) + 1).$$

解出 $f_0(u)$，有：

$$f_0(u) = \frac{u^2}{4 - 3u}.$$

记 $h_i(u) = \mathbf{E}^{a_i}(u^{H_1}), i = 0,1,2,3; \widetilde{h}_i(u) = \mathbf{E}^{a_i'}(u^{H_1})$，$i = 1,2,3$，相应地有：

$$h_0(u) = uh_1(u), h_1(u) = \frac{1}{4}(h_0(u) + h_1(u) + h_3(u) + 1),$$

$$h_3(u) = \frac{1}{2}(h_1(u) + 1).$$

解之得：$h_0(u) = \dfrac{3u}{5 - 2u}$.

(ii) $\forall\, m \in \mathbb{N}$，定义停时序列如下：

$$V_0^m = 0,$$

$$U_i^m = \min\{r > V_{i-1}^m : Y(r) \in G_{-m} \setminus \{0\}\}, i \geqslant 1,$$

$$V_i^m = \min\{r > U_i^m : Y(r) = 0\} \wedge N_{m+1}.$$

令

$$H_{m,i} = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{V_i^m \leqslant r < U_{i+1}^m, Y(r)=0\}}, i \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

由强马氏性，

$$\mathbf{E}(H_{m+1}) = \mathbf{E}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{Y(V_i^m)=0\}} H_{m,i}\Big)$$
$$= \mathbf{E}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{Y(V_i^m)=0\}}\Big) \mathbf{E}H_m. \tag{1.1}$$

若记

$$Y^m(i) = Y(T_i^{-m}(Y)),$$

则

$$\sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{1}_{\{Y(V_i^m)=0\}}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{1}_{\{Y^m(i)=0,i\leqslant N_{m+1}\}}. \tag{1.2}$$

由引理 1.1，$2^{-m}Y^m(\cdot)$ 为 G_0 上简单随机徘徊，因此，$\sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{1}_{\{Y(V_i^m)=0\}}$ 与 H_1 有相同的分布，而由(i)有

$$\mathbf{E}(H_1)=(\mathbf{E}u^{H_1})'\big|_{u=1}=\frac{5}{3}.$$

因此，由(1.1)得：$\mathbf{E}(H_{m+1})=\frac{5}{3}\mathbf{E}(H_m)$，故

$$\mathbf{E}(H_m)=\left(\frac{5}{3}\right)^m.$$

类似可证 $\mathbf{E}(N_m)=5^m$. 引理 1.2 证毕.

由引理1.1以及Kolmogorov 相容性定理，存在一个概率空间$(\Omega_0,\mathscr{F}_0,P_0)$ 和一族离散时间的随机过程$\{\tilde{X}(n,x),x\in G_n,n\in\mathbb{Z}\}$，使得

(i) $\{\tilde{X}(n,x)(i),i\geqslant 0\}$ 为从 x 出发，取值于 G_n 的简单随机徘徊； (1.3)

(ii) 若 $m\leqslant n,x\in G_m$，则

$$\tilde{X}(m,x)(i)=\tilde{X}(n,x)(T_i^m(\tilde{X}(n,x)),i\geqslant 0; \tag{1.4}$$

(iii) 若 $x,x'\in G_n,x\neq x'$，$\{\tilde{X}(n,x)(i),i\geqslant 0\}$ 和

$$\{\tilde{X}(n,x')(i),i\geqslant 0\}\text{ 相互独立}. \tag{1.5}$$

为简单计，仍用$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 记$(\Omega_0,\mathscr{F}_0,P_0)$.

下面我们从$\{\tilde{X}(n,x)(i),i\geqslant 0\}$ 出发构造一个新的离散时间的随机过程$\{X(n,x)(i),i\geqslant 0\}$ 如下：

首先，若 $x=0$，定义

$$X(n,0)(i)=\tilde{X}(n,0)(i),\forall\, i\geqslant 0, \tag{1.6}$$

$\forall\, x\in G_m,m\leqslant n$，令

$$X(n,x)(i)=\tilde{X}(n,x)(i),0\leqslant i\leqslant T^{m-1}(\tilde{X}(n,x)),\quad(1.7)$$

若 $x\in G_n$，由(1.6)和(1.7)归纳地定义$\{X(n,x)(i),i\geqslant 0\}$，

$\forall\ -\infty<j\leqslant n$，当$T^j(X(n,x))<i\leqslant T^j(X(n,x))+T^{j-1}(X(n,X(n,x)(T^j(X(n,x)))))=T^{j-1}(X(n,x))$时，定义

$$X(n,x)(i)=X(n,X(n,x)(T^j(X(n,x))))(i-T^j(X(n,x)))\quad(1.8)$$

(a) 当$T_0(X(n,x))\equiv\lim\limits_{j\to-\infty}T^j(X(n,x))=\infty$时，已定义完，

(b) 当$T_0(X(n,x))<\infty$时，再定义：

$$X(n,x)(i)=X(n,0)(i-T_0(X(n,x))),$$

当 $$i\geqslant T_0(X(n,x)).\quad(1.9)$$

引理1.3 (i)$\forall\ x\in G_n$，$X(n,x)$为从x出发的G_n上的简单随机徘徊；

(ii) $X(n,x)(i)$

$$=X(n,X(n,x)(T^j(X(n,x))))(i-T^j(X(n,x))),$$

$$\forall\ i\geqslant T^j(X(n,x)),-\infty\leqslant j\leqslant n,x\in G_n;$$

(iii) 若$n,j\in\mathbb{Z}$，且$n\geqslant j$，则

$\sigma\{X(n,y),y\in G_j\}$和$\sigma\{X(n,x)(\cdot\wedge T^j(X(n,x))),x\in G_n\}$相互独立.

证 (i) 由(1.5)以及强马氏性立得.

(ii) 由$\{X(n,x),x\in G_n\}$的定义可得.

(iii) 若$-\infty\leqslant k\leqslant m\leqslant n,x\in G_m$，则

$X(n,x)(\cdot\wedge T^k(X(n,x)))$关于$\sigma(\tilde{X}(n,y):y\in G_m-G_k)$可测，

$X(n,x)(\cdot\wedge T^{-\infty}X((n,x)))$关于$\sigma(\tilde{X}(n,0))$可测. 取

$$m=j,k=-\infty,$$

有$\forall\ y\in G_j$，

$X(n,y)$关于$\sigma(\tilde{X}(n,y'),y'\in G_j)$可测，

取$k=j,m=n$，有$\forall\ x\in G_n$，

$X(n,x)(\cdot\wedge T^j(X(n,x)))$ 关于 $\sigma(\tilde{X}(n,y'),y'\in G_n-G_j)$ 可测，再用(1.5)知(iii)成立. 引理 1.3 证毕.

引理 1.4 设 $p,m,n\in\mathbb{Z},p\leqslant m\leqslant n,x\in G_n$，则

(i) $X(m,x)(i)=X(n,x)(T_i^m(X(n,x))),\forall\, i\geqslant 0$； (1.12)

(ii) $X(m,x)(T^p(X(m,x)))=X(m',x)(T^p(X(m',x)))$，$(\forall\, m,m'\geqslant p)$； (1.13)

(iii) $T^{p-1}(X(m,x))-T^p(X(m,x))$

$$=T^{p-1}(X(m,X(m,x)(T^p(X(m,x)))));\tag{1.14}$$

(iv) $T_i^p(X(n,x))=T^m_{T_i^p(X(m,x))}(X(n,x))$. (1.15)

证 若 $j\leqslant m,x\in G_j,i\leqslant T^{j-1}(X(m,x))$，由(1.4)和(1.7)，有

$$X(m,x)(i)=\tilde{X}(m,x)(i)=\tilde{X}(n,x)(T_i^m(\tilde{X}(n,x)))\in G_m.\tag{$*$}$$

而当 $i<T^{j-1}(X(m,x))$ 时，$X(m,x)(i)\in G_m\backslash G_{j-1}$，

当 $T_{i-1}^m(\tilde{X}(n,x))<t<T_i^m(\tilde{X}(n,x))$ 时，$\tilde{X}(n,x)(t)\in G_n\backslash G_m$，因此

$$T_i^m(\tilde{X}(n,x))\leqslant T^{j-1}(\tilde{X}(n,x)).$$

由(1.7)和($*$)，我们有：当 $i\leqslant T^{j-1}(X(m,x)),x\in G_j$，$j\leqslant m$ 时，

$$X(m,x)(i)=X(n,x)(T_i^m(X(n,x))).\tag{1.16}$$

设 $m,n\in\mathbb{Z},m\leqslant n,x\in G_m$，下面我们归纳地证明 $\forall\, p<m$，均有

$$X(m,x)(i)=X(n,x)(T_i^m(X(n,x))),$$
$$i\leqslant T^p(X(n,x)).\tag{1.17}$$

当 $p=m-1$ 时，在(1.16)中令 $j=m$，即得(1.17). 设(1.17)对某个 $p<m$ 成立，现证(1.17)对 p-1 亦成立. 记

$$k=T^p(X(m,x)),y=X(m,x)(k),$$

由归纳假设，

$$X(m,x)(T^p(X(m,x)))=X(n,x)(T^m_{T^p(X(m,x))}(X(n,x)))\in G_p,$$

因此，

$$T^m_{T^p(X(m,x))}(X(n,x)) \geqslant T^p(X(n,x)).$$

另一方面，若存在 $j < T^m_{T^p(X(m,x))}(X(n,x))$ 使得 $X(n,x)(j) \in G_p$，则必然存在 $i, 0 \leqslant i < T^p(X(m,x))$，使得 $j = T^m_i(X(m,x))$，而 $X(n,x)(T^m_i(X(n,x))) = X(m,x)(i) \in G_m \backslash G_p$，矛盾。因此，

$$T^m_{T^p(X(\cdot,x))}(X(n,x)) = T^p(X(n,x)). \tag{1.18}$$

故由归纳假设和(1.18)有：

$$\begin{aligned} y = X(m,x)(k) &= X(m,x)(T^p(X(m,x))) \\ &= X(n,x)(T^p(X(n,x))). \end{aligned} \tag{1.19}$$

由(1.10)，(1.18)，(1.19)，$\forall\, i \geqslant 0$，有：

$$\begin{aligned} &T^m_{k+1}(X(n,x)) \\ &= T^m_{T^p(X(m,x))+i}(X(n,x)) \\ &= T^m_{T^p(X(m,x))}(X(m,x)) \\ &\quad + T^m_i(X(n,X(n,x)(T^m_{T^p(X(m,x))}(X(n,x))))) \\ &= T^p(X(n,x)) + T^m_i(X(n,X(n,x)(T^p(X(n,x))))) \\ &= T^p(X(n,x)) + T^m_i(X(n,X(m,x)(T^p(X(m,x))))) \\ &= T^p(X(n,x)) + T^m_i(X(n,y)), \end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned} &T^{p-1}(X(m,x)) \\ &= T^p(X(m,x)) + T^{p-1}(X(m,X(m,x)(T^p(X(m,x))))) \\ &= T^p(X(m,x)) + T^{p-1}(X(m,y)). \end{aligned} \tag{1.21}$$

因此，若 $i \leqslant T^{p-1}(X(m,x)) - T^p(X(m,x))$，则

$$\begin{aligned} &X(m,x)(k+i) \\ &\quad = X(m,y)(i) \quad (\text{由 } 1.10) \\ &\quad = X(n,y)(T^m_i(X(n,y))) \quad (\text{由}(1.16)\text{和}(1.21)) \\ &\quad = X(n,y)(T^m_{k+i}(X(n,x)) - T^p(X(n,x))) \quad (\text{由}(1.20)) \\ &\quad = X(n,x)(T^m_{k+i}(X(n,x))) \quad (\text{由}(1.10)\text{和}(1.19)). \end{aligned}$$

因此，

当 $i \leqslant T^{p-1}(X(m,x))$ 时，(1.17) 成立，故当 $i < T^{-\infty}(X(m,x))$

时,(1.17) 成立.

当 $i \geqslant T^{-\infty}(X(m,x))$ 时,注意到(1.9),同样可以证明 $\forall\ j \geqslant 0$,

$$X(m,x)(T^{-\infty}(X(m,x)) + j)$$
$$= X(n,x)(T_{T^{-\infty}(X(m,x))+j}(X(n,x))).$$

总之,(1.12) 成立. 由(1.19) 知(1.13) 成立,由(1.21) 知(1.14) 成立,由(1.12),仿(1.18) 可以证明(1.15). 引理 1.4 证毕.

引理 1.5 (i)$\forall\ m,n \in \mathbb{Z}, n \geqslant m, x \in G_n$,有

$$\{W_i^m(X(n,x)), i \in \mathbb{N}\}$$

为 $i.i.d.$ 随机变量序列,且其公共分布不依赖于 x,若 $x \in G_m$,则 $\{W_i^m(X(n,x)), i \in \mathbb{N}\}$ 与 $X(n,x)$ 独立.

(ii) 若 $x \in G_m, i \in \mathbb{N}$,则$\{W_i^m(X(m+r),x), r \geqslant 0\}$ 是初始状态为 1 的后代分布与 N_1 的分布相同的 Galton-Watson 分枝过程.

证 由$\{G_m, m \in \mathbb{Z}\}$ 的构造及强马氏性易知(i) 成立.

下面证明(ii),$\forall\ x \in G_m, i \in \mathbb{N}$,由(1.15),

$$T_i^m(X(m+r+1,x)) = T^{m+r}_{T_i^m(X(m+r,x))}(X(m+r+1,x)),$$
$$r \geqslant 0.$$

因此,

$$\begin{aligned}
&W_i^m(X(m+r+1,x)) \\
&\quad = T_i^m(X(m+r+1,x)) - T_{i-1}^m(X(m+r+1,x)) \\
&\quad = T^{m+r}_{T_i^m(X(m+r,x))}(X(m+r+1,x)) \\
&\qquad - T^{m+r}_{T_{i-1}^m(X(m+r,x))}(X(m+r+1,x)) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{W_i^m(X(m+r,x))} W^{m+r}_{T_{i-1}^m(X(m+r,x))+j}(X(m+r+1,x)).
\end{aligned} \tag{1.22}$$

由(i) 和(1.22),(ii) 得证. 引理 1.5 证毕.

$\forall\ n \in \mathbb{Z}, x \in G_n$,记 $X_n(x)(j5^{-n}) = X(n,x)(j)$,

当 $j5^{-n} < t < (j+1)5^{-n}$ 时,令

$$X_n(x)(t) = X_n(x)(j5^{-n}) + \frac{X_n(x)((j+1)5^{-n}) - X_n(x)(j5^{-n})}{5^{-n}}(t - j5^{-n}),$$

显然 $X_n(x)(\cdot) \in C([0,\infty),G)$.

引理 1.6 设 $m \in \mathbb{Z}$, $x \in G_m$, 则

(i) $\forall\, i \in \mathbb{N}$, 存在随机变量 $W(m,i,x) > 0$ P-$a.s.$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} W_i^m(X_n(x)) = W(m,i,x) \quad (P\text{-}a.s \text{ and } L^2). \tag{1.23}$$

(ii) $\{W(m,i,x), i \in \mathbb{N}\}$ 为独立同分布随机变量序列，且与 $X_m(x)$ 独立.

(iii) $W(m,i,x) \overset{D}{=} 5^{-m}W(0,1,0)$ (此处 $\overset{D}{=}$ 表依分布相等)，若记 $\varphi(s) = \mathbf{E}e^{-sW(0,1,0)}$, 则 φ 满足

$$\varphi(5s) = f(\varphi(s)), (f \text{ 之定义如引理 } 1.2). \tag{1.24}$$

证 $W_i^m(X_n(x))$

$$= T_i^m(X_n(x)) - T_{i-1}^m(X_n(x))$$

$$= \frac{T_i^m(X(n,x))}{5^n} - \frac{T_{i-1}^m(X(n,x))}{5^n}$$

$$= \frac{W_i^m(X(n,x))}{5^n},$$

所以，$\forall\, r \geqslant 1$,

$$W_i^m(X_{m+r}(x)) = \frac{W_i^m(X(m+r,x))}{5^{m+r}} = \frac{1}{5^m}\cdot\frac{W_i^m(X(m+r,x))}{5^r}. \tag{1.25}$$

令 $r \to \infty$, 由分枝过程的基本性质，(i), (iii) 显然成立.

由引理 1.5(i), 立即得到(ii). 引理 1.6 证毕.

记 $T(m,j,x) = \sum_{i=1}^{j} W(m,i,x)$, $\forall\, x \in G_m$.

定理 1.1 $\forall\, x \in G_\infty$, 存在随机过程 $X(x)$, 其轨道连续(取值于 G), 使得: $\forall\, m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant m}|X_n(x)(t)-X(x)(t)|=0\quad P\text{-}a.s. \tag{1.26}$$

且 $\forall\, k\in\mathbb{Z}, x\in G_k, j\geqslant 0$,

$$X(x)(T(k,j,x))=X(k,x)(j). \tag{1.27}$$

证　$\forall\, n_0\in\mathbb{N}, x\in G_{n_0}$,由引理 1.6,存在 $A\subset\Omega$,使得 $P(A)=1$ 且 $\forall\,\omega\in A,\forall\, m\geqslant n_0$,有:

$$\lim_{n\to\infty}W_i^m(X_n(x))=W(m,i,x)>0.$$

由引理 1.6 及强大数定理有

$$\lim_{j\to\infty}T(m,j,x)=\infty,\forall\, m\geqslant n_0.$$

固定 $m\geqslant n_0$,取 $k=k(\omega)$ 使得 $T(m,k,x)>m$. 取 $n_1=n_1(\omega)$ 使得若 $n\geqslant n_1$,有

$$\max_{i\leqslant k}\{T_i^m(X_n(x))-T(m,i,x)\}$$
$$<\min_{i\leqslant k}\{W(m,i,x)\}. \tag{1.28}$$

设 $n,n'\geqslant n_1, t\in[0,m]$,取 $j=j(t)\in\{1,2,\cdots,k\}$ 使得 $T(m,j-1,x)\leqslant t<T(m,j,x)$. 由(1.28),有

$$T_{j-2}^m(X_n(x))<t<T_{j+1}^m(X_n(x)),$$

因此,只要 $n,n'\geqslant n_1$(不依赖于 $t\in[0,m]$),就有

$$|X_n(x)(t)-X_{n'}(x)(t)|$$
$$\leqslant 2^{-m+2}-|X_n(x)(T_j^m(X_n(x)))-X_{n'}(x)(T_j^m(X_{n'}(x)))|$$
$$=2^{-m+2},(\forall\, t\in[0,m]).$$

所以,存在随机过程 $X(x)(\cdot)$,其轨道为取值于 G 的连续函数,且

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant m}|X_n(x)(t)-X(x)(t)|=0\quad P\text{-}a.s.$$

在(1.12)式中用 $X_n(x)$ 之定义对 n 取极限(视此处的 k 为(1.12)中之 m)立即得到(1.27). 定理 1.1 证毕.

前面我们得到的 $X(x)$ 过程只对 $x\in G_\infty$ 有定义,现在着手把 x 扩充到整个 G 上去.

由引理 1.4,$\forall\, x\in G_m, m\geqslant p$,可记

$Y^p(x)=X(m,x)(T^p(X(m,x)))$(因为右方不依赖于 m).

取随机变量 W、N、H 使 $W \overset{\mathscr{D}}{=} W(0,1,x)$，$N \overset{\mathscr{D}}{=} N_1$，$H \overset{\mathscr{D}}{=} H_1$.

引理 1.7 (i) $\forall\, x \in G_\infty$，$j \in \mathbb{Z}$，$\lim\limits_{n\to\infty} T^j(X_n(x))$ P-a.s. 存在且有限，若记其极限为 $T(j,x)$，则

$$X(x)(T(j,x)) = Y^j(x) \in G_j, \tag{1.29}$$

(ii) 若 $m \in \mathbb{Z}$，$x \in G_m - G_{m-1}$，则

$$T(m-1,x) = \sum_{i=1}^{K_{m-1}(x)} W(m,i,x) \quad P\text{-a.s.} \tag{1.30}$$

其中 $K_{m-1}(x) = T^{m-1}(X(m,x))$ 为与 $\{W(m,i,x), i \geqslant 1\}$ 独立的均值为 2 的几何型随机变量且满足

$$\mathbf{E}(T(m-1,x)) = 2 \cdot 5^{-m}; \tag{1.31}$$

$$\mathbf{E}[\exp(-\lambda T(m-1,x))] = \varphi(\lambda 5^{-m})(2 - \varphi(\lambda 5^{-m}))^{-1}, \quad \forall\, \lambda \geqslant 0; \tag{1.32}$$

(iii) 若 $j,n \in \mathbb{Z}$，$j \leqslant n$，$x \in G_n$，则

$$\mathbf{E}[T^j(X_n(x))] \leqslant \frac{1}{2} 5^{-j}; \tag{1.33}$$

$$P(T^j(X_n(x)) \geqslant t) \leqslant 2^{\frac{1}{2}} \exp\{-(\frac{1}{2}\log 2) 5^j t\}, \forall\, t \geqslant 0. \tag{1.34}$$

证 先证(ii). 设 $m \in \mathbb{Z}$，$x \in G_m - G_{m-1}$，由(1.15)得：

$$\begin{aligned} T^{m-1}(X(n,x)) &= T^m_{T^{m-1}(X(m,x))}(X(n,x)) \\ &= \sum_{j=1}^{T^{m-1}(X(m,x))} [T^m_j(X(n,x)) - T^m_{j-1}(X(n,x))] \\ &= \sum_{j=1}^{T^{m-1}(X(m,x))} W^m_j(X(n,x)) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T^{m-1}(X(m,x)) \geqslant j\}} W^m_j(X(n,x)). \end{aligned} \tag{1.35}$$

故

$$T^{m-1}(X_n(x)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T^{m-1}(X(m,x)) \geqslant j\}} W^m_j(X_n(x)), \tag{1.36}$$

令 $n \to \infty$，由定理 1.1 及引理 1.6(i) 得

$$\lim_{n\to\infty} T^{m-1}(X_n(x)) = \sum_{j=1}^{K_{m-1}(x)} W(m,j,x) \quad P\text{-}a.s. \tag{1.37}$$

令 $g(u) = \mathbf{E}[u^{T^{m-1}(X(m,x))}]$，类似于引理 1.2 可证：

$$g(u) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}ug(u),$$

故

$$g(u) = \frac{u}{2-u}, g'(u) = \frac{2}{2-u},$$

因此，

$$\mathbf{E}(K_{m-1}(x)) = 2,$$

故

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(T(m-1,x)) &= 2\mathbf{E}(W(m,1,x)) \\ &= 2\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}W_1^m(X_n(x)) \\ &= 2\lim_{r\to\infty}\frac{\mathbf{E}W_1^m(X(m+r,x))}{5^n \cdot 5^r} = 2\cdot 5^{-m}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

若 $\lambda \geqslant 0$，则由引理 1.6(iii)，

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}[\exp(-\lambda T(m-1,x))] \\ &= \mathbf{E}[\exp(-\lambda \sum_{i=1}^{K_{m-1}(x)} W(m,i,x)] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{E}[\exp(-\lambda W 5^{-m})])^k P(T^{m-1}(X(m,x)) = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}(\mathbf{E}[\exp(-\lambda 5^{-m} W)])^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\varphi(\lambda 5^{-m})}{2}\right]^k \\ &= \frac{\varphi(\lambda 5^{-m})}{2-\varphi(\lambda 5^{-m})}. \end{aligned} \tag{1.39}$$

(ii) 得证.

往证(i) 和(iii). 若 $j < m \leqslant n, x \in G_m$，则由(1.14) 有

$$T^j(X_n(x)) = \frac{1}{5^n}T^j(X(n,x))$$

$$= \frac{1}{5^n}\left[T^{j+1}(X(n,x)) + T^j(X(n,X(n,x)(T^{j+1}(X(n,x)))))\right]$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{1}{5^n}\left[T^m(X(n,x)) + \sum_{i=j+1}^{m} T^{i-1}(X(n,X(n,x)(T^i(X(n,x)))))\right]$$

$$= \frac{1}{5^n}\sum_{i=j+1}^{m} T^{i-1}(X(n,X(n,x)(T^i(X(n,x)))))$$

$$= \frac{1}{5^n}\sum_{i=j+1}^{m} T^{i-1}(X(n,Y^i(x)))$$

$$= \sum_{i=j+1}^{m} T^{i-1}(X_n(Y^i(x))). \tag{1.40}$$

令 $n\to\infty$ 时，由定理 1.1，

$$\lim_{n\to\infty} T^j(X_n(x)) = \sum_{i=j+1}^{m} T^{i-1}(X(Y^i(x))) \quad P\text{-}a.s..$$

又因为

$$X_n(x)(T^j(X_n(x))) = Y^j(x),$$

令 $n\to\infty$，有

$$X(x)(T^j(X(x))) = Y^j(x).$$

$\forall\ j+1\leqslant i\leqslant n, x\in G_n$，对 $X_n(x)$ 在 $T^i(X_n(x))$ 处用强马氏性，由(1.36)，有

$$\mathbf{E}\left[T^{i-1}(X_n(Y^i(x)))\,|\,\mathscr{F}^0_{T^i(X_n(x))}(X_n(x))\right]$$

$$= \int_\Omega T^{i-1}(X_n(Y^i(x)(\omega))(\omega'))dP(\omega')$$

$$= 2(5^{-i})\mathbf{1}_{\{Y^i(x)(\omega)\notin G_{i-1}\}}$$

$$\leqslant 2\cdot 5^{-i}.$$

因此，在(1.40)中让 $m=n$，有

$$\mathbf{E}(T^j(X_n(x)))$$

$$= \mathbf{E}\sum_{i=j+1}^{n} T^{i-1}(X_n(Y^i(x)))$$

$$= \mathbf{E}\sum_{i=j+1}^{n}\mathbf{E}\left[T^{i-1}(X_n(Y^i(x)))\,|\,\mathscr{F}^0_{T^i(X_n(x))}(X_n(x))\right]$$

$$\leqslant 2\sum_{i=j+1}^{\infty}5^{-i} = \frac{1}{2}5^{-j}.$$

(1.33) 得证.

$\forall\ j,n\in\mathbb{Z}, j\leqslant n$ 且 $x\in G_n$，令 $t_0 = 5^{-j}$，由(1.33)、契比谢夫不等式以及 $X_n(x)$ 的马氏性，有

$$P(T^j(X_n(x))\geqslant 2t_0)$$

$$\leqslant \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{T^j(X_n(x)(\omega))\geqslant t_0\}}\int_\Omega \mathbf{1}_{\{T^j(X_n(X_n(x)(t_0,\omega))(\omega'))\geqslant t_0\}}dP(\omega'))$$

$$\leqslant \mathbf{E}\mathbf{1}_{\{T^j(X_n(x)(\omega))\geqslant t_0\}}\frac{5^{-j}}{2t_0}$$

$$\leqslant 2^{-2}.$$

用归纳法容易得到，$\forall\ l\geqslant 1$，

$$P(T^j(X_n(x))\geqslant lt_0)\leqslant 2^{-l}.$$

$\forall\ t\geqslant 0$，若 $t<t_0$，则

$$2^{\frac{1}{2}}\exp\{-(\frac{1}{2}\log 2)5^j t\}\geqslant 1,$$

从而(1.34) 显然成立. 若 $t\geqslant t_0$，取 l 使得 $lt_0\leqslant t<(l+1)t_0$，则

$$\begin{aligned}P(T^j(X_n(x))\geqslant t)&\\ &\leqslant P(T^j(X_n(x))\geqslant lt_0)\\ &\leqslant \exp(-l\log 2) = \exp\{-lt_0(\log 2)5^j\}\\ &\leqslant \exp(-(\frac{1}{2}\log 2)5^j t).\end{aligned}$$

总之，(1.34) 恒成立，因此(iii) 得证.

在(1.33) 和(1.34) 中令 $n\to\infty$，则 $\forall\ j\in\mathbb{Z}, x\in G_\infty$，有

$$\mathbf{E}(T(j,x))\leqslant\frac{1}{2}5^{-j}, \tag{1.41}$$

$$P(T(j,x)\geqslant t)\leqslant 2^{\frac{1}{2}}\exp\{-(\frac{1}{2}\log 2)5^j t\}, \forall\ t\geqslant 0. \tag{1.42}$$

由(1.41)，$T(j,x)<\infty$ P-$a.s.$，再由(1.37)，(i) 得证. 引理 1.7

证毕.

引理1.8 $\forall\, x \in G_\infty, j \in \mathbb{Z}, t \geqslant T(j,x)$,有

$$X(x)(t) = X(Y^j(x))(t - T(j,x)) \quad P\text{-}a.s..$$

证 由(1.10),$\forall\, t \geqslant T^j(X_n(x)), x \in G_n, -\infty < j \leqslant n$,有

$$X_n(x)(t) = X_n(Y^j(x))(t - T^j(X_n(x))), P\text{-}a.s.$$

令 $n \to \infty$,由定理1.1和引理1.7(i),有

$$X(x)(t) = X(Y^j(x))(t - T(j,x)) \quad P\text{-}a.s..$$

引理1.8证毕.

引理1.9 存在 $\rho < 1$ 使得 $\forall\, j \in \mathbb{Z}, y_1, y_2 \in G_{j+1}, |y_1 - y_2| = 2^{-j-1}$,有 $P(Y^j(y_1) \neq Y^j(y_2)) \leqslant \rho$.

证 由 $\{G_m, m \in \mathbb{Z}\}$ 的结构,不妨假设 $j = 0$. 为证引理1.9,只需证明:

$$P(T^0(X(1,y_1)) = T^0(X(1,y_2))) > 0.$$

而这由(1.5)和(1.7)可立得. 引理1.9证毕.

设 $\triangle$ 为一个 m 阶三角形,$\triangle$ 的顶点为 $\{x_0, x_1, x_2\}$,记 $\partial\triangle$ 为 $\triangle$ 之三顶点.

引理1.10 $\forall\, m \in \mathbb{Z}$,$\triangle$ 为一个 m 阶三角形,x_0 为 $\triangle$ 的一个顶点,则 $\forall\, j \leqslant m$,

$P(\exists\, t \geqslant 0, \exists\, x \in \triangle \cap G_\infty$ 使得 $X(x)(t + T^j(X(x))) \neq X(x_0)(t + T^j(X(x_0)))) \leqslant 2\rho^{m-j}$.

证 由引理1.8,只需证明:

$P(\exists\, x \in \triangle \cap G_\infty$ 使得 $Y^j(x) \neq Y^j(x_0)) \leqslant 2 \cdot \rho^{m-j}$.

$\forall\, j \leqslant m \leqslant n$,由(1.10),

$$\begin{aligned}
Y^j(x) &= X(n,x)(T^j(X(n,x))) \\
&= X(n, X(n,x)(T^m(X(n,x))))(T^j(X(n,x)) \\
&\quad - T^m(X(n,x))) \\
&= X(n, X(n,x)(T^m(X(n,x))))(T^j(X(n, X(n,x) \\
&\quad (T^m(X(n,x)))))),
\end{aligned}$$

$$Y^j(Y^m(x)) = X(n, Y^m(x))(T^j(X(n, Y^m(x))))$$

$$= X(n, X(n,x)(T^m(X(n,x))))(T^j(X(n, X(n,x)$$
$$(T^m(X(n,x))))),$$

因此,

$$Y^j(Y^m(x)) = Y^j(x). \tag{1.43}$$

因为 $Y^m(x) \in \{x_0, x_1, x_2\}$, $(\forall\ x \in \triangle \cap G_\infty)$, 故为证引理 1.10, 又只需证明

$$P(Y^j(x_0) \neq Y^j(x_1)) \leqslant \rho^{m-j}.$$

由(1.43),

$$P(Y^j(x_1) \neq Y^j(x_0))$$
$$= P(Y^{j+1}(x_1) \neq Y^{j+1}(x_0), Y^j(Y^{j+1}(x_1)) \neq Y^j(Y^{j+1}(x_0)))$$
$$= P(Y^{j+1}(x_1) \neq Y^{j+1}(x_0))P(Y^j(x_1) \neq Y^j(x_0) \mid Y^{j+1}(x_1)$$
$$\neq Y^{j+1}(x_0))$$
$$\leqslant \rho P(Y^{j+1}(x_1) \neq Y^{j+1}(x_0))$$
$$\leqslant \cdots \leqslant \rho^{m-j}.$$

引理 1.10 证毕.

在 $C([0,\infty),G)$ 上赋予闭区间上一致收敛拓扑, 则 $C([0,\infty),G)$ 为完备度量空间. 记 $\mathscr{B}(C([0,\infty),G))$ 为其上 Borel σ- 代数, d 为其上度量, (d 与 $C([0,\infty),G)$ 上闭区间上一致收敛拓扑相容). 记

$$L^\circ(C([0,\infty),G))$$
$$= \{Z: \Omega \to C([0,\infty),G), Z \text{ 关于 } \mathscr{B}(C([0,\infty),G) \text{ 可测}\}$$

$\forall\ Z, Y \in L^0(C([0,\infty),G))$, 定义

$$r(Z,Y) = \int_\Omega \frac{d(Z,Y)}{1 + d(Z,Y)} dp,$$

则 $(L^\circ(C([0,\infty),G)), r)$ 为完备度量空间, $Z_n \xrightarrow{r} Z$ 当且仅当 Z_n 依概率收敛到 Z, 即 $\forall\ \varepsilon > 0, \lim\limits_{n\to\infty} P(\omega: d(Z_n, Z) > \varepsilon) = 0$.

定理 1.2 $X: G_\infty \to L^\circ(C([0,\infty),G))$ 在 G_∞ 的任何有界集上一致连续, (其中 $X(\cdot)$ 如定理 1.1 所定义).

证 $\forall\ \varepsilon > 0, M \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$, $\triangle$ 为 m 阶三角形, $x, y \in \triangle \cap$

G_∞,我们首先证明:

"若 $j \leqslant m, Y^j(x) = Y^j(y)$,则

$$\sup_{t \leqslant M} |X(x)(t) - X(y)(t)|$$

$$\leqslant 2^{-j} + \sup\{|X(Y^j(x))(t' + u) - X(Y^j(x))(t')|:$$

$$0 \leqslant t' \leqslant M, 0 \leqslant u \leqslant |T(j,x) - T(j,y)|\}." \quad (1.44)$$

我们分四种情况证明(1.44).

(a) 若 $t \leqslant T(j,x) \wedge T(j,y)$,则

$$|X(x)(t) - X(y)(t)| \leqslant 2^{-j}.$$

(b) 若 $T(j,x) < t \leqslant T(j,y)$,由引理1.8,有

$$|X(x)(t) - X(y)(t)|$$
$$\leqslant |X(Y^j(x))(t - T(j,x)) - Y^j(X)| + |Y^j(x) - X(y)(t)|$$
$$\leqslant \sup_{0 \leqslant u \leqslant T(j,y) - T(j,x)} |X(Y^j(x))(u) - X(Y^j(x))(0)| + 2^{-j}.$$

(c) 若 $T(j,y) < t \leqslant T(j,x)$,同$(b)$一样可以证明:

$$|X(x)(t) - X(y)(t)|$$
$$\leqslant \sup_{0 \leqslant u \leqslant T(j,x) - T(j,y)} |X(Y^j(x))(u) - X(Y^j(x))(0)| + 2^{-j}.$$

(d) 若 $T(j,x) \vee T(j,y) < t$,不妨设 $T(j,x) \leqslant T(j,y)$,由引理1.8,

$$|X(x)(t) - X(y)(t)|$$
$$= |X(Y^j(x))(t - T(j,x)) - X(Y^j(x))(t - T(j,y))|$$
$$\leqslant \text{(1.44) 的右边},$$

故(1.44)成立.

设 $j \leqslant k \leqslant m$,由引理1.8,若 $Y^k(x) = Y^k(y)$,则 $T(j,x) - T(j,y) = T(k,x) - T(k,y)$,由引理1.7和引理1.10有

$$P(|T(j,x) - T(j,y)| > \delta)$$
$$\leqslant P(|T(k,x) - T(k,y)| > \delta) + P(Y^k(x) \neq Y^k(y))$$
$$\leqslant \frac{1}{\delta}\mathbf{E}(T(k,x) + T(k,y)) + 4\rho^{m-k}$$
$$\leqslant \delta^{-1}5^{-k} + 4\rho^{m-k}. \quad (1.45)$$

取 j 充分大使得 $2^{-j}<\frac{\varepsilon}{2}$，由(1.44)，$\forall\, m\geqslant k\geqslant j$，$\triangle$ 为 m 阶三角形，$x,y\in\triangle\cap G_\infty$，$x,y\in B(0,M)$，有

$$\begin{aligned}
&P(\sup_{0\leqslant t\leqslant M}|X(x)(t)-X(y)(t)|>\varepsilon)\\
&\quad\leqslant P(Y^j(x)\neq Y^j(y))+P(|T^j(x)-T^j(y)|>\varepsilon)\\
&\qquad+P(\sup\{|X(z)(t'+u)-X(z)(t')|:\\
&\qquad\qquad 0\leqslant t\leqslant M,0\leqslant u\leqslant\delta,z\in\partial\triangle_j(x)\}>\frac{\varepsilon}{2})
\end{aligned}$$

其中 $\triangle_j(x)$ 为包含 x 的 j 阶三角形全体. 故

$$\begin{aligned}
&P(\sup_{0\leqslant t\leqslant M}|X(x)(t)-X(y)(t)|>\varepsilon)\\
&\quad\leqslant 4\rho^{m-j}+\delta^{-1}5^{-k}+4\rho^{m-k}\\
&\qquad+6\sup_{\substack{z\in G_j\\|z|\leqslant M+1}}P(\sup\{|X(z)(t'+u)-X(z)(t')|:\\
&\qquad\qquad 0\leqslant t'\leqslant M,0\leqslant u\leqslant\delta\}>\frac{\varepsilon}{2})\\
&\quad=I_1+I_2+I_3+I_4.
\end{aligned}$$

取 δ 充分小，使得 $I_4<\frac{\varepsilon}{3}$，取 k 充分大使得 $I_2<\frac{\varepsilon}{3}$，最后取 m 充分大，使得 $4\rho^{m-j}+4\rho^{m-k}\leqslant 2\rho^{m-k}<\frac{\varepsilon}{3}$，故

$$P(\sup_{0\leqslant t\leqslant M}|X(x)(t)-X(y)(t)|>\varepsilon)<\varepsilon. \tag{1.46}$$

设 A 为 G_∞ 中有界集，$\forall\, m\geqslant 1$，A 可被有限个 m 阶三角形覆盖，由(1.46)知：$X:G_\infty\to L^0(C([0,\infty),G))$ 在 A 上一致连续. 定理 1.2 证毕.

定理 1.3 设 $x_n\in G_n$，$n\geqslant 1$，$x\in G$，$x_n\to x(n\to\infty)$，则 $X_n(x_n)\xrightarrow{r}X(x)$.

证 $\forall\, M\geqslant 1$，由定理 1.1，

$$X_n(x_n)(i5^{-n})=X(x_n)(T(n,i,x_n)),$$

故

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant M}|X_n(x_n)(t)-X(x)(t)|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \max_{i\leqslant 5^n M} X(x_n)(i5^{-n}) - X(x)(i5^{-n})| \\
&\quad + \sup_{\substack{u,v\in[0,M],\\ |u-v|\leqslant 5^{-n}}} |X(x)(u) - X(x)(v)| \\
&\quad + \max_{i\leqslant 5^n M} |X(x_n)(T(n,i,x_n)) - X(x_n)(i5^{-n})| + 2^{-n} \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4,
\end{aligned}
$$

由定理 1.2，$I_1 \xrightarrow{P} 0, (n\to\infty)$，又由于 $X(x)$ 轨道的连续性，$I_2 \xrightarrow{P} 0$，$(n\to\infty)$. 为证 $I_3 \xrightarrow{P} 0$，只需证明：

$$
T(n,i,x_n) \max_{i\leqslant 5^n M} |T(n,i,x_n) - i5^{-n}| \xrightarrow{P} 0, (n\to\infty). \tag{1.47}
$$

由引理 1.6，$\{T(n,i,x_n) - i5^{-n}\}_{i\geqslant 0}$ 为鞅，由 Doob 极大不等式.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\big[\max_{i\leqslant 5^n M}(T(n,i,x_n) - i5^{-n})^2\big] \\
&\qquad \leqslant c\mathbf{E}(T(n,5^n M,x_n) - M)^2 \\
&\qquad \leqslant c\cdot 5^n \cdot M \cdot 5^{-2n}\mathbf{E}(W-1)^2.
\end{aligned}
$$

由契比谢夫不等式，(1.47) 成立. 定理 1.3 证毕.

由定理 1.1，定理 1.2，$\forall\, x\in G$，我们已经构造了 G 上从 x 出发的连续随机过程 $X(x)$，下面我们证明它是一个 Feller 过程. 我们采用马氏过程中的标准术语和记号，参见[27] 或[101] 第三章.

记 $\Omega^* = C([0,\infty),G)$（在 Ω^* 中赋以闭区间上一致收敛拓扑），P^x 表示 $X(x)$ 的分布，$\mathscr{F}^*$ 为 Ω^* 上的 Borel σ- 代数，$\forall\, t\geqslant 0$，$\omega\in\Omega^*$，令 $X^*(\omega,t)=\omega(t)$，$\mathscr{F}_t^* = \sigma(X^*(s), 0\leqslant s\leqslant t)$，$\theta_t$ 为 Ω 上的推移算子，$\{P_t, t\geqslant 0\}$ 为 X^* 的转移半群，$\mathbf{E}^x$ 为 P^x 决定的期望算子.

定理 1.4 $X^* = (\Omega^*, \mathscr{F}^*, \mathscr{F}_t^*, X^*(t), \theta_t, P^x)$ 为一个连续的 Feller 过程.

证 $\forall\, 0\leqslant s < t, x_n\in G_n, n\geqslant 1, x\in G, \lim_n x_n = x$，令 $s_n = [5^n s]5^{-n}$，$t_n = [5^n t]5^{-n}$，令 $\varphi\in C_b(G,\mathbb{R})$，$\psi$ 为 Ω^* 上的有界连续函数，由 $X_n(x_n)$ 的马氏性以及定理 1.3 有：

$$
\mathbf{E}^x(\varphi(X^*(t))\psi(X^*(s\wedge\cdot)))
$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(\varphi(X_n(x_n)(t_n))\psi(X_n(x_n)(s_n \wedge \cdot)))$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \psi[X_n(x_n)(s_n \wedge \cdot)(\omega)]$$

$$\left[\int_\Omega \varphi(X_n(X_n(x_n)(s_n,\omega))(t_n - s_n,\omega'))dP(\omega')\right]dP(\omega)$$

由定理 1.3，$X_n(x_n) \xrightarrow{r} X(x)$，因此，存在自然数的子列 $\{n_k, k \geqslant 1\}$，不妨设为 $\{n, n \geqslant 1\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} X_n(x_n)(s_n,\omega) = X(x)(s,\omega), P\text{-}a.s.\ on\ \Omega.$$

故

$$\mathbf{E}^x(\varphi(X^*(t))\psi(X^*(s \wedge \cdot)))$$
$$= \mathbf{E}^x(\psi(X^*(s \wedge \cdot)))\mathbf{E}^{X^*(s)}(\varphi(X^*(t-s))).$$

取 $\psi \equiv 1$ 知 $\{X^*(t), t \geqslant 0\}$ 为马氏过程. 又因为当 $x_n \to x$ 时，用定理 1.3 及 P^x 之定义得：$P^{x_n} \xrightarrow{w} P^x$（$\xrightarrow{w}$ 表弱收敛），故 $\{X^*(t), t \geqslant 0\}$ 为 Feller 过程. 定理 1.4 证毕.

附注 1.1　(i) $\{X^*(t), t \geqslant 0\}$ 称为 Sierpinski 垫上的 Brown 运动.

(ii) 定义 $\{X^*(t), t \geqslant 0\}$ 的生成算子 $\mathbf{A}$ 为 Sierpinski 垫上的 Laplace 算子. 若 $\{X^*(t), t \geqslant 0\}$ 的转移密度存在，则定义其为 Sierpinski 垫上热传导方程的基本解.

关于 $\{X^*(t), t \geqslant 0\}$ 的转移密度的存在性及性质有如下结果，此结果的证明十分繁琐，有兴趣的读者请参见[14] 定理 1.5.

定理 1.5　存在三元函数 $p(t,x,y)$，$(t,x,y) \in (0,\infty) \times G \times G$，使得

(i) $\forall\, x \in G, t > 0, f \in C_b(G,R)$，有

$$P_t f(x) = \int_G f(y)p(t,x,y)\mu(dy),$$

其中 μ 之定义见本章开始处 Sierpinski 垫的构造.

(ii) $\forall\, t > 0, (x,y) \in G \times G, p(t,x,y) = p(t,y,x)$.

(iii) $(t,x,y) \to p(t,x,y)$ 在 $(0,\infty) \times G \times G$ 上连续，且

$$|p(t,x,y)-p(t,x',y')|\leqslant ct^{-1}|(x,y)-(x',y')|^{\alpha_1-\alpha_2},$$

$\forall\ t>0,(x,y),(x',y')\in G\times G$,其中 c 为正常数,其中

$$\alpha_1=\frac{\log 5}{\log 2},\alpha_2=\frac{\log 3}{\log 2}.$$

(iv)$\forall\ (x,y)\in G\times G, t\to p(t,x,y)$ 无穷次可微,且 $\forall\ k\geqslant 1$, $\frac{\partial^k}{\partial t^k}p(t,x,y)$ 为 (t,x,y) 的连续函数,且当 t 固定时,对 (x,y) 满足 $\alpha_1-\alpha_2$ 阶 Holder 条件.

(v) 存在正常数 c_1,c_2,c_3,c_4 使得

$$\begin{aligned} c_1t^{-\alpha_3}\exp\{-c_2(|x-y|t^{-\upsilon})^{\frac{1}{1-\upsilon}}\} & \\ \leqslant p(t,x,y) & \\ \leqslant c_3t^{-\alpha_3}\exp\{-c_4(|x-y|t^{-\upsilon})^{\frac{1}{1-\upsilon}}\}, & \end{aligned}$$

其中 $\alpha_3=\frac{\log 3}{\log 5},\upsilon=\frac{\log 2}{\log 5}$.

有了定理 1.5,我们容易得到下列结果,具体证明请参见[14].

定理 1.6　设 υ 如定理 1.5,总存在正常数 c_5,c_6,c_7,c_8 使得 $\forall\ \delta>0,\forall\ t>0,x\in G$,有

$$\begin{aligned} & c_5\exp\{-c_6(\delta t^{-\upsilon})^{\frac{1}{1-\upsilon}}\}\leqslant P^x(|X^*(t)-x|>\delta) \\ & \leqslant P^x(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|X^*(s)-x|>\delta)\leqslant c_7\exp\{-c_8(\delta t^{-\upsilon})^{\frac{1}{1-\upsilon}}\}. \end{aligned}$$

定理 1.7　$\{X^*(t),t\geqslant 0\}$ 为一个点常返对称扩散过程,且存在联合连续的局部时 $L(x,t)$,使得 $\forall\ g\in C_b(G,\mathbb{R})$,

$$\int_0^t g(X^*(s))ds=\int_G g(x)L(x,t)\mu(dx),$$

$\forall\ N>0$,存在 $\delta_N(\omega)>0$ 使得

$$|L(x,t)-L(y,t)|<c|x-y|^{\frac{1}{2}(\alpha_1-1)}\log\frac{1}{|y-x|},$$
$$\forall\ t\leqslant N,|x-y|<\delta_N(\omega),$$

其中 c 为正常数.

附注 1.2　分形上扩散过程的研究最早源于[131]. 在[131]

中，Kusuoka 构造了 Sierpinski 垫上的 Brown 运动；后来 Barlow 和 Perkins[14] 对 Sierpinski 垫上的 Brown 运动做了全面深入的研究.

附注 1.3 Sierpinski 垫上 Brown 运动$\{X^*(t),t\geqslant 0\}$的构造想法来源于 Knight[123] 中用格子点上的简单对称随机徘徊逼近 $\mathbb{R}$ 上的 Brown 运动，不过在[123]中，极限过程$\{X^*(t),t\geqslant 0\}$为连续平稳独立增量过程，因此必为通常意义下的 Brown 运动，而在此处 G 不是线性空间，$\{X^*(t),t\geqslant 0\}$ 不是平稳独立增量过程，Barlow 和 Perkins 利用分枝过程的性质，给出了$\{X^*(t),t\geqslant 0\}$ 的转移概率密度的存在性及其性质.

附注 1.4 把 Sierpinski 垫抽象化，就得到所谓"网状 fractal". 关于"网状 fractal" 的定义，见[146]，Lindstrim 在[146] 中用非标准分析的方法构造了"网状 fractal" 上的 Brown 运动，后来[130] 则给出了其转移概率密度估计.

附注 1.5 Kigami 在[121]，[122] 利用分析的方法直接定义了 Sierpinski 垫和"网状 fractal" 上的 Laplace 算子，然后以 Dirichlet 型式为工具构造了 Sierpinski 垫和"网状 fractal" 上的 Brown 运动，有兴趣的读者请参见有关文献.

§2 分形集上的自回避过程

本节中，我们在平面上的一个分形集 A 上构造自回避过程. 其中 A 的定义如下：

取 $V^{(0)}=\{v_1^{(0)}=(0,0),v_2^{(0)}=(1,0),v_3^{(0)}=(1,1),v_4^{(0)}=(0,1)\}$，$f_i:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(i=1,2,3,4,5)$，其中 $f_5(x)=\dfrac{1}{3}(x+v_3^{(0)})$；$f_i(x)=\dfrac{1}{3}(x+2v_i^{(0)}),(i=1,2,3,4)$. 取 A_0 为 $v_1^{(0)},v_2^{(0)},\cdots v_4^{(0)}$ 为顶点的平面上的实心闭单位正方形，$f_i(B)=\{f_i(x):x\in B\}$ 为 f_i 在 B 上的像集($\forall\ B\subset\mathbb{R}^2$)，令

$$A_{k+1}=\bigcup_{i=1}^{5}f_i(A_k),(k\geqslant 0),$$
$$A=\bigcap_{k\geqslant 0}A_k.$$

令 E_k 为 A_k 的 5^k 个边长为 $(\frac{1}{3})^k$ 的正方形，$V^{(k+1)}=\bigcup_{i=1}^{5}f_i(V^{(k)}),k\geqslant 0$. 易见 $V^{(k+1)}\supset V^{(k)},k\geqslant 0$，称 $V^{(k)}$ 为 k 阶顶点集.

令

$$C_i=\{w\in C([0,\infty),A):w(0)=v_1^{(0)},w(\infty)\equiv\lim_{t\to\infty}w(t)=v_i^{(0)}\}$$
$$(i=2,3,4),C=\bigcup_{i=2}^{4}C_i,$$

在 C 中定义距离 d 如下：

$$d(u,w)=\sup_{t\in[0,\infty)}|u(t)-w(t)|.$$

则 C 为一个完备可分度量空间. 对于 $i=2,3,4,n\geqslant 0$，再定义 $W_i^{(n)}$ 是一切满足下列条件的从 $[0,\infty)$ 到 E_n 的映射 w：

(i) $w(0)=v_1^{(0)}$；

(ii) $\exists\ L(w)\geqslant 1$，使得 $w(t)=v_i^{(0)},(\forall\ t\geqslant L(w))$；

(iii) $|w(i)-w(i+1)|=3^{-n},\overrightarrow{w(i),w(i+1)}\subset E(i\geqslant 0,i\leqslant L(w)-1)$，其中 $\overrightarrow{a,b}$ 表点 a 和 b 的联线；

(iv) $w(i_1)\neq w(i_2)$，当 $0\leqslant i_1<i_2\leqslant L(w),i_1,i_2\in\mathbb{N}\cup\{0\}$；

(v) $w(t)=(i+1-t)w(i)+(t-i)w(i+1)$，
$\forall\ i\leqslant t\leqslant i+1,i\geqslant 0$.

易见若 $w\in W_i^{(n)},t_1,t_2\in[0,\infty),0\leqslant t_1<t_2\leqslant L(w)$，则 $w(t_1)\neq w(t_2)$.

记 $W^{(n)}=\bigcup_{i=2}^{4}W_i^{(n)}$，显然，$W^{(n)}$ 是有限空间，在 $W^{(n)}$ 上定义概率测度 $u_n(p,q)$，其中 p,q 为二个非负的不同时为 0 的参数.

令 $\overline{Q}_n$ 是 E_n 中边长为 $(\frac{1}{3})^n$ 的正方形的全体所构成的集合，再令

$S_1(w)=\#\{\square\in\overline{Q}_n:w$ 恰巧经过□的一个边$\}$，$S_2(w)$，$S_3(w),S_4(w)$ 类似地定义 $(w\in W^{(n)})$. 易见 $S_4(w)=0(\forall\ w\in$

$w^{(n)})$. 令 $\tilde{W}_i^{(n)} = \{w: w \in W_i^{(n)}, S_3(w) = 0\}, \tilde{W}^{(n)} = \bigcup_{i=2}^{4} \tilde{W}_i^{(n)}$. 再令

$$P_{n,i}(p,q) = \sum_{w \in W_i^{(n)}, S_3(w)=0} p^{S_1(w)} q^{2S_2(w)}, n \geqslant 0, i = 2,3,4,$$

$$P_n(p,q) = \sum_{i=2}^{4} P_{n,i}(p,q) = \sum_{w \in W^{(n)}, S_3(w)=0} P^{S_1(w)} q^{2S_2(w)}.$$

$$u_n(p,q)(w) = \begin{cases} \dfrac{p^{S_1(w)} q^{2S_2(w)}}{P_n(p,q)}, w \in W^{(n)}, S_3(w) = 0; \\ 0, w \in W^{(n)}, S_3(w) \neq 0. \end{cases}$$

显然,$u_n(p,q)$ 是 $W^{(n)}$ 上的一个概率测度.

引理 2.1 (i)$P_{0,3}(p,q) = 2q^2, P_{0,2}(p,q) = P_{0,4}(p,q) = p$;

(ii)$P_{n,3}(p,q) = (2q^2)^{3^n}, n \geqslant 0$;

(iii)$P_{n,2}(p,q) = P_{n,4}(p,q) = \dfrac{p}{2q^2} P_{n,3}(p,q), n \geqslant 0$;

(iv) 当 $q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $P_n(p, \dfrac{1}{\sqrt{2}}) = 2(p + q^2) = 1 + 2p$ $(p \geqslant 0, n \geqslant 0)$.

证 (i) 显然成立.

(ii) 当 $w \in W_3^{(n)}, S_3(\omega) = 0$ 时,必有 $w(\infty) = v_3^0, S_2(w) = 3^n$, $S_1(w) = 0$,而且这样的 w 共有 2^{3^n} 个,所以 $P_{n,3}(p,q) = 2^{3^n}(q^2)^{3^n} = (2q^2)^{3^n}$. 用类似的方法可得(iii).

(iv) 由于 $P_k(p,q) - P_{k-1}(p,q) = 2^{3^k-1} q^{2(3^{k-1}-1)}(p + q^2)[(2q^2)^{3^k - 3^{k-1}} - 1]$,因此 $P_k(p,q) = P_{k-1}(p,q)(k \geqslant 1)$ 的充要条件是 $q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 引理 2.1 证毕.

令 $\mu_n^p \equiv u_n(p, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$,则有

$$\mu_n^p(w) = \begin{cases} p^{S_1(w)} (\frac{1}{2})^{S_2(w)} / 1 + 2p, w \in W^{(n)}, S_3(w) = 0; \\ 0, w \in W^{(n)}, S_3(w) \neq 0. \end{cases}$$

下面我们引进对 n 阶顶点集 $V^{(n)}$ 的"击中时"$\{T_k^n\}$. 对任何

$w \in C, n \geqslant 0$,令 $T_0^n(w) = 0, T_{k+1}^n(w) = \inf\{t > T_k^n(w): w(t) \in V^{(n)} \setminus \{w(T_k^n(w))\}\}, k \geqslant 0$,约定 $\inf\varnothing = \infty$.

引理 2.2 (i)$\forall\ w \in C, n \geqslant 0, \exists\ M(n,w) \geqslant 0$ 使得

$$T_k^n(w)\begin{cases} < \infty, \text{当 } k \leqslant M(n,w) \\ = \infty, \text{当 } k > M(n,w). \end{cases}$$

(ii)$\forall\ w \in W^{(n)}, n \geqslant 0$,我们有 $M(n,w) = L(w)$,并且

$$T_k^n(w) = \begin{cases} k, k \leqslant M(n,w) = L(w); \\ \infty, k > M(n,w) = L(w), \end{cases}$$

$$W(T_{L(w)}^n)(w) = v_i^{(0)} \quad (w \in W_i^{(n)}).$$

证 (i)$\forall\ w \in C_i$,因为 $\lim\limits_{t\to\infty} w(t) = v_i^{(0)}$,所以存在 $\alpha = \alpha(w) > 0$ 使得 $|w(t) - v_i^{(0)}| < \dfrac{1}{2^{n+1}} (t \geqslant \alpha)$,但是对任何 $v_1, v_2 \in V^{(n)}$,有 $|v_1 - v_2| \geqslant \dfrac{1}{2^n}$,所以 $w(t) \overline{\in} V^{(n)} - \{v_i^{(0)}\}, (t \geqslant \alpha)$. 又因为 w 在 $[0,\alpha]$ 上一致连续,所以可取充分大的正整数 $B = B(\omega) > 0$,使

$$\sup_{r,p\in[t_k,t_{k+1}]} |w(r) - w(p)| < \frac{1}{2^n} \quad (t_k = k \cdot \alpha/B, k = 0, \cdots, B).$$

但是当 $T_k^n \neq T_j^n, T_k^n, T_j^n$ 皆有限时,必有

$$|w(T_k^n) - w(T_j^n)| \geqslant \frac{1}{2^n},$$

所以在 $[t_k, t_{k+1}]$ 中至多只有一个 $T_{i_k}^n \in [t_k, t_{k+1})$,又 $|w(t) - v_i^{(0)}| < \dfrac{1}{2^{n+1}} (\forall\ t \in [\alpha, \infty))$,所以 $[\alpha, \infty)$ 中也至多只有一个 $T_{i_\alpha}^n$,总之,至多存在有限个 $\{T_k^n\}$ 使每个 T_k^n 都是有限实值,即存在 $M(n,w) \geqslant 0$ 使得

$$T_k^n(w)\begin{cases} < \infty, \text{当 } k \leqslant M(n,w); \\ = \infty, \text{当 } k > M(n,w). \end{cases}$$

(ii) 是显然的.

附注 2.1 对于任何 $w \in C_i$,令

$$m = \begin{cases} M(n,w), \text{当 } w(T_M^n(w)) = v_i^{(0)}, \\ M(n,w) + 1, \text{当 } w(T_M^n(w)) \neq v_i^{(0)}, \end{cases}$$

这样我们总有一串击中时刻$\{T_k^n, 0 \leqslant k \leqslant m\}$使得$w(T_m^n(w)) = v_i^{(0)}, (i = 2,3,4)$.

下面我们将引进由$\widetilde{W}^{(n)}$到$\widetilde{W}^{(k)}(k \leqslant n, k, n \geqslant 0)$的"压平"映射$Q_n^k$. 对任何$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,令$\pi_1(x) = (x_1, 0), \pi_2(x) = (0, x_2)$为投影算子.

定义 2.1(压平映射) $\forall\, w \in \widetilde{W}^{(n)}, k \leqslant n$:

(1) 令$Q_n^k(w)(0) = w(T_0^k(w)) = w(0) = v_1^{(0)}$.

(2)(a) 当$\pi_i(w(T_1^k(w)) - w(T_0^k(w))) \neq (0,0), (i = 1,2)$时,由于$w \in \widetilde{W}^{(n)}$,所以$\pi_j(w(T_1^n(w)) - w(T_0^n(w)))(j = 1,2)$中恰有一个不等于$(0,0)$,设$\pi_j(w(T_1^n(w)) - w(T_0^n(w))) \neq (0,0)$,这时定义

$$Q_n^k(w)(1) = w(T_0^k(w)) + \pi_j(w(T_1^k(w)) - w(T_0^k(w))),$$

$$Q_n^k(w)(2) = w(T_1^k(w)).$$

(b) 当$\pi_i(w(T_1^k(w)) - w(T_0^k(w)))(i = 1,2)$中恰有一个不等于$(0,0)$时,这时定义

$$Q_n^k(w)(1) = w(T_1^k(w)).$$

(3) 设$Q_n^k(w)(i), i = 0,1,2,\cdots,n_r$已经定义,其中$Q_n^k(w)(n_r) = w(T_r^k(w))$, 注意由于$V^{(k)} \subset V^{(n)}$, $(k \leqslant n)$, 所以T_r^k必为$\{T_i^n(w)\}$中的一个,令$T_r^k(w) = T_{f(r)}^n(w)$,

(a) 当$\pi_i(w(T_{r+1}^k(w)) - w(T_r^k(w))) \neq (0,0), (i = 1,2)$时,由于$w \in \widetilde{W}^{(n)}$,所以$\pi_j(w(T_{f(r)+1}^n(w)) - w(T_{f(r)}^n(w)))(j = 1,2)$中恰有一个不等于$(0,0)$, 设$\pi_j(w(T_{f(r)+1}^n(w)) - w(T_{f(r)}^n(w))) \neq (0,0)$,这时定义

$$Q_n^k(w)(n_r + 1) = w(T_r^k(w)) + \pi_j(w(T_{r+1}^k(w)) - w(T_r^k(w))),$$

$$Q_n^k(w)(n_r + 2) = w(T_{r+1}^k(w)).$$

(b) 当$\pi_i(w(T_{r+1}^k(w)) - w(T_r^k(w)))(i = 1,2)$中恰有一个不

等于(0,0)时，则定义$Q_n^k(w)(n_r+1)=w(T_{r+1}^k(w))$，一直定义到$Q_n^k(w)(1),Q_n^k(w)(2),\cdots,Q_n^k(w)(n_m),Q_n^k(w)(n_m) = w(T_m^k(w)) \in \{v_2^{(0)},v_3^{(0)},v_4^{(0)}\}$，其中 m 如附注 2.1.

(4)$Q_n^k(w)(\cdot)$ 在$[i,i+1]$$(i=0,1,\cdots,m-1)$内用线性内插的办法定义.

(5)$Q_n^k(w)(\cdot)$ 在 $[n_m,\infty]$ 内均定义为 $Q_n^k(w)(t) = Q_n^k(w)(n_m),t\geqslant n_m$. 显见上述定义的 Q_n^k 确是由 $W^{(n)}$ 到 $W^{(k)}$.

引理2.3 (i)$Q_n^k(\tilde{W}_i^{(n)})=\tilde{W}_i^{(k)}$,$(\forall\ i=2,3,4,\forall\ k\leqslant n,k,n\geqslant 0)$，更有 $Q_n^k(\tilde{W}^{(n)})=\tilde{W}^{(k)}(\forall\ k\leqslant n,k,n\geqslant 0)$；

(ii) 若 $j\leqslant k\leqslant n$，则 $Q_k^j\circ Q_n^k=Q_n^j$；

(iii)$\tilde{W}_3^{(n)}$ 中共有 2^{3^n} 个不同的函数，$\tilde{W}_2^{(n)}(\tilde{W}_4^{(n)})$ 中共有 2^{3^n-1} 个不同的函数，且

$$\mu_n^p(w)=\begin{cases}\dfrac{(\frac{1}{2})^{3^n}}{1+2p}, w\in W_3^{(n)},S_3(w)=0,\\ p\,\dfrac{(\frac{1}{2})^{3^n-1}}{1+2p}, w\in W_2^{(n)}\cup W_4^{(n)},S_3(w)=0,\\ 0,S_3(w)\neq 0,w\in W^{(n)}.\end{cases}$$

(iv)Q_n^k 的 μ_n^k 分布 $\mu_n^p\circ(Q_n^k)^{-1}$ 为

$$\mu_n^p\circ(Q_n^k)^{-1}(\overline{w})\equiv\mu_n^p(\{w\in\tilde{W}^{(n)}:Q_n^k(w)=\overline{w}\})=\mu_k^p(\overline{w})$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(\frac{1}{2})^{3^k}}{1+2p}, \overline{w}\in W_3^{(k)},S_3(\overline{w})=0,\\ p\,\dfrac{(\frac{1}{2})^{3^k-1}}{1+2p}, \overline{w}\in W_2^{(k)}\cup W_4^{(k)},S_3(\overline{w})=0,\\ 0,\overline{w}\in W^{(k)},S_3(\overline{w})\neq 0.\end{cases}$$

证 (i),(ii),(iii) 均为显然，只证(iv).

(a) 当 $\overline{w}\in\tilde{W}_3^{(k)}$ 时，$\{w\in\tilde{W}^{(n)}:Q_n^k(w)=\overline{w}\}=\{w\in\tilde{W}_3^{(n)}:$

$Q_n^k(w)=\overline{w}\}$ 恰有 $2^{3^n-3^k}$ 个函数，而由定义 $\widetilde{W}_3^{(n)}$ 中每一个函数 w_3 的 μ_n^p 测度 $\mu_n^p(w_3)=(\frac{1}{2})^{3^n}/(1+2p)$，故

$$\mu_n^p\circ(Q_n^k)^{-1}(\overline{w})=2^{3^n-3^k}\cdot(\frac{1}{2})^{3^n}/(1+2p)=(\frac{1}{2})^{3^k}/(1+2p)$$
$$=\mu_k^p(\overline{w})$$

(b) 当 $\overline{w}\in\widetilde{W}_2^{(k)}(\widetilde{W}_4^{(k)})$ 时，$\{w\in\widetilde{W}^{(n)}:Q_n^k(w)=\overline{w}\}=\{w\in\widetilde{W}_2^{(n)}:Q_n^k(w)=\overline{w}\}$ 恰有 $2^{3^n-1}\cdot2^{-(3^k-1)}$ 个函数，而 $\widetilde{W}_2^{(n)}$ 中每一个函数 w_2 的 μ_n^p 测度为 $\mu_n^p(w_2)=p(\frac{1}{2})^{3^n-1}/(1+2p)$. 因此

$$\mu_n^p\circ(Q_n^k)^{-1}(\overline{w})=p(\frac{1}{2})^{3^k-1}/(1+2p)=\mu_k^p(\overline{w}).$$

引理 2.3 证毕.

定理 2.1 设 $\{\mu_n^p,n\geqslant0\}$ 如前所定义，则存在概率空间 $(\Omega=\prod_{n=0}^{\infty}\widetilde{W}^{(n)},\mathscr{F}=\prod_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n,P)$ 及由 Ω 到 $\widetilde{W}^{(n)}$ 的自然投影 Y_n（即是 $\forall\,\omega=(w_0,w_1,w_2,\cdots)\in\Omega,Y_n(\omega)=w_n$）使得

(i) $P(\{\omega=(w_0,w_1,w_2,\cdots)\in\Omega:Q_n^k(w_n)=w_k,$
$\forall\,0\leqslant k\leqslant n<\infty\})=1,$ (2.1)

(ii) $P\circ Y_n^{-1}=\mu_n^p,(n\geqslant0).$ (2.2)

附注 2.2 由于 $\widetilde{W}^{(n)}$ 是有限集，$\mathscr{F}_n$ 可取作 $\widetilde{W}^{(n)}$ 的一切子集所成的 σ- 代数.

附注 2.3 若记 $Y_n(t,\omega)=w_n(t),\forall\,\omega=(w_0,w_1,w_2,\cdots)\in\Omega,t\in[0,\infty)$，则对任何 $n\geqslant0$ 固定，$\{Y_n(t)\equiv Y_n(t\cdot),t\in[0,\infty)\}$ 是一个定义在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上取值于 E_n 的随机过程，且 $\lim\limits_{t\to\infty}Y_n(t,\omega)$ 存在且属于 $\{v_2^{(0)},v_3^{(0)},v_4^{(0)}\}$.

证 $\forall\,n\geqslant0,w_i\in\widetilde{W}^{(i)},(i=0,1,2,\cdots,n)$，定义

$$P^{(n)}((w_0,w_1,\cdots,w_n))=\begin{cases}\mu_n^p(w_n),\text{若 }Q_n^i(w_n)=w_i,(0\leqslant i\leqslant n)\\0,\text{反之}\end{cases}$$

注意 $Q_k^j \circ Q_n^k = Q_n^j (\forall\ j \leqslant k \leqslant n)$ 及引理 1.3、引理 1.4，

(a) 若 $Q_n^i(w_n) = w_i, (0 \leqslant i \leqslant n)$，则

$$\begin{aligned}
&\sum_{w_{n+1} \in \tilde{W}^{(n+1)}} P^{(n+1)}((w_0, w_1, \cdots, w_n, w_{n+1})) \\
&= \sum_{\substack{w_{n+1} \in \tilde{W}^{(n+1)} \\ Q_{n+1}^n(w_{n+1}) = w_n}} P^{(n+1)}((w_0, w_1, \cdots, w_n, w_{n+1})) \\
&= \sum_{\substack{w_{n+1} \in \tilde{W}^{(n+1)} \\ Q_{n+1}^n(w_{n+1}) = w_n}} P^{(n+1)}((Q_n^0 \circ Q_{n+1}^n(w_{n+1}), \cdots, Q_n^n \circ Q_{n+1}^n(w_{n+1}),
\end{aligned}$$

$$w_{n+1})) = \sum_{\substack{w_{n+1} \in \tilde{W}^{(n+1)} \\ Q_{n+1}^n(w_{n+1}) = w_n}} \mu_{n+1}^P(w_{n+1})$$

$$= \mu_{n+1}^p \circ (Q_{n+1}^n)^{-1}(w_n) = \mu_n^p(w_n).$$

(*b*) 若存在 $0 \leqslant i \leqslant n$，使 $Q_n^i(w_n) \neq w_i$，则对任何 $w_{n+1} \in \tilde{W}^{(n+1)}$，必不能有 $Q_{n+1}^j(w_{n+1}) = w_j$，对一切 $j = 0, 1, 2, \cdots, n$. 故

$$\sum_{w_{n+1} \in \tilde{W}^{(n+1)}} P^{n+1}((w_0, w_1, \cdots, w_n, w_{n+1})) = 0 = P^n((w_0, w_1, \cdots, w_n)).$$

（若存在 $w_{n+1} \in \tilde{W}^{(n+1)}$，使得 $Q_{n+1}^j(w_{n+1}) = w_j, j = 0, 1, 2, \cdots, n$. 特别地，$w_i = Q_{n+1}^i(w_{n+1}) = Q_n^i \circ Q_{n+1}^n(w_{n+1}) = Q_n^i(w_n) \neq w_i$ 矛盾）

总之，由(*a*)和(*b*)及 Kolmogrov 相容性定理，所以在 $\mathscr{F}$ 上存在一个概率测度 P，使得

$$P((w_0, w_1, \cdots, w_n) \times \prod_{k>n} \tilde{W}^{(k)}) = P^{(n)}((w_0, w_1, \cdots, w_n)),$$

$n \geqslant 0, w_k \in \tilde{W}^{(k)}$，$P$ 满足(2.1)，(2.2)是显然的. 定理 2.1 证毕.

对任何 $\omega = (w_0, w_1, \cdots) \in \Omega$，

令 $l_{n,i} = \inf\{t \geqslant 0 : Y_n(t) \in V_i^{(0)}\}, i = 2, 3, 4,$

$l_n = \inf\{t \geqslant 0 : Y_n(t) \in \{V_2^{(0)}, V_3^{(0)}, V_4^{(0)}\}\}.$

引理 2.4 (i) $l_{n,3} = 2 \times 3^n, l_{n,2} = l_{n,4} = l_{n,3} - 1, n \geqslant 0$

(ii)$\mathbf{E}l_n = 2\times 3^n - \frac{2p}{1+2p}, (n\geqslant 1)$

证 (i) 显然成立.

(ii) 由于

$$l_n(\omega)=\begin{cases}2\times 3^n, n\geqslant 1, Y_n(\omega)\in \widetilde{W}_3^{(n)},\\ 2\times 3^n-1, n\geqslant 1, Y_n(\omega)\in \widetilde{W}_2^{(n)}\cup \widetilde{W}_4^{(n)},\end{cases}$$

所以

$$\mathbf{E}(l_n)=2\times 3^n\sum_{w\in \widetilde{W}_3^{(n)}}\mu_n^p(w)+(2\times 3^n-1)\sum_{w\in \widetilde{W}_2^{(n)}\cup \widetilde{W}_4^{(n)}}\mu_n^p(w)$$

$$=2\times 3^n\times 2^{3^n}\times\frac{(\frac{1}{2})^{3^n}}{1+2p}+(2\times 3^n-1)\times 2^{3^n}\times\frac{(\frac{1}{2})^{3^n-1}}{1+2p}p$$

$$=\frac{2\times 3^n}{1+2p}+\frac{(2\times 3^n-1)2p}{1+2p}=2\cdot 3^n-\frac{2p}{1+2p}.$$

$\forall\, n\geqslant 0, i=2,3,4$,定义 $g_i^n: C_i\to C_i$ 如下

$$g_i^n(w)(t)=w(l_{n,i}t), w\in C_i, t\in[0,\infty),$$

$$X_n(\omega)=g_i^n(Y_n(\omega)),\text{当 } w_n=Y_n(\omega)\in\widetilde{W}_i^{(n)}, \omega\in\Omega,$$

$$X_n(t,\omega)=g_i^n(Y_n(\omega))(t)=g_i^n(w_n)(t)=w_n(l_{n,i}t),$$

$$\text{当 } \omega=(w_0,w_1,\cdots)\in\Omega, w_n\in\widetilde{W}_i^{(n)}.$$

再令 $S_k^n(w)=T_k^n(w)-T_{k-1}^n(w)$,

$$(w\in C,\text{定义 } T_{-1}^n(w)=0), n,k\geqslant 0.$$

引理 2.5 令 $\Omega_i=\{\omega=(w_0,w_1,\cdots)\in\Omega: w_n\in\widetilde{W}_i^{(n)}, n\geqslant 0\}, i=2,3,4, \Omega'=\Omega_2\cup\Omega_3\cup\Omega_4$,则 $P(\Omega')=1$

证 由定理 2.1 及 $Q_n^k(\widetilde{W}_i^{(n)})=\widetilde{W}_i^{(k)}, (k,n\geqslant 0, k\leqslant n, i=2,3,4)$ 即得引理 2.5.

引理 2.6 任取 $\omega=(w_0,w_1,\cdots)\in\Omega'$,总有 $l_n(\omega)=L(Y_n(\omega))=L(w_n)$,且 $l_n(\omega)=l_{n,i}(\omega)$(当 $\omega\in\Omega_i$).

证 由定义即得引理 2.6.

从 $\{E_n, n\geqslant 0\}$ 的结构立即得到:

引理 2.7 任取 $\omega = (w_0, w_1, \cdots) \in \Omega'$, $r, n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r > n > 0$，总有

$$S_k^n(Y_r(\omega)) = S_k^n(w_r) =$$

$$\begin{cases} l_{r-n}(\omega) = 2 \cdot 3^{r-n}, \omega \in \Omega_3, 1 \leqslant k \leqslant 3^n, \\ l_{r-n}(\omega) = 2 \cdot 3^{r-n} - 1, \omega \in \Omega_2 \cup \Omega_4, k = \dfrac{3^n + 1}{2}, \\ l_{r-n}(\omega) + 1 = 2 \cdot 3^{r-n}, \omega \in \Omega_2 \cup \Omega_4, k \neq \dfrac{3^n + 1}{2}, 1 \leqslant k \leqslant 3^n. \end{cases}$$

引理 2.8 任取 $\omega = (w_0, w_1, \cdots) \in \Omega'$, $r > q > 0$，总有

(i) $w_r(2j \times 3^{r-q}) = w_q(2j)$，当 $\omega \in \Omega_3$, $j = 1, 2, \cdots, 3^q$ 或 $\omega \in \Omega_2 \cup \Omega_4$, $j = 1, 2, \cdots, \dfrac{3^q - 1}{2}$;

$w_r(2j \times 3^{r-q} - 1) = w_q(2j - 1)$，当 $\omega \in \Omega_2 \cup \Omega_4$, $j = \dfrac{3^q + 1}{2}, \cdots, 3^q$;

(ii) $X_r(T_j^q(X_r(\omega)), \omega) =$

$$\begin{cases} Y_q(2j, \omega) = w_q(2j), \omega \in \Omega_3, j = 1, 2, \cdots, 3^q, \\ Y_q(2j, \omega) = w_q(2j), \omega \in \Omega_2 \cup \Omega_4, j = 1, \cdots, \dfrac{3^q - 1}{2}, \\ Y_q(2j - 1, \omega) = w_q(2j - 1), \omega \in \Omega_2 \cup \Omega_4, j = \dfrac{3^q + 1}{2}, \cdots, 3^q. \end{cases}$$

证 (i) 由 E_r, E_q 的结构即可得(i).

(ii) 首先注意：$\forall\, a > 0, r > q$，总有 $aT_j^q(w_r(a\,\cdot)) = T_j^q(w_r(a\,\cdot))$，特别地，$l_r T_j^q(g^r(w_r)) = T_j^q(w_r)$，即是 $l_r T_j^q(X_r(\omega)) = T_j^q(Y_r(\omega))$.

(a) 任取 $\omega \in \Omega_3$, $j = 1, 2, \cdots, 3^q$，有

$$\begin{aligned} X_r(T_j^q(X_r(\omega)), \omega) &= Y_r(l_r T_j^q(X_r(\omega)), \omega) \\ &= Y_r(T_j^q(Y_r(\omega)), \omega) = w_r(T_j^q(w_r)) \\ &= w_r\Big(\sum_{k=1}^{j} S_k^q(w_r)\Big) = w_r\Big(\sum_{k=1}^{j} 2 \cdot 3^{r-q}\Big) \\ &= w_r(2j \cdot 3^{r-q}) = w_q(2j). \end{aligned}$$

(b) 任取 $\omega \in \Omega_2 \cup \Omega_4, j = 1,2,\cdots,\frac{3^q-1}{2}$,有

$$X_r(T_j^q(X_r(\omega),\omega)) = w_r(\sum_{k=1}^{j} S_k^q(w_r)) = w_r(\sum_{k=1}^{j} 2\cdot 3^{r-q})$$

$$= w_r(2j\cdot 3^{r-q}) = w_q(2j).$$

(c) 任取 $\omega \in \Omega_2 \cup \Omega_4, j = \frac{3^q+1}{2},\cdots,3^q$,有

$$X_r(T_j^q(X_r(\omega)),\omega) = w_r(\sum_{k=1}^{j} S_k^q(w_r))$$

$$= w_r(S_{\frac{3^q+1}{2}}^q(w_r) + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq\frac{3^q+1}{2}}}^{j} S_k^q(w_r))$$

$$= w_r(2\cdot 3^{r-q} - 1 + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq\frac{(3^q+1)}{2}}}^{j} 2\cdot 3^{r-q})$$

$$= w_r(2j\cdot 3^{r-q} - 1) = w_q(2j-1).$$

引理 2.8 证毕.

引理 2.9 任取 $r > q > 0, r,q \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \omega \in \Omega'$,均有 $T_{3^q}^q(Y_r(\omega)) = 1$.

证 (a) 设 $\omega \in \Omega_3$,则 $T_{3^q}^q(X_r(\omega)) = \frac{1}{l_r(\omega)} T_{3^q}^q(Y_r(\omega))$

$$= \frac{1}{l_r(\omega)}\sum_{k=1}^{3^q} S_k^q(Y_r(\omega)) = \frac{1}{l_r(\omega)}\sum_{k=1}^{3^q} l_{r-q}(\omega)$$

$$= \frac{1}{2\cdot 3^r} 3^q \cdot 2\cdot 3^{r-q} = 1.$$

(b) 若 $\omega \in \Omega_2 \cup \Omega_4$,则

$$T_{3^q}^q(X_r(\omega)) = \frac{1}{2\cdot 3^{r-1}}\sum_{k=1}^{3^q} L_{r-q}(\omega) = 1.$$ 引理 2.9 证毕.

引理 2.10 任取 $\omega = (w_0, w_1, \cdots) \in \Omega_i, n \geqslant 0, t \in [1,\infty)$, $(i = 2,3,4)$,总有 $X_n(t,\omega) \equiv v_i^{(0)}$

证 由定义 $X_n(1,\omega) = w_n(l_n(\omega)) = w_n(L(w_n)) = v_i^{(0)}$,从而

$X_n(t,\omega) \equiv v_i^{(0)}, t \in [1,\infty)$.

定理 2.2 存在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取值于A的连续轨道的随机过程$X = \{X(t,\omega), t \in [0,\infty)\}$使得

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant t<\infty} |X_n(t,\omega) - X(t,\omega)| = 0 \quad P\text{-}a.s..$$

证 (a) 由于任取$t \in [1,\infty)$, $\omega \in \Omega_i$, $n \geqslant 0$, $i = 2,3,4$, 恒有$X_n(t,\omega) = v_i^{(0)}$, 所以取$X(t,\omega) = v_i^{(0)}$, $(t \in [1,\infty), \omega \in \Omega_i, i = 2, 3,4)$

(b)(1) 任取$t \in [0,1]$, $\omega \in \Omega_3$, $r > q$, $r,q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, 总存在$j \in \{0,1,2,\cdots,3^q - 1\}$, 使得

$$T_j^q(X_r(\omega)) \leqslant t \leqslant T_{j+1}^q(X_r(\omega))$$

注意$T_j^q(X_r(\omega)) = \dfrac{1}{l_r(\omega)} T_j^q(Y_r(\omega)) = \dfrac{1}{l_r(\omega)} \sum\limits_{k=q}^{j} l_{r-q}(\omega) = j3^{-q}$.

所以$t \in [j3^{-q}, (j+1)3^{-q}]$, 而由引理 2.8 有

$$\begin{aligned} &|X_r(t,\omega) - X_r(T_j^q(X_r(\omega)),\omega)| \\ &= |w_r(l_r(\omega)t) - w_q(2j)| = |w_r(2\cdot 3^r t) - w_q(2j)|, \end{aligned}$$

但是$2\cdot 3^r t \in [2j\cdot 3^{r-q}, 2(j+1)3^{r-q}]$, $w_r(2j\cdot 3^{r-q}) = w_q(2j)$, 故$w_r(2\cdot 3^r t) \in w_q([2j, 2(j+1)])$, 从而$|w_r(2\cdot 3^r t) - w_q(2j)| \leqslant 2\cdot 3^{-q}$.

总之 $|X_r(t,\omega) - X_r(T_j^q(X_r(\omega)),\omega)| \leqslant 2\cdot 3^{-q}$. 因此, 当$r, r' > q$时有

$$\begin{aligned} |X_r(t,\omega) - X_{r'}(t,\omega)| &\leqslant |X_r(t,\omega) - X_r(T_j^q(X_{r'}(\omega)),\omega)| \\ &+ |X_{r'}(t,\omega) - X_{r'}(T_j^q(X_{r'}(\omega)),\omega)| \\ &+ |X_r(T_j^q(X_r(\omega)),\omega) - X_{r'}(T_j^q(X_{r'}(\omega)),\omega)| \\ &\leqslant 4\cdot 3^{-q}, \text{(因为由引理 2.8(ii), 上式第 3 项为 0).} \end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{r,r'\to\infty} \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |X_r(t,\omega) - X_{r'}(t,\omega)| \leqslant 4\cdot 3^{-q}$. 由$q$的任意性可知

$$\lim_{r,r'\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |X_r(t,\omega) - X_{r'}(t,\omega)| = 0, (\omega \in \Omega_3).$$

(2) 仿(1) 同样可证

$$\lim_{r,r'\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|X_r(t,\omega)-X_{r'}(t,\omega)|=0,(\omega\in\Omega_2\cup\Omega_4).$$

综合(1),(2),定理 2.2 得证.

定理 2.3 $\forall\ \omega\in\Omega',t_1,t_2\in[0,1],t_1\neq t_2$,总有

$$X(t_1,\omega)\neq X(t_2,\omega).$$

证 任取$\omega\in\Omega'\equiv\Omega_2\cup\Omega_3\cup\Omega_4$,其中$\Omega_i=\{\omega=(w_0,w_1,\cdots)\in\Omega:w_n\in\tilde{W}_i^{(n)},n=0,1,2,\cdots\}$. 任取$t_1,t_2\in[0,1],t_1\neq t_2$,不妨设$0<t_1<t_2$,于是总存在正整数$u>0$,使得$t_2-t_1>3^{-u}$,令

$$k_r3^{-2u}<t_r<(k_r+1)3^{-2u},(r=1,2)\tag{2.3}$$

则有$k_2\geqslant k_1+2$

设$\omega\in\Omega_i(i=2,3,4)$,则有$X_n(t,\omega)=w_n(l_{n,i}t)$,

其中,由引理 2.4,

$$l_{n,i}=\begin{cases}2\times 3^n,i=3;\\2\times 3^n-1,i=2,4.\end{cases}\tag{2.4}$$

所以,$\forall\ r=1,2$,

$$\begin{aligned}X_n(t_r,\omega)&=w_n(t_rl_{n,i})=w_n(k_r3^{-u}l_{n,i})\\&\quad-\{w_n(t_rl_{n,i})-w_n(k_r3^{-u}l_{n,i})\}\end{aligned}$$

故 $|X_n(t_2,\omega)-X_n(t_1,\omega)|$

$$\begin{aligned}&\geqslant|w_n([t_2l_{n,i}])-w_n([t_1l_{n,i}])|\\&\quad-|w_n(t_2l_{n,i})-w_n([t_2l_{n,i}])|-|w_n(t_1l_{n,i})-w_n([t_1l_{n,i}])|\\&\triangleq H_n(1)-H_n(2)-H_n(3)\end{aligned}\tag{2.5}$$

(其中$[x]$表不超过x的最大整数).

令$w_n(t)=(w_{n,1}(t),w_{n,2}(t)),e_1=(1,0),e_2=(0,1)$,由$\omega=(w_0,w_1,\cdots)\in\Omega_i$,知$w_i\in\tilde{W}_i^{(n)}$及$E_n$的结构知

$$|w_n(k)-w_n(k+\rho)|=\rho3^{-n},(\forall\ 0<\rho<1,k\in\mathbb{N}\cup\{0\})\tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}|w_n(k+j)-w_n(k)|&\geqslant|w_{n,1}(k+j)-w_{n,1}(k)|\\&\quad\vee|w_{n,2}(k+j)-w_{n,2}(k)|\end{aligned}$$

$$\geqslant \frac{j}{2} \cdot 3^{-n} (\forall\ j,k \geqslant 0) \qquad (2.7)$$

由(2.3),(2.4),(2.6),(2.7)知

$$\begin{aligned} H_n(1) &= |w_n([t_2 l_{n,i}]) - w_n([t_1 l_{n,i}])| \\ &\geqslant \frac{[t_2 l_{n,i}] - [t_1 l_{n,i}]}{2} \cdot 3^{-n} \\ &> \frac{k_2 3^{-2u}(2 \cdot 3^n - 1) - (k_1 + 1)3^{-2u}(2 \cdot 3^n)}{2} \cdot 3^{-n} \\ &\geqslant \frac{(k_1 + 2)3^{-2u}(2 \cdot 3^n - 1) - (k_1 + 1)3^{-2u}(2 \cdot 3^n)}{2 \cdot 3^{-n}} \\ &= 3^{-2u}\left(1 - \frac{3^{-n}(k_1 + 2)}{2}\right) \geqslant \frac{3^{-2u}}{2}, (n > k_1 + 2) \end{aligned} \qquad (2.8)$$

由(2.6)知 $H_n(2) \leqslant 3^{-n}, H_n(3) \leqslant 3^{-n}, (n \geqslant 0).$ (2.9)

将(2.8),(2.9)代入(2.5)得

$$|X_n(t_2,\omega) - X_n(t_1,\omega)| \geqslant \frac{3^{-2u}}{2} - 2 \cdot 3^{-n}.$$

在上式中令 $n \to \infty$ 得

$$|X(t_2,\omega) - X(t_1,\omega)| \geqslant \frac{3^{-2u}}{2}.$$ 定理 2.3 证毕.

至此,我们已在 A 上构造了一个自回避过程 $\{X(t,\omega), t \geqslant 0\}$.

§3 后 记

设分形集 E 为一个连通的集合，如果去掉 E 中有限多个点就可使 E 不连通，则称 E 为一个有限分叉的分形集，否则称 E 为无限分叉的. Sierpinski 垫和"网状 fractal"都是有限分叉的分形集，但仍存在大量的无限分叉的分形集. 其中最简单的就是 Sierpinski 毯，其定义如下：

设 H_0 为$\mathbb{R}^2$ 中以 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ 为顶点的单位实心闭正方形，$H_1 = H_0 \backslash (\frac{1}{3},\frac{2}{3})^2$，则 H_1 由 8 个边长为$\frac{1}{3}$ 的正方形构成，对其中任一块按上面同样的方法分成 9 等份，挖掉中心的一份，重复这种过程，得到$\mathbb{R}^2$ 中子集序列 $\{H_n, n \geqslant 0\}$，(H_n 由 8^n 个边长为 3^{-n} 的实心闭的正方形构成)，称 $H = \bigcap_{n=0}^{\infty} H_n$ 为平面上的 Sierpinski 毯. H 的 Hausdorff 维数为$\frac{\log 8}{\log 3}$.

由于无限分叉的分形集与有限分叉的分形集在结构上有很大不同，导致无限分叉分形集上随机过程的构造(具体地就是其上"Brown 运动"的构造)比有限分叉分形集上"Brown 运动"的构造要复杂得多，方法也大不相同. 关于 Sierpinski 毯上"Brown 运动"的构造及性质请参见[10]，[13]，[133] 等.

参 考 文 献

[1] Adler, R. J. , Hausdorff dimension and Gaussian fields, Ann. Probab. ,5(1977),145-151.

[2] Adler,R. J. ,The uniform dimension of the level sets of a Brownian sheet,Ann. Probab. ,(1978),505-515.

[3] Adler,R. J. ,The Geometry of Random Fields,Wiley,1981.

[4] Alexander,S. ,Orbach,R. ,Density of States on Fractals, J,Physique,(Paris)lett,43(1982),1,625-631.

[5] Athreya,K. B. and Karlin,S. ,On branching process in random enviroments: I. Extinction probability. Ann. Math. Stat. ,42(1971),1499-1520.

[6] Athreya,K. B. and Karlin,S. ,On branching process in random enviroments: Ⅱ. Limit theorems,Ann. Math. Stat. ,42 (1971),1843-1858.

[7] Athreya, K. B. and Ney, P. E. , Branching Processes, Spinger-Verlag,Berlin,1972.

[8] Barlow,M. T. ,Zero-one laws for the excursions and range of a Levy process,Z. W. ,55(1981),149-163.

[9] Barlow,M. T. ,Random walks and diffusions on fractals, Proc. of ICM,1990, Ⅱ ,1025-1035.

[10] Barlow,M. T,Bass,R,F. ,Constrction of Brownian motion on the Sierpinski carpet,Ann. Inst. H. Poincaré, 25 (1989),225-257.

[11] Barlow,M. T. ,Bass,R. F. ,Local times for Brownian motion on the Sierpinski carpet, Prob. Th. Rel. Fields, 85 (1990),91-104.

[12] Barlow, M. T., Bass, R. F., On the resistance of the Sierpinski carpet, Proc. R. Soc, Lon., A(1990)431, 345-360.

[13] Barlow, M. T., Bass, R. F., Transition densities for Brownian motion on the Sierpinski carpet, In preparation.

[14] Barlow, M. T., Perkins, E. A., Brownian motion on the Sierpinski gasket, Prob. Th. Rel. Fields, 79(1988). 543-623.

[15] Barlow, M. T., Perkins, E. A. and Taylor, S. J., Two uniform intrinsic constructions for the local time of a class of Levy processes, Illinois J. Math., 30(1986), 19-65.

[16] Barlow, M. T. and Taylor, S. J., Defining fractal subset of Z^d, Proc. London Math. Soc., 64(1992)(3), 125-152.

[17] Bedford, T., On Weierstrass-like functions and random recurrent sets. Math. Proc. Camb. Philo. Soc., 106 (1989), 325-342.

[18] Bedford T., Urbanski M., The box and Hausdorff dimension of self-affine sets, Ergod. Th. and Dyn. Sys., 10 (1990). 627-644.

[19] Berman, S. M., Gaussian sample functions; uniform dimension and Holder condition nowhere, Nagoya Math. J., 46(1972), 63-88.

[20] Berman, S. M., Lacal times and sample function properties of stationary Gaussian processes, Trans. Amer. Math. Soc., 137(1969), 277-300.

[21] Berman, S. M., Local nondeterminism and local times of Gaussian processes, Indiana Univ. Math. J., 23(1973). 69-94.

[22] Berman, S. M., Self-intersection and local nondeterminism of Gaussian processes, Ann. Probab., 19(1991), 160-191.

[23] Besicovitch, A. S. and Moran, P. A. P., The measure of product and cylinder sets. J. London Math. Soc., 20 (1945), 110-120.

[24] Besicovitch, A. S. and Taylor, S. J., On the complementary intervals of a linear closed set of zero Lebesque measure, J. London Math. Soc., 29(1954), 449-459.

[25] Blumenthal, R. M. and Getoor, R. K., A dimension theorem for sample functions of stable process, Illinois, J. Math., 4(1960), 370-375.

[26] Blumenthal, R. M. and Getoor, R. K., Some theorem on stable processes, Trans. Amer. Math. Soc., 95 (1960), 263-273.

[27] Blumenthal, R. M., Getoor, R. K., Markov Processes and Potential Theory, Academy Press, 1968.

[28] Blumenthal, R. M., Getoor, R. K., The dimension of the set of zeros and graph of a symmetric stable process, Illinois J. Math., 6(1962), 308-316.

[29] Blumenthal, R. M., Getoor, R. K., Sample functions of stochastic processes with stationary independent increments, J. Math. Mech., 10(1961), 493-516.

[30] Blumenthal, R. M., Getoor, R. K., Local times for Markov processes, Z. W., 3(1964), 50-74.

[31] Breiman, L., Probability, Addison-Wesley Publishing Inc. California, 1968.

[32] Canoli, R., Walsh, J. B., Stochastic integrals in the plane, Acta Math., 134(1975), 111-183.

[33] Cambanis, R., Maejima, M., Two classes of self similar stable processes with stationary increments, Stoch. Proc. Appl., 32(1989), 305-329.

[34] 陈雄,二参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程图集及像集的 Hausdorff 维数,数学学报,32(1989),433-438.

[35] 陈雄,二参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程和二参数 Poisson 型随机微分方程,北京师范大学博士论文,1990.

[36] 陈雄,N 参数 d 维 Ornstein-Uhlenbeck 样本轨道的一个性质,应用概率统计,7(1991)1,9—13.

[37] 陈雄,Holder continuity of the local time of two parameter Ornstein-Uhlenbeck processes,Nankai Series Pure. Appl. Math. Th. Phys. Probability and Statistics,eds Z. P. Jiang et. al. World Scientific,1992.

[38] 陈雄,On P. Revesz's Conjecture about local times of a Brownian Sheet,To appear.

[39] Chung,K. L. ,Lectures from Markov Processes to Brownian Motion,Springer-verlag,1982.

[40] Ciesielski,Z. ,Taylor,S. J. ,First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path. Trans. Amer. Math. Soc. ,103(1962),434-450.

[41] Cuzick,J. ,Some local properties of Gaussian vector fields,Ann. Probab. ,6(1978),984-989.

[42] Cuzick,J. ,The Hausdorff dimension of the level sets of a Gaussian vector field,Z. W. ,51(1980),287-290.

[43] Cuzick,J. ,Multiple points of a Gaussian vector field,Z. W. ,61(1982),431-436.

[44] Dekking,F. M. ,On The survial probability of a branching process in a finite state i. i. d. random enviroment,Stoch. Proc. and Appl. ,27(1988),151-157.

[45] Dekking,F. M. and Grimmett,G. R. ,Super-branching processes and projections of random Cantor sets,Prob.

Th. Rel. Fields, 78(1988). 335-355.

[46] Donsker, M. D. and Varadhan, S. R. S., On laws of the iterated lagarithm and local times. Comm. Pure Appl. Math., 30(1977), 707-753.

[47] Doob, J., Stochastic process, John Wiley and Sons, New York, 1953.

[48] Dvoretzky, A., Erdos, P. and Kakutani, S., Double points of paths of Brownian motion in n-space, Acta Sci. Math., 12(1950), 64-81.

[49] Dvoretzky, A., Erdos, P. and Kakutani, S., Multiple points of paths of Brownian motion in the plane, Bull. Res Council Isr. Sect. F3, (1954), 364-371.

[50] Dvoretzky, A., Erdös, P., Kakutani, S. and Taylor, S. J., Points of multiplicity c of plane Brownian paths, Bull. Res. Council Isr. Sect. F7, (1958), 175-180.

[51] Dvoretzky, A., Erdos, P., Kakutani, S. and Taylor, S. J., Triple points of Brownian motion in 3-space, Proc. Comb. Phil. Soc., 53(1957), 856-862.

[52] Dynkin, E. B., Some limit theorem for sums of independent random variable with infinite mathematical expectation, Izvestin Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math., 19(1955), 247-266.

[53] Dynkin, E. B., Random fields associated with multiple points of the Brownian motion, J. Funct. Anal., 62 (1985), 397-434.

[54] Ehm, W., Sample function properties of the multi-parameter stable processes, Z. W., 56(1981), 195-228.

[55] Evans, S. N., Multiple points in the Sample Paths of a Levy Process, Prob. Th. Rel. Fields, 76(1987), 359-369.

[56] Evans, S. N., The range of a perturbed Levy process, Z. W., (1989).

[57] Falconer, K. J., The Geometry of fractal Sets, Cambridge Univ. Press, 1985.

[58] Falconer, K. J., Fractal Geometry, Joth Wiley & Sons, 1990.

[59] Falconer, K. J., Random fractals, Math. Proc. Camb. Phil. Sol., 100(1986), 559-582.

[60] Falconer, K. J., The Hausdorff dimension of self-affine fractals, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 103(1988), 339-350.

[61] Falconer, K. J., The dimension of self-affine fractals(Ⅱ), Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 111(1992), 169-179.

[62] Federer, H., Geometric Measure Theory, Springer-Verlag, 1969.

[63] 弗里德曼 A., 随机微分方程及其应用(第一卷)(中译本), 北京:科学出版社, 1983.

[64] Freedman D., Brownian Motion and Diffusion, Springer-Verlag, 1983.

[65] Fristedt, B. E., An extension of a theorem of S. J. Taylor concerning multiple points of the symmetric stable process, Z. W., 9(1967). 62-64.

[66] Fristedt, B. E., Sample functions of stochastic processes with stationary independent increments, Advances in Probability, Vol. 3, Marcel Dekker, New York. 1973.

[67] Fristedt, B. E., Pruitt, W. E., Lower functions for increasing random walks and subordinators, Z. W., 18(1971), 167-182.

[68] Fristedt, B. E. and Taylor, S. J., The packing measure of a

general subordinator, Probab. Th. Rel. Fields, 92(1992), 493-510.

[69] Gukushima, M., Dirichlet Forms and Markov Processes, Amsterdam: North-Holland, 1980.

[70] Gatzouras, D. and Lalley, S. P., Statistically self-affine sets: Hausdorff and box dimensions. J. of Th. Probab., 7 (1994), 437-468.

[71] Geman, D., Horowitz, J., Occupation densities, Ann. Probab., 8(1980), 1-67.

[72] Geman, D., Horowitz, J. and Rosen, J., A local time analysis of intersections of Brownian Paths in the plans, Ann. Probab., 12(1984), 86-107.

[73] Glower, J. and Rao, M., Hunt's Hypsthesis (H) and Getoor's conjecture, Ann. Probab., 14 (1986), 1085-1087.

[74] Gnedenko, B. V. and Kolmogorov, A. N., Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables, Addison-Wesley Publishing Co. Inc., Reading, Mass., 1954.

[75] Goldman, A., Points multiples des trajectoires des processus gaussiens, Z. W., 57(1981), 481-494.

[76] Goldman, A., Mouvement Brownien a plusieurs parametres, mesure de Hausdorff des trajectoires, Asterisque, 167 (1988).

[77] Graf, S., Statistically self-similar fractals, Prob. Th. Rel. Fields, 74(1987), 357-392.

[78] Graf, S., Mauldin R. D. and William, S. C., The exact Hausdorff dimension in random recursive constructions, Memoirs of the Amer. Math. Soc., 71(1988)381, 1-121.

[79] Graversen, S. E. and Vuolle-Apiala, J., α-self-similar

Markov processes, Probab. Th. Rel. Fields, 71 (1986), 149-158.

[80] Graversen, S. E. and Vualle-Apiala, J., Duality theory for self-similar processes, Ann. Inst. Henri Poincaré, 22 (1986), 323-332.

[81] Hardin, C. D., On the spectral representation of symmetric stable processes, J. Multi. Anal., 12(1982)385-401.

[82] Harris, T. E., The Theory of Branching Processes, Springer-Verlag, 1963.

[83] Hattori, K., Hattori, T., Self-avoiding process on the Sierpinski gasket, Prob. Th. Rel. Fields, 88(1991), 405-428.

[84] Hattori, K., Hattori, T. and Kusuoka, S., Self-avoiding process on the Sierpinski gasket, Prob. Th. Rel. Fields, 84 (1990), 1-26.

[85] Hawkes, J., The measure of the range of a subordinator, Bull. London Math. Soc., 5(1975), 21-28.

[86] Hawkes. J., Local time and zero sets for processes with infinitely divisible distributions, J. London Math. Soc., (1974), 517-525.

[87] Hawkes, J., On the Hausdorff dimension of the range of a stable process with a Borel set, Z. W., 19(1971), 90-102.

[88] Hawkes, J., Measures of Hausdorff type and stable processes, Mathematika, 25(1978), 202-212.

[89] Hawkes, J., Multiple points for symmetric Levy processes Math. Proc. Camb Phil. Soc., 83(1978)83-90.

[90] Hawkes, J., Random reorderings of intervals complementary to a linear set Quart, J, Math. Oxford, 35(1984)165-172.

[91] Hawkes, J., Measure function properties of the asymmet-

ric Cauchy process, Mathematika, 17(1970), 68-78.

[92] Hawkes, J., Some geometric aspects of potential theory, Lecture Notes in Math., Vol. 1095, 1984.

[93] Hawkes, J., Priuitt, W. E., Uniform dimension results for processes with independent increments, Z. W., 28(1974), 277-288.

[94] Hawkes, J., On the asymptotic behaviour of sample spacing, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 90(1981), 293-303.

[95] Hendricks W, J., A uniform lower bound for Hausdorff dimension for transient symmetric Levy processes, Ann. Probab., 11(1983)589-592.

[96] Hendricks W, J., Hausdorff dimension in a process with stable components-an interesting counter example, Ann. Math. Statist., 43(1972)690-694.

[97] Hendricks W, J., Multiple points for a process in $\mathbb{R}^2$ with stable components, Z. W., 28(1974)113-128.

[98] Horowitz, J., The Hausdorff dimension of the sample path of a subordinator, Israel J. Math., 6(1968), 197-182.

[99] 胡迪鹤，关于向量维 Hausdorff 测度，数学物理学报，10(1990)，23-33.

[100] 胡迪鹤，分析概率论，科学出版社，1984.

[101] 胡迪鹤，随机过程概论，武汉大学出版社，1986.

[102] 胡迪鹤，Sierpinski 毯上的随机过程，武汉大学学报，1993. No. 2，1-8.

[102a] 胡迪鹤，Sierpinski 毯上的随机过程(续)，武汉大学学报，1993. No. 6，9-16.

[103] 胡迪鹤等，随机分形，数学进展，24(1995)3，193—214.

[104] Hu X.(胡晓予)，Measure Properties of random fractals, A thesis for the Degree of Doctor of Philosophy, Univ. of

Virginia, U. S. A.

[105] 胡晓予,Cantor 集随机重排的 Hausdorff 测度,中国科学,34(1994)8,815-826.

[106] 胡晓予,Cantor 集随机重排的填充测度,中国科学,34(1994)9,926-932.

[107] Hu X. (胡晓予),Some fractal sets determined by stable processes, Prob. Th. Rel. Fields, 100(1994), 205-225.

[107a] Hu X. (胡晓予), Taylar S. J. ;Fractal properties and projections of measures in $\mathbb{R}^d$, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. , 115(1994)527-544.

[107b] Hu X. (胡晓予), The measure functions of random Cantor set and fractals determined by subordinators, Chinese Science Bulletin. , 40(1995)3.

[108] 胡晓予,胡迪鹤,常返的随机徘徊的零集的维数,数学年刊(A),16(1995)4,438—442.

[108a] 胡晓予,胡迪鹤,常返随机徘徊中的离散分形,科学通报,Vol. 39,1438.

[109] Hutchinson, J. E, Fractals and self-similarity, Indiana Univ. Math. J, 30(1981), 713-747.

[110] Jian N, Pruit W. E. , The correct measure function for the graph of transient stable process, Z. W. , 9 (1968) 131-138.

[111] Jian N, Pruit W. E. , Collision of stable processes, Illinois J. Math. , 23(1969), 241-248.

[112] Jian N, C. and Pruitt, W. E. , Asymptotic behavior of the local time of a recurrent random walk, Ann. Prob. , 11 (1983)4, 64-85.

[113] Jian N, C. and Pruitt, W. E. , An invariance principle for the local time of a recurrent random walk, Z. W. , 66

(1984),141-156.

[114] Jian N,C. and Pruitt,W.E. ,Maximal increments of local time of a random walk, Ann. Prob. ,15(1987)4,1461-1490.

[115] Kahane J-P,Some Random Series of Funotions,2nd ed, Cambridge Univ. Press,1985.

[116] Kaufman R. , Une propriete metrique du mouvement brownien,C. R. Acda ,Sci. Paris,268(1969)727-728.

[117] Kaufman R. , Entropy, dimension, and random sets, Quart,J. Math. Oxford(2),38(1987),77-80.

[118] Kaufman R. ,Dimensional properties of one-dimensional Brownian motion,Ann. Prob. ,17(1989),189-193.

[119] Kasahara,X,Maejima M,Log-fractional stable processes,Stoch. Proc. Appl. ,30(1988)329-339.

[120] Kesten,H. ,Hitting probabilities of single points for processes with stationary independent increments,Memoir Amer. Math. Soc. ,93,1969.

[121] Kigami, J. ,On a harmonic calculus on the Sierpinski space,Japan. J. Appl. Math. ,6(1989),259-290.

[122] Kigami,J,Harmonic calculus on P. C. F. self-similar set, preprint.

[123] Knight F. B. ,On the random walk and Brownian motion,Trans. Amer. Math. Soc. ,103(1962),218-228.

[124] Kôno,N,Double points of Gaussion sample path. Z. W. , 45(1978),175-180.

[125] Kôno,N,Hausdorff of sample paths for self-similar processes, Dependence in probability and statistics 11, Birkhauser(1986),109-117.

[126] Kono,N,Recent Development on random fields and their

Sample paths Ⅱ.; self-similar processes, Soochow J of Math. ,17(1991),327-361.

[127] Kôno,N,Majima,M,Holder continuity of sample paths of some self-similar stable processes,Tokyo J. Math. ,14 (1991),93-100.

[128] Krebs,W. ,A diffusion defined on a fractal,Ph. D. thesis,Univ. California at Birkerley,1988.

[129] Krickeberg, K. Probability Theory, Addison-Wesley, Reading,Mass. ,1965.

[130] Kumagai,T. ,Estimates of the transition densities for Brownian motion on nested frastals. Prob. Th. Rel. Fields,96(1993),205-224.

[131] kusuoka,S. ,A diffusion process on a fractal,In. Itô,K. Ikeda, N. (eds), Probability methods in mathematical physics, Proceedings Taniguchi Symposium, Katata 1985, Amsterdam, kino kuniya-North Holland, 1987, 251-274.

[132] Kusuoka,S. ,Lectures on diffusion processes on nested fractals,to appear in Springer Lect. Notes in Math.

[133] Kusuoka,S. and Zhou,X. Y.,Dirichlet forms on fractal: Poincaréconstant and resistance. Prob. Th. Rel. Fields,93 (1992),169-196.

[134] Lacey,M. , Limit law for local time of the Brownian sheet,Prob. Th. Rel. Fields,86(1990),63-85.

[135] Lamperti,J. , Semi-stable stochastic processes, Trans. Amer. Math. Soc. ,104(1962),62-78.

[136] Lamperti,J. ,Semi-stable Markov processes,Z. W. 22 (1972),205-225.

[137] 乐成雄,Brown 单的一致 Packing 测度及重点的维数,武

汉大学硕士论文,1990.

[138] LeGall,J.F,Sur la saucisse de Wiener et les points multiples,Ann.Probab.,(1985).

[139] LeGall,J.F,The exact Hausdorff measure of Brownian multiple points,Seminar on Stochastic Processes,1986, Birkhauser,Boston.

[140] LeGall,J.F,Le comportement du mouvement brownien entre les deux instants où il passe par un point double. J.Func. Anal.,71(1987),246-262.

[141] LeGall,J.F,The exact Hausdorff measure of Brownian multiple points Ⅱ, Seminar on stochastic processes, 1989.

[142] LeGall,J.F,Rosen,J.S.,Shieh.N.R.,Multiple points of Levy processes,Ann.Probab.,17(1989)503-515.

[143] LeGall,J.F,Taylor,S.J.,The packing measure of planar Brownian motion,Progress in Probability and statistics, Seminar on stochastic processes (1987), Birkhauser, Boston.

[144] Lēvy, P., Processus Stochastiques of Mouvements Browniens,Cauthier-Villars,1948.

[145] Lēvy,P.,La mesure de Hausdorff de la courbe du mouvement broenien,Giom.Ist.Ist.Ital.Attuari,16(1953), 1-37.

[146] Lindstrn,T.,Brownian motion on nest fractals,Mem. Amer.Math.Soc.,420(1990).

[147] Liu Luqin,On the Hausdorff dimension of the inverse image of a compact set under a Lévy process,preprint.

[148] Liu Luqin,The Hausdorff dimension of the image,graph and level sets of self-similar process, Stochastics and

Quantum Mechanics, Woldscientific Press 1992.

[149] Liu Luqin, The Capacity and Equilibrium Priciple for Jump Markov processes, 数学物理学报, 15(1995)15-30.

[150] 刘杰, Brown 单像集代数和的一些性质, 武汉大学硕士论文, 1992.

[151] 骆顺龙, Stable 过程的碰撞、相遇和半鞅水平集的维数问题, 武汉大学硕士论文, 1992.

[152] Mandelbrot, B. B., Fractals: Form, Chance and dimension, Freeman, 1977.

[153] Mandelbrot, B. B., The Fractal Geometry of Nature, Freeman, 1982.

[154] Mandelbrot, B. B., Stochastic models for the earth's relif, the shape and fractal dimension of the coastlines and the number-area rule for islands, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 72(1975).

[155] Mandelbrot, B. B., On the geometry of homogeneous turbulence with streas on fractional dimention of the isv-surface of scalars, J. Fluid Mec, 72(1975), 401-416.

[156] Mandelbrot, B. B., Van Ness, J. W., Fractional Brownian motions, fracfioral noises and applications, SIAM Review, 10(1968), 422-437.

[157] Maejima, M., On a class of self-similar processes, Z. W., 62(1983), 235-245.

[158] Maejima, M., A self-similar process with nowhere bounded sample paths, Z. W., 65(1983), 115-119.

[159] Mauldin R. D., William, S. C., Random, recursive costructions: Asymptotic geomtric and topological properties, Trans. Amer. Math. Soc., 295(1986), 325-

346.

[160] Mckean, H. P., Sample function of stable processes, Ann. Math., 61(1955), 564-579.

[161] Mcmullen, C., The Hausdorff dimension of general Sierpinski carpets, Nagoya Math. J., 96(1984), 1-9.

[162] Millar, P. W., Path behavior of processes with stationary independent increments Z. W., 17(1971), 53-73.

[163] Mourad, D., Pitt, L. D., Local nondeterminism and Hausdorff dimension, Progress in Probability and statistics, Seminar on stachastic processes, (1986), Birkhauser, Bosten.

[164] Mountford, T. S., A relation between Hausdorff dimension and a condition on time sets for the image by the Brownian sheet to posses interior points, Bull. London Math. Soc., 21(1989), 179-185.

[165] Mountford, T. S., Uniform dimension results for the Brownian sheet, Ann. Probab., 17(1989), 1454-1462.

[166] Nolan, J., Path properties of index-β stable fields, Ann. Probab., 16(1989).

[167] Molan J., Lacal nondeterminism and local times for stable processes, Probab. Th. Rel. Fields, 82(1989)387-410.

[168] Orey, S., Polar sets for processes with stationary independent increments, Proceedings of the Madison Coference on Markov Process and Potential Theory, 117-126, 1968.

[169] Orey, S., Pruitt, N. E., Sample functions of the N-paramter Wiener processes, Ann. Probab., 1 (1973), 138-163.

[170] Perkins, E. A., The exact Hausdorff measure of the level

sets of Brownian motion, Z. W., 58(1981), 373-388.

[171] Perkins, E. A., Taylor, S. J., Uniform measure results for the image of subsets under Brownian motion, Probab. Th. Rel. Fields, (1987), 257-289.

[172] Perkins E. A., Taylor S. J., Measuring close approaches on a Brownian path, Ann. Probab., 16 (1988), 1458-1480.

[173] Polya, G., On the zero of an integral function represented by Fourier's integral, Mesenger of Math., 52(1923), 185-188.

[174] Port, S. C. and Stone, C. J., Infinitely divisible processes and their potential theory Ⅰ. Ⅱ, Ann. Inst. Fourier, 21 (2)(1971), 157-275, 21(4)(1971), 179-265.

[175] Pruit, W. E. and Taylor, S. J., Sample path properties of processes with stable components, Z. W., 12(1969), 267-289.

[176] Pruitt, W. E. and Taylor, S. J., The potential kernel and hitting probabilities for the general stable process in $\mathbb{R}^N$. Trans. Amer. Math. Soc., 146(1969), 299-321.

[177] Pruitt, W. E. and Taylor, S. J., Hausdorff measure properties of the asymmetric Cauchy processes, Ann. Probab., 5(1977)4, 608-615.

[178] Pruit, W. E. The Hausdorff dimension of the range of a process with stationary independent increments, J. Math. Mech., 19(1969), 371-378.

[179] Pruitt, W. E. and Taylor, S. J., The behavior of asymmetric Cauchy processes for large time, Ann. Prob., 11 (1983)2, 302-327.

[180] Pruit, W. E. and Taylor, S. J., The local structure of the

sample paths of asymmetric Cauchy processes, Z. W., 70 (1985), 535-461.

[181] Rao, M., On polar sets for Levy processes, J. London Math. Soc., 35(1987), 569-576.

[182] Ray, D., Sojourn times and the exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion, Trans. Amer. Math. Soc., 108(1963), 436-444.

[183] Revesz, P., On the increments of the local time of a Wiener sheet, J. Multi, Anal., 16(1985), 277-289.

[184] Rezakhanlou, F., Taylor, S, J., The packing measure of the graph of a stable process, Socitet Math. de France Asterisque, 157(1988), 341-361.

[185] Rogers, C. A., Hausdorff measure, Cambridge, 1970.

[186] Rogers, C. A. and Taylor, S. J., Mathematika, 8(1961), 1-31.

[187] Rosen, J., Self-intersections of random fields, Ann. Probab., 12(1984), 108-119.

[188] Rammal, R., Toulouse, G., Random walks on fractal structures and percolation clusters, J. physique letters, 44(1983), L13-L22.

[189] Rvaceva, On domains of attraction of multidimensional distributions, Selected translations in mathematical statistics and probability, 2 (1962), 183-206; Uĉenge Lapiski L′ vovskogo Gosndarstennogo Universite ta, Ser. Mekh. Mat., 29(1954), 5-44.

[190] Samordnitsky, G., Taqqu, M. S., $\frac{1}{a}$-self-similar a stable processes with stationary increments, J. Multi. Anal., 35 (1990), 308-317.

[191] Shieh, M. R., Self-intersections of Markov processes, Bull. Landon Math. Soc., 22(1990), 602-606.

[192] Shieh, N. R., Local times zero sets of certain self-similar stable processes, Preprint.

[193] Smith, W. L. and Wilkinson, W. E., On branching process in random enviroments, Ann. Math. Stat., 40 (1969), 814-827.

[194] Spitzer, F., Principles of Rnadom Walk, New York, 1964.

[195] Stone C. J., The set of zeros of a semi-stable process, Illinois J. Math., 7(1963), 631-637.

[196] Takashima, K., Sample path properties of ergodic self-similar processes, Osaka J. Math., 26(1989), 159-189.

[197] Taqqu, M. S., A bibligraphical guide to self-similsr processes and long range dependence 11, Birkhauser, 1986.

[198] Taqqu, M. S., Wolpert, R. J., Infinite variance self-similar processes subordinated to a poisson measure, Z. W., 62(1983), 53-72.

[199] Taylor, S, J., The use of packing measure in the analysis of random sets, L. N. in Math. 1203(1987), 214-222.

[200] Taylor, S. J., The exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion, Proc. Camb. Phil. Soc., 60(1964), 253-258.

[201] Taylor, S. J., Sample path properties of a transient stable process, J. Math. Mech., 16(1967), 1229-1246.

[202] Taylor, S. J., The measure theory of random fractals. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 100(1986), 383-406.

[203] Taylor, S. J., Multiple points for the sample paths of the symmetric stable processes, Z. W., 5(1966), 247-264.

[204] Taylor, S. J., The α-dimensional measure of the graph and set of zeros of a Brownian path, Proc. Camb. Phil. Soc., 51(1955), 265-274.

[205] Taylor, S. J., Sample path properties of processes with stationary independent increments, Stochastic Analysis, Wiley, 1973, 387-414.

[206] Taylor, C. C. and Taylor, S. J., Estimating the dimension of a fractal, J. R. Statist. Soc. B, 53(1991), 353-364.

[207] Taylor, S. J., Tricot C., The packing measure of rectifiable subsets of the plane, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 99(1986), 285-296.

[208] Taylor, S. J., Tricot, C., Packing measure and its evaluation for a Brownian path, Trans. Amer. Math. Soc., 288 (1985), 679-699.

[209] Taylor, S. J., Watson N. A., A Hausdorff measure classification of polar sets for the heat equation, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 97(1985), 325-344.

[210] Taylor, S. J., Wendel, J. G., The exact Hausdorff measure of the zero set of a stable process, Z. W., 6(1966), 170-180.

[211] Testard, F., Polarite, points multiples et geometris de certains processus gaussiens, These Doctorat, Orsay, 1987.

[212] Tran, L. T., The Hausdorff dimension of the range of the N-parameter Winner process. Ann. Probab., 5(1977), 235-242.

[213] Tricot, C., Two definitions of fractional dimension, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 91(1982), 57-74.

[214] Veraat, W., Sample path properties of self-similar pro-

cesses with stationary increments, Ann. Probab., 13 (1985), 1-27.

[215] Vuolle-Apiala, J., Time-change of self-similar Markov processes, Ann. Inst. Henri Poincaré, 25, (1989), 581-587.

[216] Walsh, J. B., The local time of the Brownian sheet, Asterisque, 52-53(1978), 47-61.

[217] 王梓坤,二参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程,数学物理学报,3(1983),395-406.

[218] Weber, M., Dimension de Hausdorff ef points multiples du mouverment Brownien fractionnaire dans $\mathbb{R}^n$, C. R. Aada. Sci. Paris, 297(1983), 357-360.

[219] Wolpert, R. L., Wiener path intersections and local times. J. Func. Anal., 30(1978), 329-340.

[220] Wu Jun and Xiao Yiming, Some geometric properties of brownian motion on the Sierpinski gasket, Chin. Ann of Math. (B), 16(1995)2, 191-202.

[221] 肖益民,某些 Gauss 场的像集、图、水平集的 Hausdorff 维数,武汉大学学报(自然版)1990. No. 4, 15-24.

[222] 肖益民,某些 Gauss 场的极性与逆象集,数学杂志,11 (1991), 233-236.

[223] 肖益民,分式 Brown 运动与 Hausdorff 维数,数学杂志,11 (1991), 233-236.

[224] 肖益民,分式 Brown 运动的重点与 Hausdorff 维数,数学年刊,12A,5(1991),612-618.

[225] 肖益民,分式 Brown 运动的极函数,数学季刊,7(1992), 76－80.

[226] 肖益民,分式 Brown 运动代数和的一些性质,数学杂志, 12(1992), No. 1.

[227] 肖益民,二参数 Ornstein-Unlenbeck 过程象集的一些性质,数学杂志,12(1992),No. 2.

[228] 肖益民,二参数 Ornstein-Unlenbeck 自相交局部时与重点,(待发表).

[229] 肖益民,某些 Gauuss 向量场的几何性质,武汉大学博士学位论文,1990.

[230] Xiao Yiming, Uniform packing dimension results for fractional Brownian motion, to appear in L. N. in Math.

[231] Xiao Yiming, Dimension results for index-α Gaussian vector fields and index-α stable fields, Preprint, 1991.

[232] Xiao Yiming, Lin Huonan, Dimension properties of sample paths of self-similar processes, to appear.

[233] Xiao Yiming, Liu Luqin, Packing dimension results for certain Levy processes and self-similar Markov processes, Preprint 1992.

[234] 闫海峰,一类自相似马氏过程的样本轨道性质,武汉大学硕士毕业论文,1993.

[235] Youg Lai-Sang, Dimension, entropy and Lyapunov exponents, Ergodic Th. and Dyn. Syst. 2(1982), 102-124.

[236] 赵兴球,稳定分量过程的 Packing 测度结果(待发表).

[237] 曾文曲等,稳定随机游动重点集的离散豪斯道夫维数.(待发表).

[238] 钟玉泉,多参数 Stable 过程的自相交局部时及重点,武汉大学硕士学位论文,1992.

[239] Zhou Xianyin, The Hausdorff dimension of the double point set of the Westwater process, Chin. Ann. of Math. 13B(1992), 86-94.

[240] Zhou Xianyin, Hausdorff dimension of the sample path of the Westwater process, Acta. Math. Sinica, 8(1992), 26-

45.

[241] Zhou Xianyin, The local time of intersections of the Westwater process, Prob. Th. Rel. Fileds, to appear.

[242] Zhou Xianyin, Hausdorff measure of the Level sets of multi-parameter Wiener process in one dimension, Preprint ,1992.

[243] Zhou Xianyin, The exact Hausdorff measure of level sets of Brownian motion on the Sierpinski gasket. Nankai Series Pure Appl. Math. Th. Phys. ,Probability and Statistics, eds, Z. P. Jiang et. al, World Scientific Press(1992), 283-300.

[244] 周先银,平面Brown运动的重点,数学年刊,13A(1992).

[245] Pitt, L. ,Local times for Gaussian vector fields, Indians Math. J. ,27(1978),309-330.

索 引

一 中文部分

一画

一般从属过程 150

一致渐近可略族 105

二画

二进制区间 16

二参数 O-U 过程 214

三画

广义 Sierpinski 毯 339

下半连续 260

上指标 161

下指标 161

上球密度 19

下球密度 19

四画

边长 219

水平集 81

分形集 43

分形准则 378

分数 Brown 运动 201

五画

半二进制区间 16

正则的 4

ε-正则的 6

本性极集 178

长度 254

外测度 2

平移不变性 34

平稳增量过程 193

六画

自仿射集 338

统计—— 338

网状 fractal 403

自相交局部时 95

自相似集 255

自相似马氏过程 180

八画

限制增长 13

图集 81

逆像集 81

九画

重时集 81

重点集 81

测度 2

可数可加—— 2

模式(Ⅰ)产生的—— 2

模式(Ⅱ)产生的—— 7

测度函数 13
逗留时间 239
指数 Gauss 场 210
十画
随机场 200
随机集 254
  μ-统计自相似—— 254
  统计自相似—— 255
随机徘徊 230
暂留的—— 230
常返的—— 230
严 α-稳定的—— 230
预测度 2
容度维数 50
离散的密度定理 71
离散的 Hausdorff 维数 59
离散的 Packing 维数 64
十一画
领先关系 254
领先覆盖 280
密度定理 19
衔置关系 254
乘量性质 109
十三画
强开集条件 282
十四画
鞅 343
截尾 254
稳定性 15
稳定过程 108
  对称—— 109
  严格——109
  ——的局部时 124
  A 型——110
  B 型——110
  ——的 k 重点集 139
稳定从属过程 108
稳定律 104
  严格—— 104
  ——吸引场 220
稳定分布 104
稳定特征函数 104
像集 81
十八画
覆盖 14
  ε-覆盖 14
  ε_q-覆盖 14
覆盖基 14

二 英文部分

adim 48
$\{a_n\}$类集合 303
Baire 纲定理 351
Besicovitch-Taylor 上指标 313
Besicovitch-Taylor 下指标 313
Brown 运动 81
Brown 单 211
$\mathscr{B}_B$ 25
$\mathscr{B}_B$-φ-$\mathscr{P}$ 25
$\mathscr{B}_d$ 10
Cauchy 过程 109

Cantor 集 22
广义—— 301
随机—— 317
随机广义—— 315
C(x,n) 56
$C_\alpha(K)$ 50
diam 7
dim 14
$\dim_c$ 50
$\underline{\dim}_K$ 44
$\overline{\dim}_K$ 44
$\dim_K$ 44
$\underline{\dim}_{MK}$ 47
$\overline{\dim}_{MK}$ 47
$\dim_{MK}$ 47
$\overline{\text{Dim}}$ 33
Dim 34
(D)dim 59
(D)Dim 64
(D)$\dim_K$ 67
(D)$\dim_M$ 59
(D)$\dim_L$ 59
(D)$\overline{\dim}_K$ 67
(D)$\underline{\dim}_K$ 67
(D)$\underline{\dim}_M$ 59
(D)$\overline{\dim}_M$ 59
Dirichlet 型式 403
$\overline{D}_{\mu,\varphi}(x)$ 19
$\underline{D}_{\mu,\varphi}(x)$ 19
ε-Packng 25
ε_σ 6
ε_δ 6
$\varepsilon_{\sigma,\delta}$ 6
ε_η-Packing 25
ε_d 56
ε_s 56
ε_d^k 56
ε_s^k 56
Fractal 44
Frostman 定理 52
Frostman 引理 21
$\mathscr{F}_\sigma$ 9
Galton-Watson 分枝过程 338
Gauss 场 201
general subordinator 150
Gr(E) 81
$\mathscr{G}_\delta$ 9
Hausdorff 测度 13
Hausdorff 维数 15
Hausdorff 确切测度函数 15
Hausdorff α 集 15
Hausdorff 距离 252
Holder 连续 88
$H_\alpha(A,F,\varepsilon)$ 67
H-自相似过程 192
$I_\alpha(\mu)$ 50
$\mathscr{I}_d$ 10
$J_\alpha(A,F,\varepsilon)$ 67
Kaufman 维数 48

k 重时集 81
k 重点集 81
Lévy 过程 149
　暂留的—— 109
　常返的—— 109
Lévy 测度 150
LND 210
L_K 81
L-可数可加测度 10
L-S 可数可加测度 10
L_d 函数 10
$(L-S)_d$ 函数 10
$\mathscr{L}_d$ 11
Lipschitz 系数 252
M_k 81
m_α 59
$\tilde{m}_\alpha$ 59
$\tilde{m}_\varphi$ 59
$\tilde{m}_\varphi$ 59
Packing 25
Packing 测度 26
Packing 确切测度函数 35
Polish 空间 252
Pruitt 指标 168
$P_\varphi(A,\varepsilon)$ 64
$P_\varphi(A,\varepsilon)$ 64
$Q_k(x)$ 57
$s(A)$ 56
Sierpinski 垫 381
Sierpinski 毯 416
stable subordinator 108
stable 场 212
$V(x,n)$ 56
$\tilde{V}(x,2^k)$ 57
$X(E)$ 81
$X^{-1}(F)$ 81
$X^{-1}(x)$ 81
$Z(x)$ 99
$Z(x,t)$ 99

三 希文部分

α 能 50
α-容度 50
α 集 15
α-Packing 集 35
β 161
β' 161
β'' 161
$\beta(K)$ 172
γ 168
Γ^* 16
Γ^{**} 16
$\Gamma^*(n)$ 18
Γ_B^* 26
$\mu(K)$ 172
$\hat{\mu}(z)$ 172
$\mu|_{\sigma(\mu)}$ 4
$\mu_1 \overset{(n)}{=} \mu_2$ 16
$\mu_1 \overset{(n)}{\leqslant} \mu_2$ 16
υ_α 59
$\tilde{\upsilon}_\alpha$ 59

$\upsilon_\varphi(A,F)$ 59
$\tilde{\upsilon}_\varphi(A,F)$ 59
$\rho(x,y)$ 7
$\rho(x,A)$ 7
$\rho(A,B)$ 7
σ 161
$\sigma(\mu)$ 4
$\tau_\varphi(A,F,\varepsilon)$ 64
$\tilde{\tau}_\varphi(A,F,\varepsilon)$ 64
φ-Hausdorff 测度 13
φ-Packing 测度 26
φ-Packing 有限的 54
φ-$\overline{p}$ 26
φ-p 26
φ-P^* 26
φ-p^{**} 26
φ-$\overline{P}$ 26
φ-P 26
φ-P^* 26
φ-P^{**} 26
$\psi(z)$ 160

[General Information]
□□=□□□□□□
□□=□□□□
□□=444
SS□=10236519
DX□=
□□□□=1996□02□□1□
□□□=□□□□□□□

□□
□□
□□
□□
□□
□□□ □□□□□
1 □□□□□□□□
2 Hausdorff□□□Hausdorff□□
3 Packing□□□Packing□□
4 □□□□□□□□□□□□□□□
5 □□□Hausdorff□□□□□□Packing□□
□□□ Brown□□□□□□□□
1 Brown□□□□□□□
2 Brown□□□□□□□□
3 Brown□□□k□□□□k□□□
4 Brown□□□□□□□□□□
□□□ □□□□□□□□□□□
1 □□□
2 □□□□□□□□□□□□
3 □□□□□□□□□□□□□
4 □□□□□□□□□□□□□□□
5 □□□□□k□□□
6 □□
□□□ Lévy□□□□□□□□□
1 □□□□□□□□□□□□□□
2 Lévy□□□□□
3 Lévy□□□□□□□Hausdorff□□
4 □□□□
□□□ □□□□□□□□□□□□
1 □□□□□□□□□□□□□□□
2 □□□□□
3 □□□□□□□Hausdorff□□

4 [illegible]
5 [illegible]
6 [illegible]
[illegible]
1 [illegible] Brown [illegible] Gauss [illegible]
2 Brown [illegible]
3 Stable [illegible]
4 [illegible] OU [illegible]
[illegible]
1 [illegible]
2 [illegible]
3 [illegible]
[illegible] Hausdorff [illegible]
1 [illegible]
2 [illegible]
3 [illegible] Hausdorff [illegible]
4 [illegible]
[illegible] Cantor [illegible]
1 [illegible] Cantor [illegible]
2 [illegible] Cantor [illegible]
3 [illegible] Cantor [illegible] Hausdorff [illegible]
4 [illegible] Cantor [illegible] Packing [illegible]
[illegible]
1 [illegible]
2 [illegible]
3 [illegible] Packing [illegible]
4 [illegible] Hausdorff [illegible]
5 [illegible]
[illegible]
1 Sierpinski [illegible] Brown [illegible]
2 [illegible]
3 [illegible]